ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Diferenciální závislosti mezi zatížením, posouvajícími silami a ohybovými momenty, diferenciální podmínky rovnováhy.

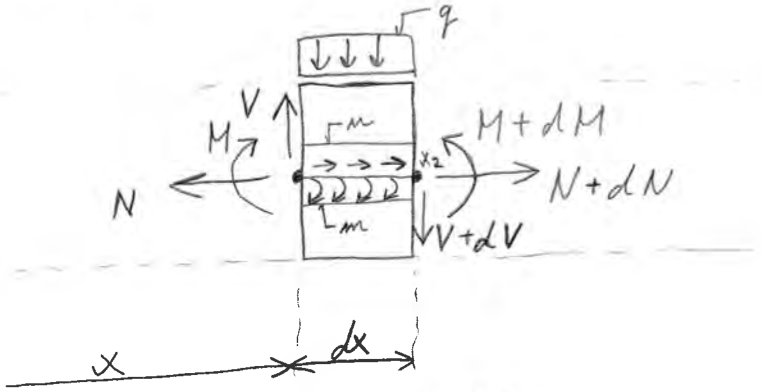
Zdeněk Kala

Diagramy a obrazce N, V, M

Kladné N, V vynášíme nad a záporné pod základní stranu.
Ohybový moment kreslíme vždy na straně tažených vláken.

Diferenciální podmínky rovnováhy

Uvolněný element nosníku:



3 podmínky rovnováhy:

1) $\sum F_{ix} = 0: \quad -N + (N + dN) + n \cdot dx = 0$

2) $\sum F_{iz} = 0: \quad -V + (V + dV) + q \cdot dx = 0$

3) $\sum M_{ix2} = 0: \quad -M + (M + dM) - V \cdot dx + q \cdot dx \frac{dx}{2} - m \cdot dx = 0$

Po úpravě

$$\frac{dN}{dx} = -n \qquad \frac{dV}{dx} = -q$$

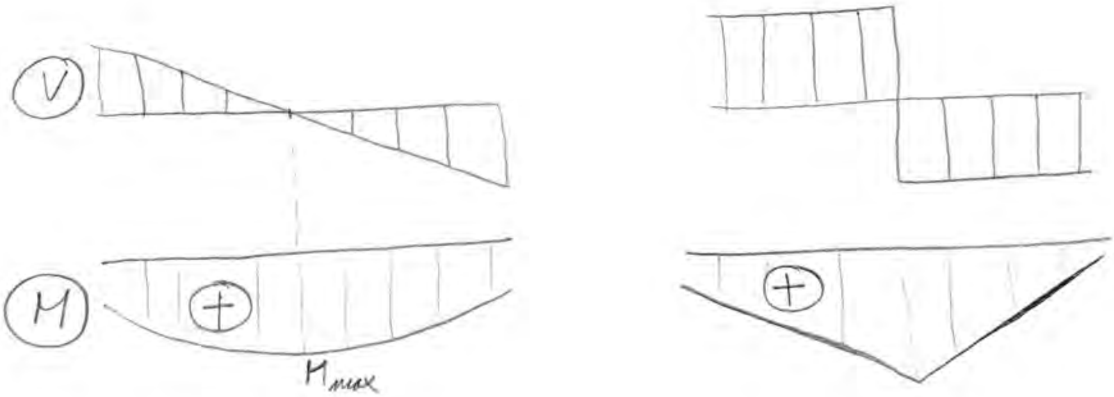
$$\frac{dM}{dx} = V + m$$

diferenciální podmínky rovnováhy

Často pro $m = 0$ $\frac{dM}{dx} = V$ ... Schwedlerova věta:
Derivace ohybového momentu podle nezávisle proměnné x je rovna posouvající síle.

Extrém normálové síly N nebo posouvající síly V nastane v průřezu, v němž je intenzita spojitého osového n resp. příčného q zatížení rovna nule.

