

ZÁKLADY STAVEBNÍ MECHANIKY

BDA001

Obecná rovinná soustava sil. Statické modely rovinných konstrukcí, vazby a podepření v rovině, zatížení. Výpočet reakcí ve vazbách.

Zdeněk Kala

https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/BDA001/BDA001_harmonogram-2024-25.pdf

<https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/BDA001/BDA001t.htm>

<https://www.fce.vutbr.cz/STM/kala.z/BDA001cv/BDA001cv.htm>

OBEČNÁ ROVINNÁ SOUSTAVA SIL - VÝSLEDNICE

Rozložíme každou sílu F_i do pravoúhlých složek F_{ix} , F_{iy} o velikostech

$$F_{ix} = F_i \cos \alpha_i, \quad F_{iy} = F_i \sin \alpha_i. \quad (1)$$

Složky F_{ix} , F_{iy} přeložíme do souřadnicových os x , y a do počátku o , tj. přidáme moment M_{io} (2), nebo dvě dvojice sil o velikosti výsledného momentu

$$M_{io} = F_{iy} x_i - F_{ix} y_i = F_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i). \quad (2)$$

Pro všechny síly soustavy se původní soustava ekvivalentně nahradí třemi silovými soustavami, a to

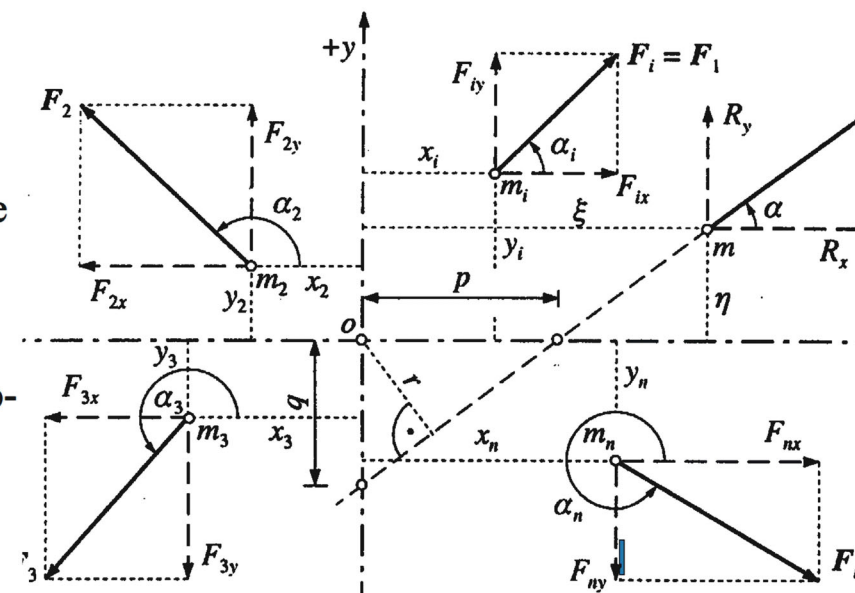
- soustavou sil F_{ix} v ose x (výslednice R_x),
- soustavou sil F_{iy} v ose y (výslednice R_y),
- soustavou silových dvojic M_{io} (výsledný moment M_o)

a platí **tři podmínky ekvivalence**

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = R \cos \alpha,$$

$$M_o = \sum_{i=1}^n M_{io} = \sum_{i=1}^n F_i (x_i \sin \alpha_i - y_i \cos \alpha_i).$$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i = R \sin \alpha,$$



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{R_y}{R}.$$

Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil určují tři parametry:

- síla R procházející počátkem (R, α) a
- dvojice sil o momentu M_o rovném statickému momentu soustavy k počátku o .

Vektory R , M_o lze nahradit silou posunutou o vzdálenost $r = M_o / R$.

OBEČNÁ ROVINNÁ SOUSTAVA SIL - ROVNOVÁHA

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{R_y}{R}. \quad (4)$$

Výsledný účinek obecné rovinné soustavy sil určují tři parametry:

- síla $\mathbf{R}$ procházející počátkem (R, α) a
- dvojice sil o momentu $\mathbf{M}_o$ rovném statickému momentu soustavy sil k počátku o .

Vektory $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_o$ lze nahradit silou posunutou o vzdálenost $r = M_o / R$.