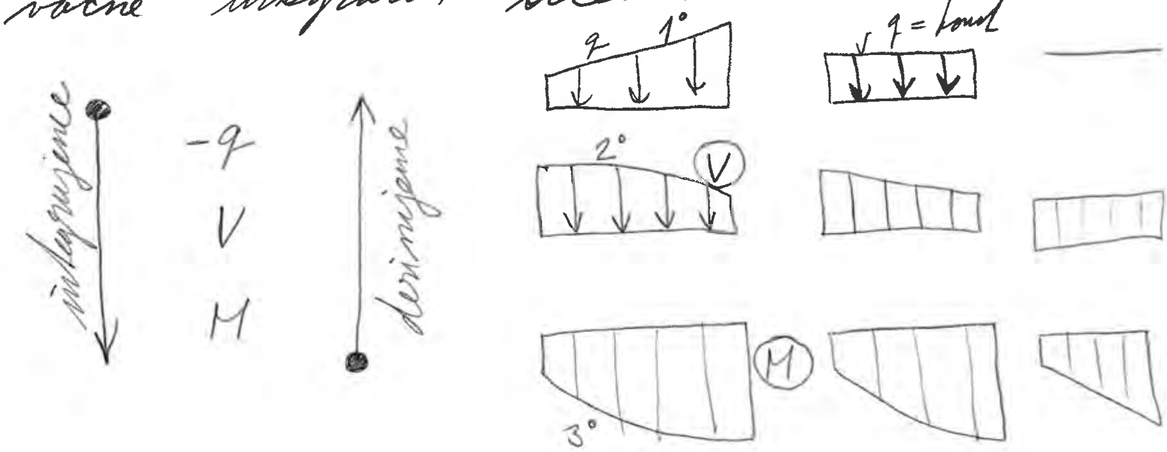
$$\frac{dM}{dx} = V = 0$$

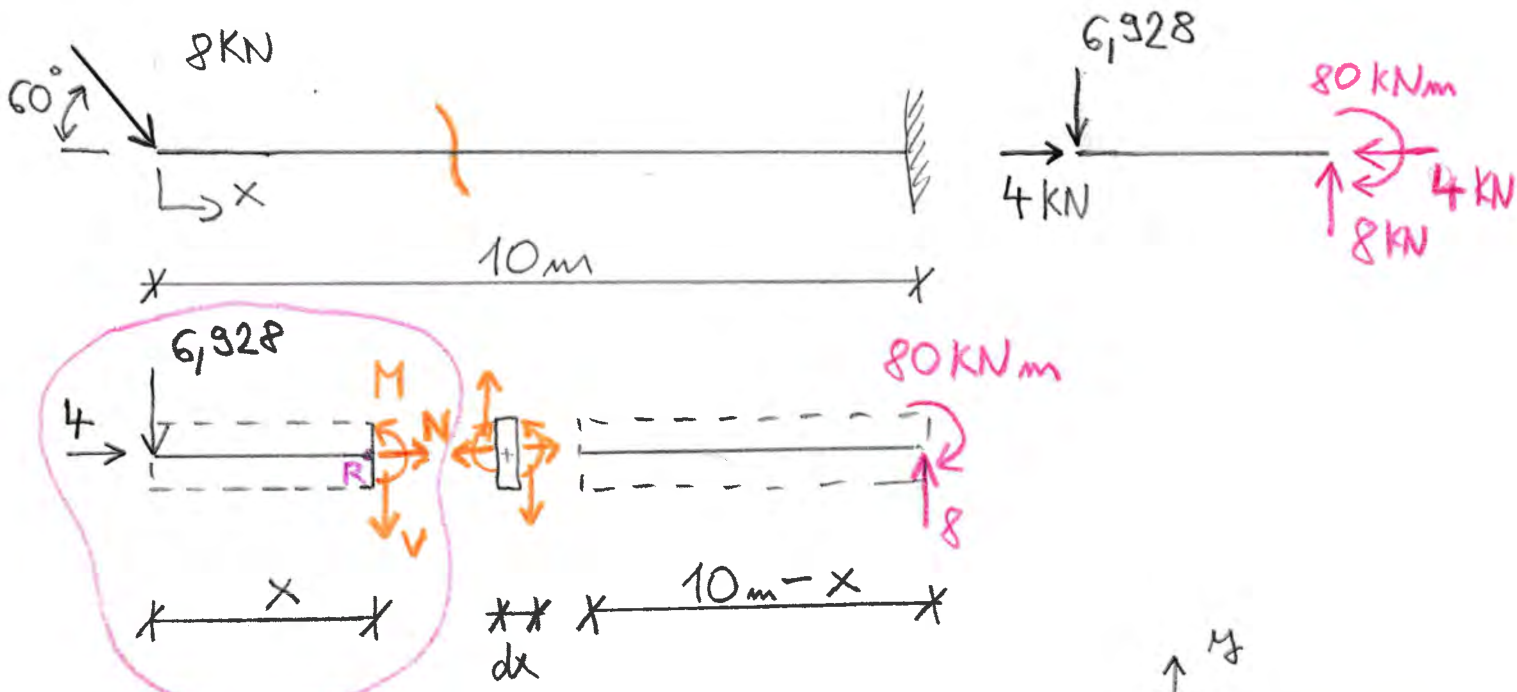


Postupně integrujeme

$$N(x) = -\int n(x)\,dx + C_1$$
$$V(x) = -\int q(x)\,dx + C_2$$
$$M(x) = \int V(x)\,dx + C_3 \quad (\text{pokud } m(x)=0)$$

Derivačně integrační schéma





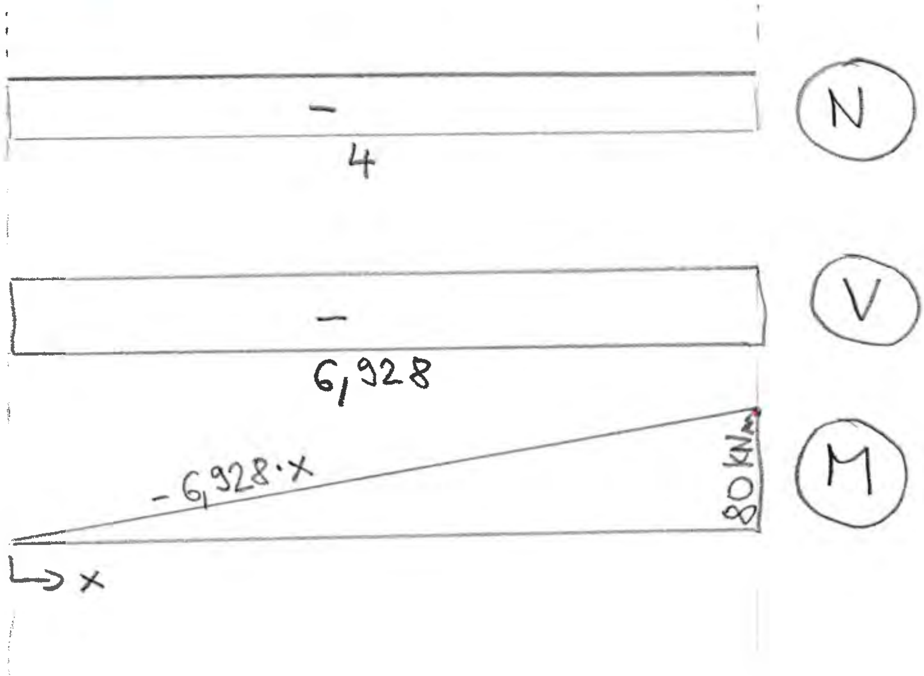
ROVNOVÁHA

$$\Sigma F_x = 0 \qquad 4 + N = 0 \Rightarrow N = -4$$

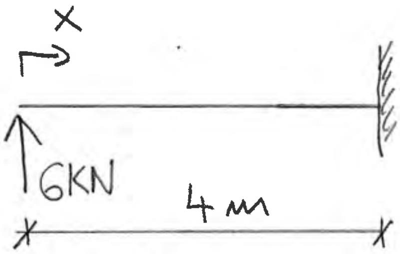
$$\Sigma F_y = 0 \qquad -6{,}928 - V = 0 \Rightarrow V = -6{,}928$$

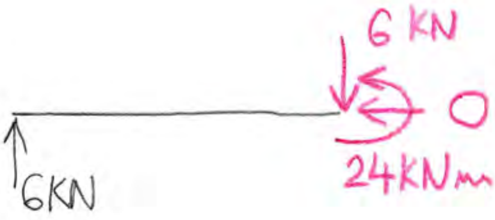
$$\Sigma M_R = 0 \qquad 6{,}928 \cdot x + M = 0 \Rightarrow M = -6{,}928 \cdot x$$

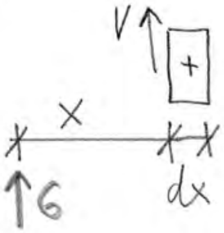
$$V = \frac{dM}{dx}$$



- <u>Normálová síla N</u> je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, <u>do směru osy prutu</u>.
- <u>Posouvající síla V</u> je dána algebraickým součtem průmětů všech vnějších sil, působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, <u>do směru kolmého k ose prutu</u>.
- <u>Ohybový moment M</u> je určen algebraickým součtem statických momentů všech vnějších sil (včetně reakcí), působících na levou nebo pravou část prutu od průřezu, k těžišti průřezu.



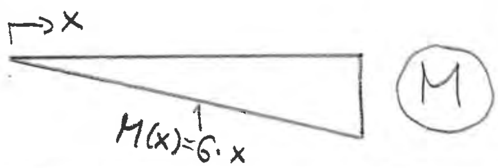


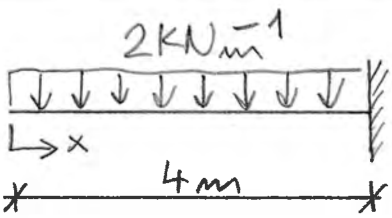


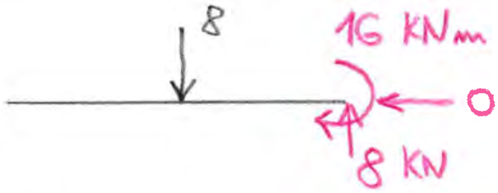
$V(x) = 6 [KN]$

$M(x) = 6 \cdot x \, [KNm]$

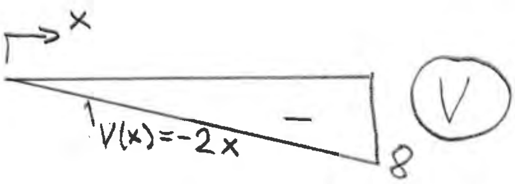
$$\boxed{V(x) = \frac{dM}{dx} = 6 \text{ KN}}$$