Obecná rovinná soustava sil je v rovnováze, platí-li tři podmínky, u nichž tři složky jsou rovny nule. Varianty využití **podmínek rovnováhy** jsou tři:

- **dvě silové a jedna momentová** podmínka, využitelné pro výpočet složek reakcí *konzoly*, jsou

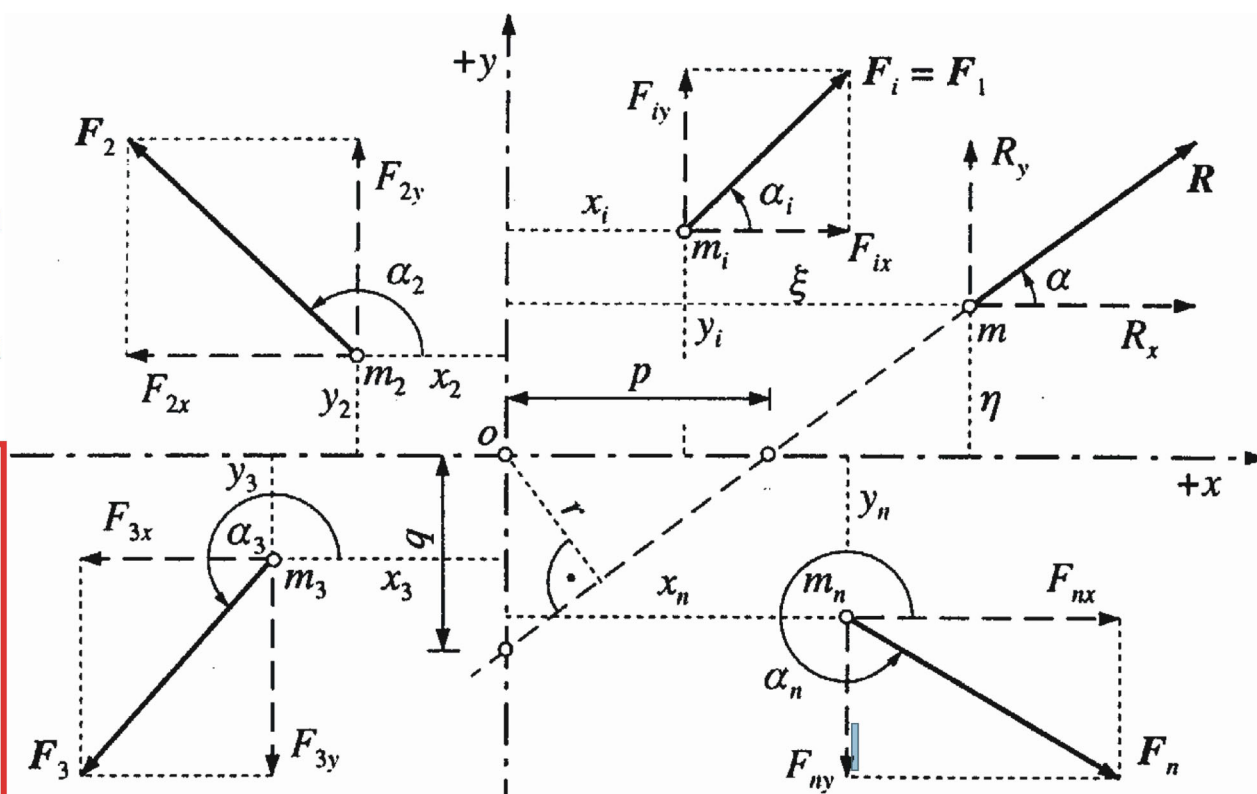
$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0, \quad M_o = \sum_{i=1}^n M_{io} = 0; \quad (5)$$

- **dvě momentové a jedna silová** podmínka (předepsaná pro směr nekolmý na spojnici momentových středů $a-b$), využitelné pro výpočet složek reakcí *prostého nosníku*, jsou

$$R_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0, \quad M_a = \sum_{i=1}^n M_{ia} = 0, \quad M_b = \sum_{i=1}^n M_{ib} = 0; \quad (6)$$