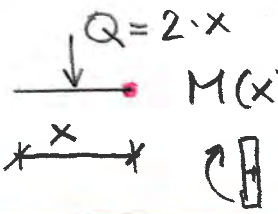






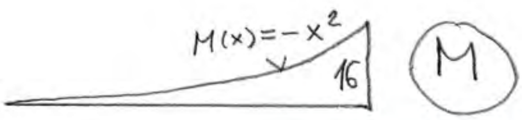
$V(x) = -2 \cdot x \quad [KN]$



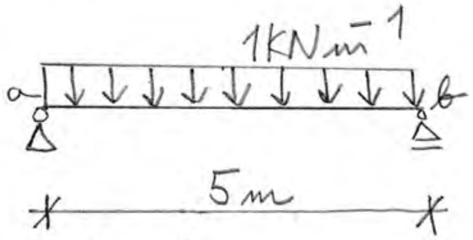


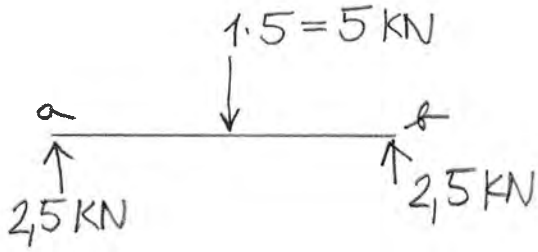
$M(x) = -Q \cdot \frac{x}{2} = -2 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$

$= -x^2$



$$\boxed{V(x) = \frac{dM}{dx} = \frac{d(-x^2)}{dx} = -2x}$$





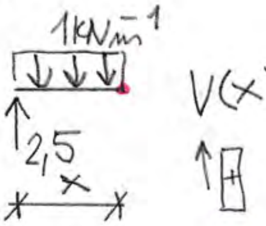
$\Sigma M_a = 0 \quad R_b \cdot 5 - 5 \cdot 2{,}5 = 0$

$R_b = 2{,}5$ KN

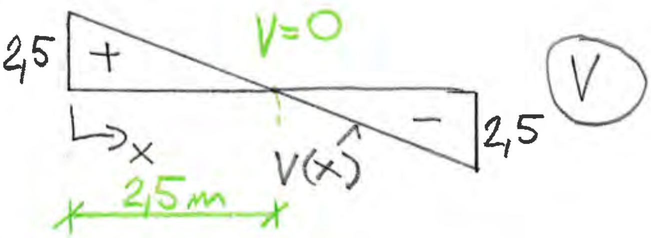
$\Sigma M_b = 0 \quad -R_a \cdot 5 + 5 \cdot 2{,}5 = 0$

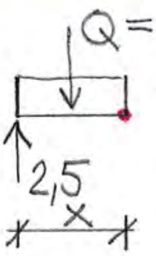
$R_a = 2{,}5$ KN

$\Sigma F_y = 0 \quad 2{,}5 - 5 + 2{,}5 = 0$



$V(x) = 2{,}5 - 1 \cdot x$

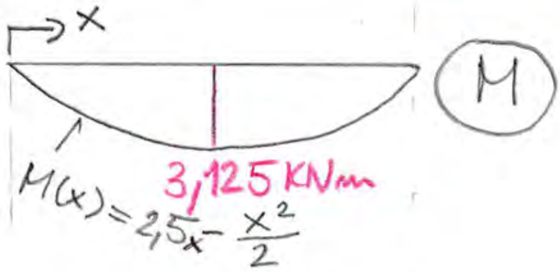




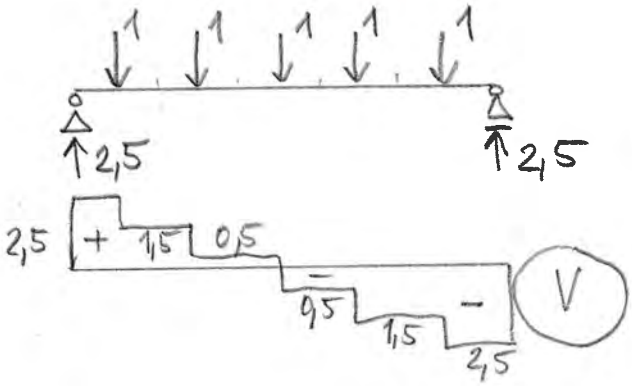
$M(x) = 2{,}5 \cdot x - Q \cdot \frac{x}{2} = 2{,}5 \cdot x - 1 \cdot x \frac{x}{2} = 2{,}5 \cdot x - \frac{x^2}{2}$

$\max M = M(2{,}5) = 2{,}5 \cdot 2{,}5 - \frac{2{,}5^2}{2} = 3{,}125$ KNm

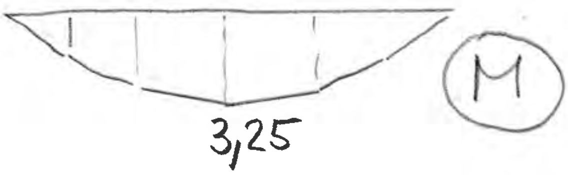
EXTRÉM MOMENTU KDE $V(x) = 0$

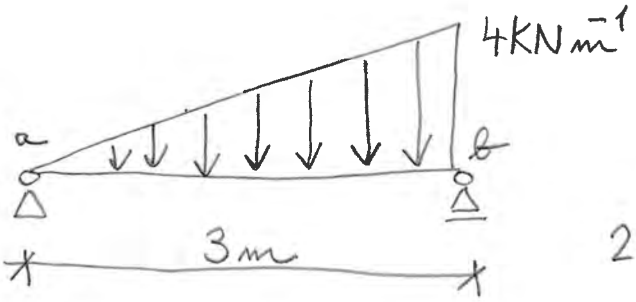


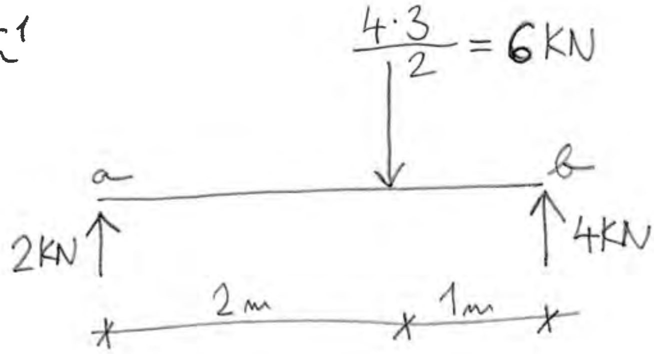
$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{d\left(2{,}5 \cdot x - \frac{x^2}{2}\right)}{dx} = 2{,}5 - x$$



PŘIBLIŽNÝ MODEL ZAHUŠŤOVÁNÍM BŘEMENY DOSÁHNEME APROXIMACI SPOJITÉHO PRŮBĚHU







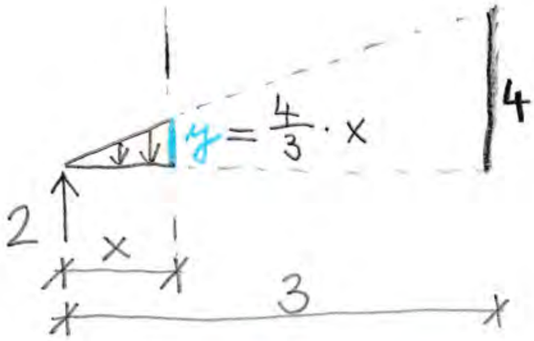
$\Sigma M_a = 0 \quad -6\cdot 2 + R_b \cdot 3 = 0$

$R_b = 4 KN$

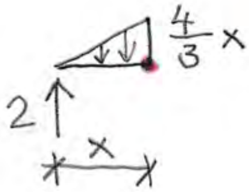
$\Sigma M_b = 0 \quad -R_a \cdot 3 + 6 \cdot 1 = 0$

$R_a = 2 KN$

$\Sigma F_y = 0 \quad 2 - 6 + 4 = 0$ ✓



$$\frac{4}{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \frac{4}{3} \cdot x$$



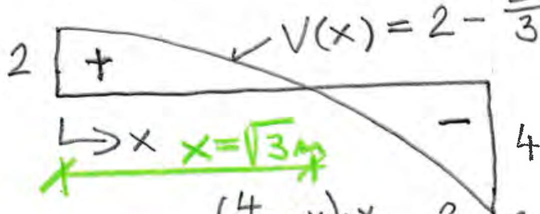
$$V(x) = 2 - \frac{\left(\frac{4}{3} \cdot x\right) \cdot x}{2} = 2 - \frac{2}{3} x^2$$

$\uparrow \boxed{+}$

$V(x) = 0$

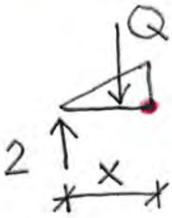
$2 - \frac{2}{3} x^2 = 0$

$\frac{2}{3} x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{3}\, m$



V

$$Q = \frac{\left(\frac{4}{3} \cdot x\right) \cdot x}{2} = \frac{2}{3} x^2$$



$$M(x) = 2 \cdot x - Q \cdot \frac{x}{3} = 2 \cdot x - \frac{2}{3} x^2 \cdot \frac{x}{3}$$

$$\boxed{+} \quad = 2 \cdot x - \frac{2}{9} x^3$$

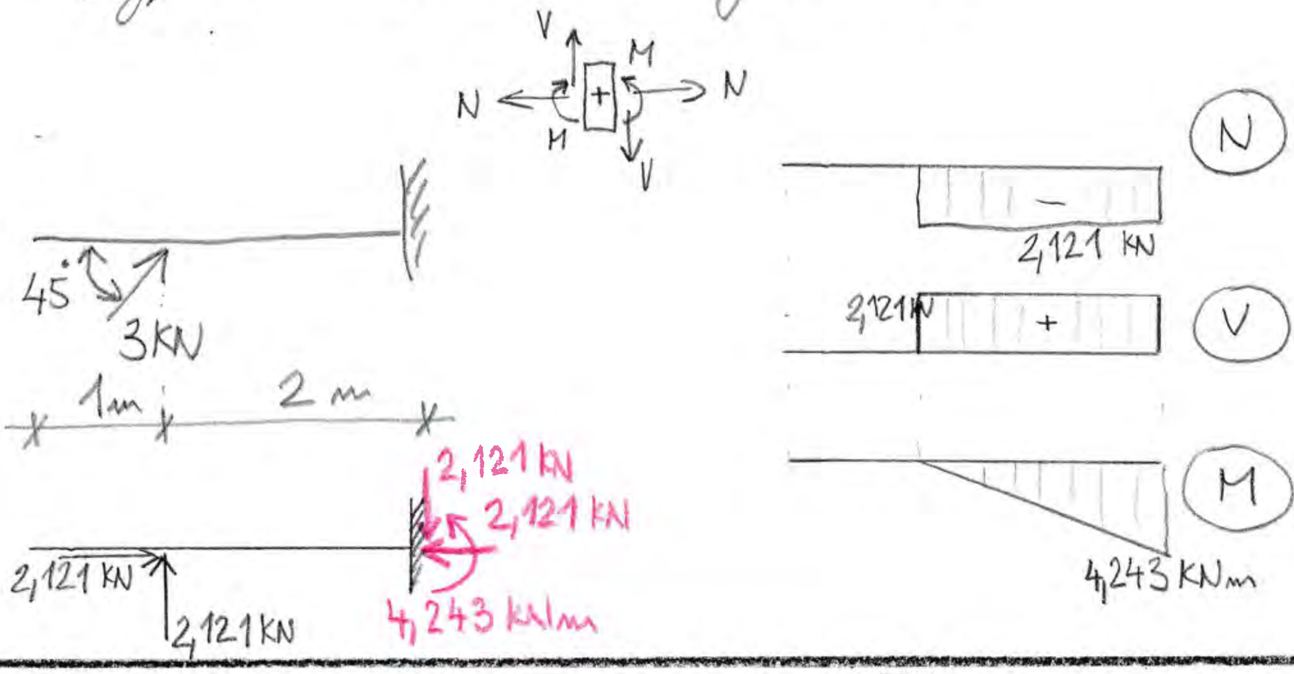
$$V(x) = \frac{dM}{dx} = 2 - \frac{2}{3} x^2$$

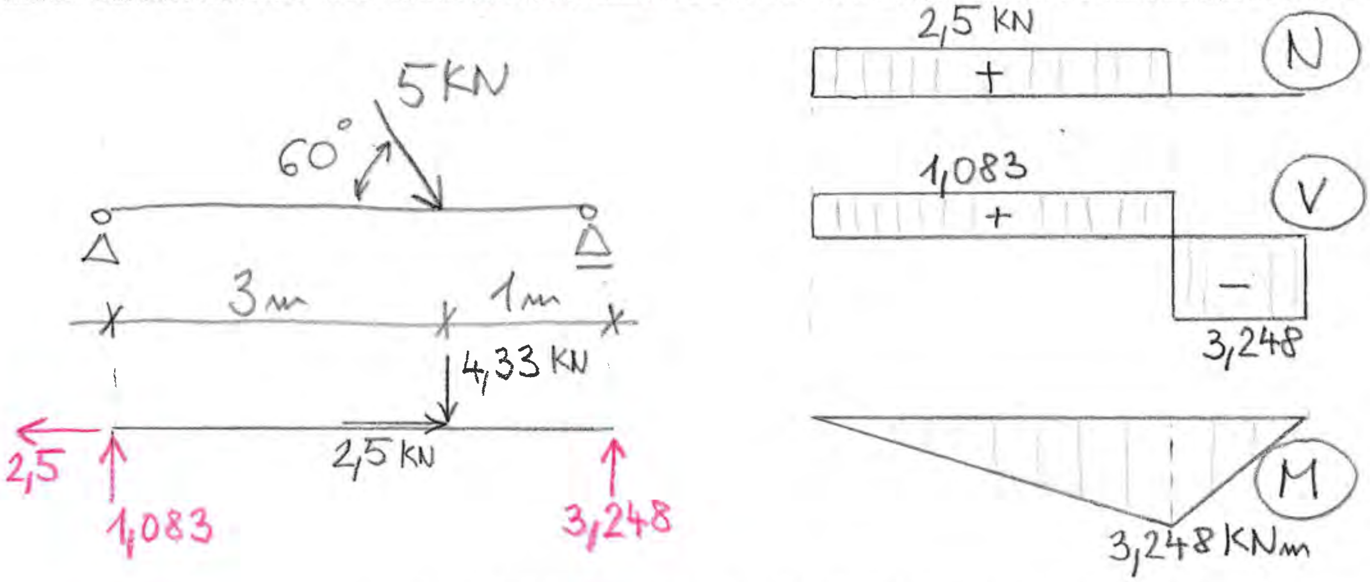
M

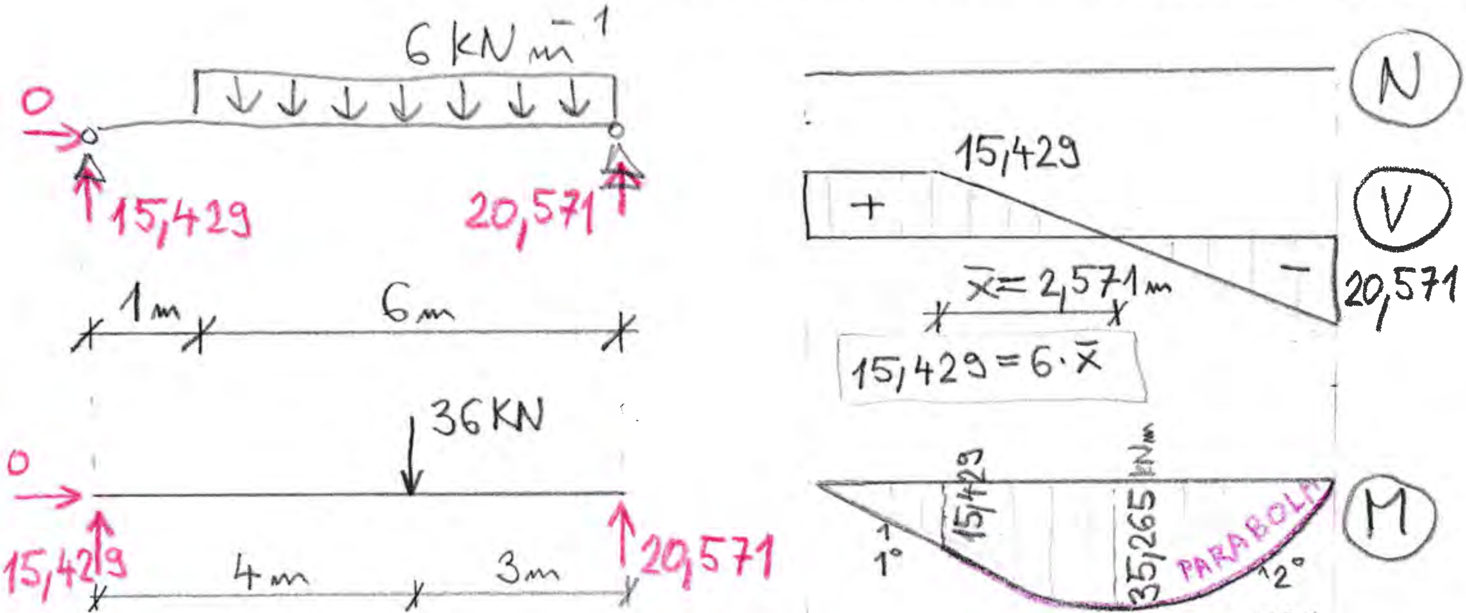
$$M(x) = 2 \cdot x - \frac{2}{9} x^3$$

$$\max M = M(\sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} - \frac{2}{9} (\sqrt{3})^3 = \underline{\underline{2{,}309\ KNm}}$$

Vypočtěte reakce a vykreslete N, V, M

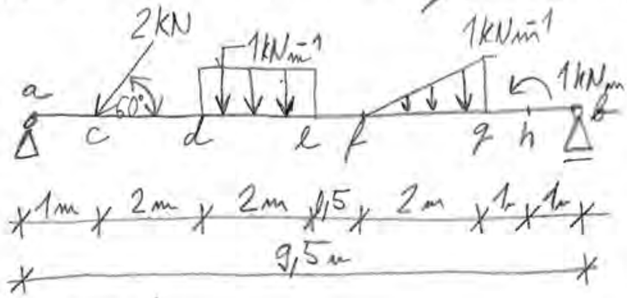






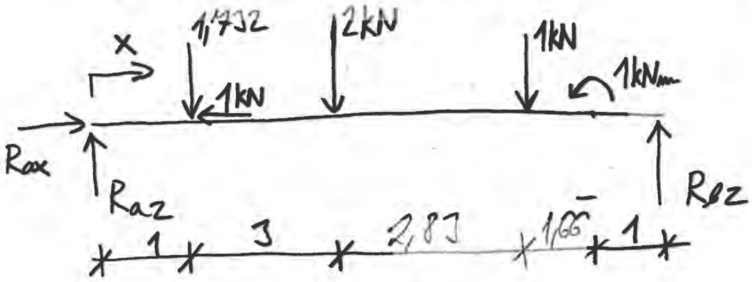
$$M_{max} = 15{,}429 \cdot 3{,}571 - 6 \cdot 2{,}571 \cdot \frac{2{,}571}{2} =$$
$$= 35{,}265 \text{ kNm}$$

Příklad: Určete průběh vnitřních sil na nosníku



- reakce

nosník uvolníme z vnějších vazeb a spojité zatížení nahradíme náhradními břemeny



$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow R_{ax} = 1kN$

$\Sigma M_a = 0 \Rightarrow R_{bz} \cdot 9{,}5 - 1{,}732 \cdot 1 - 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6{,}83 + 1 = 0 \Rightarrow R_{bz} = 1{,}638 kN$

$\Sigma M_b = 0 \Rightarrow -R_{az} \cdot 9{,}5 + 1{,}732 \cdot 8{,}5 + 2 \cdot 5{,}5 + 1 \cdot 2{,}666 + 1 = 0 \Rightarrow R_{az} = 3{,}0935 kN$

Kontrola: $1{,}638 + 3{,}0935 - 1{,}732 - 2 - 1 = 0$

- vnitřní síly

$N_{ac} = 1kN$

$M_{ab} = 0$

$M_c = 3{,}0935 \cdot 1 = 3{,}0935 kNm$ $\quad M_d = 3{,}0935 \cdot 3 - 1{,}732 \cdot 2 = 5{,}814 kNm$

$M_e = 3{,}0935 \cdot 5 - 1{,}732 \cdot 4 - 2 \cdot 1 = 6{,}5395 kNm$

$M_f = 3{,}0935 \cdot 5{,}5 - 1{,}732 \cdot 4{,}5 - 2 \cdot 1{,}5 = 6{,}22 kNm$

$M_g = 3{,}0935 \cdot 7{,}5 - 1{,}732 \cdot 6{,}5 - 2 \cdot 3{,}5 - 1 \cdot 0{,}\overline{666} = 4{,}274 kNm$

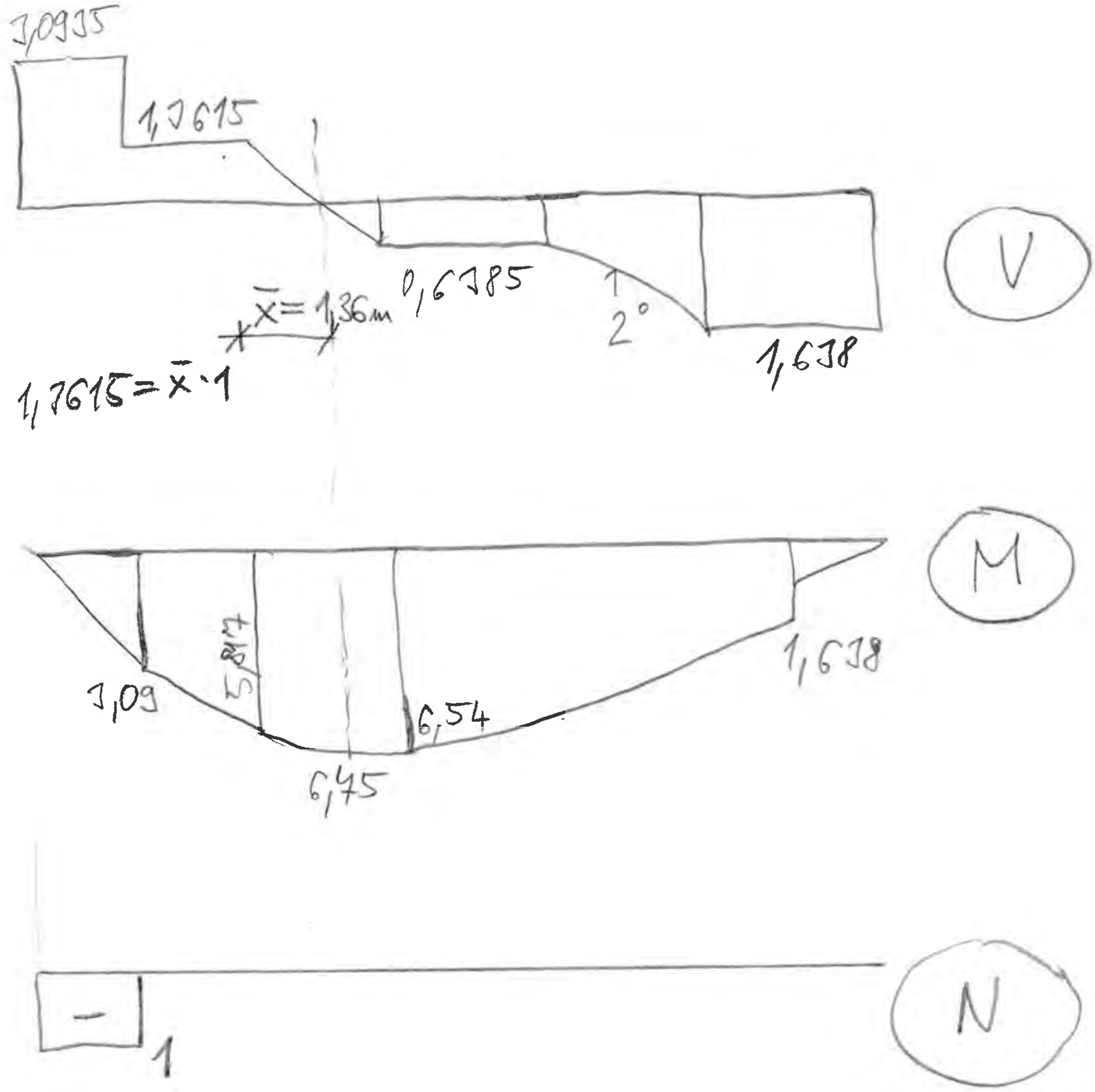
$M_h = 3{,}0935 \cdot 8{,}5 - 1{,}732 \cdot 7{,}5 - 2 \cdot 4{,}5 - 1 \cdot 1{,}666 - 1 = 1{,}638 kNm$

$V_a = 3{,}0935 kN$ $\quad V_{cd} = V_a - 1{,}732 = 1{,}3615$

$V_{de} = V_a - 1{,}732 - 1 \cdot (x - 3)$

$V_{ef} = V_a - 1{,}732 - 1 \cdot 2 = -0{,}6385 kN$

$V_{fg} = V_a - 1{,}732 - 1 \cdot 2 - \frac{1kNm^{-1}}{2} \cdot (x - 5{,}5) \cdot \frac{(x-5{,}5)}{2}$


1,0915
1,7615
0,6785
x̄ = 1,36m
2°
1,618
1,7615 = x̄·1
V
1,09
5,817
6,75
6,54
1,618
M
–
1
N