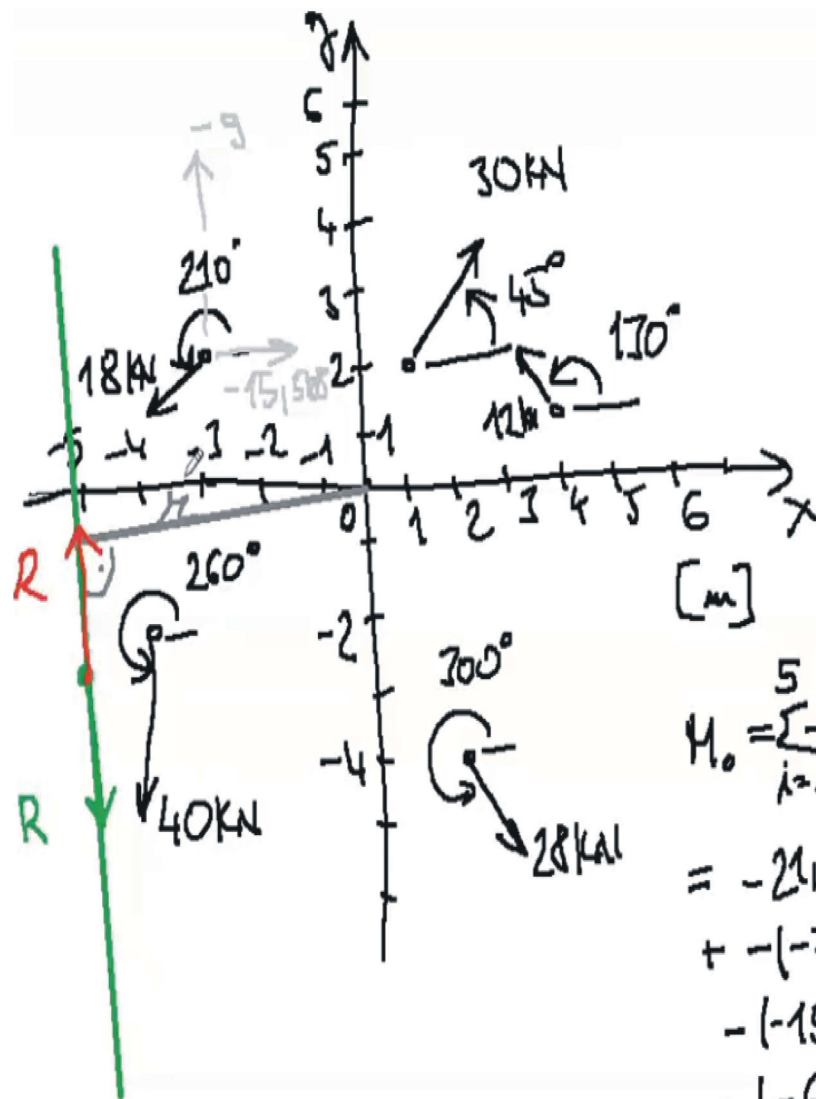
- **tři momentové** podmínky (momentové středy a, b, c neleží na jedné přímce), využitelné pro výpočet složek reakcí *nosníku podepřeného ve třech bodech*, mají tvar

$$M_a = \sum_{i=1}^n M_{ia} = 0, \quad M_b = \sum_{i=1}^n M_{ib} = 0, \quad M_c = \sum_{i=1}^n M_{ic} = 0. \quad (7)$$



Speciální případy podmínek rovnováhy nastanou, když:

- je splněna jen podmínka $\sum F_{iy} = 0$, pak $\mathbf{R}$ je kolmá k ose y nebo jde o dvojici sil,
- jsou splněny jen podmínky $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = 0$, pak výslednicí je dvojice sil,
- je splněna jen podmínka $\sum M_{io} = 0$ pro o_1 , pak paprsek výslednice prochází o_1 , výslednicí nemůže být dvojice sil,
- jsou splněny jen podmínky $\sum M_{io} = 0$ pro o_1, o_2 , pak paprsek výslednice je určen body o_1, o_2 .



$\bar{F}_i$	$\alpha_i [^\circ]$	$F_{ix} [kN]$	$F_{iy} [kN]$
30	45	21,211	21,213
12	170	-7,711	+9,197
18	210	-15,588	-9
40	260	-6,946	-79,392
28	300	14	-24,248
		$R_x = 4,965$	$R_y = -42,215$

$$\bar{F}_{ix} = \bar{F}_i \cdot \cos \alpha_i$$

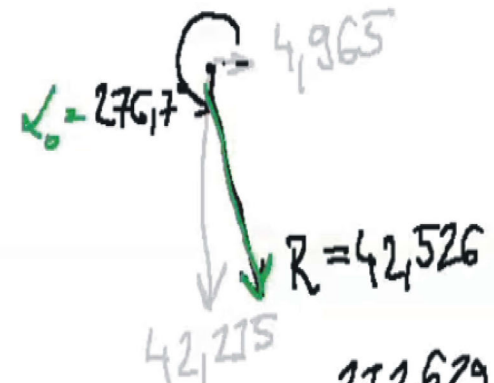
$$\bar{F}_{iy} = \bar{F}_i \cdot \sin \alpha_i$$

$$R = \sqrt{4,965^2 + (-42,215)^2} = 42,526 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha_0 = \frac{R_x}{R} = \frac{4,965}{42,526}$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{R_y}{R} = \frac{-42,215}{42,526}$$

$$\alpha_0 = 276,705^\circ$$



$$M_0 = \sum_{i=1}^5 -F_{ix} \cdot y_i + F_{iy} \cdot x_i =$$

$$= -21,213 \cdot 2 + 21,213 \cdot 1$$

$$+ -(-7,711) \cdot 1 + 9,193 \cdot 4$$

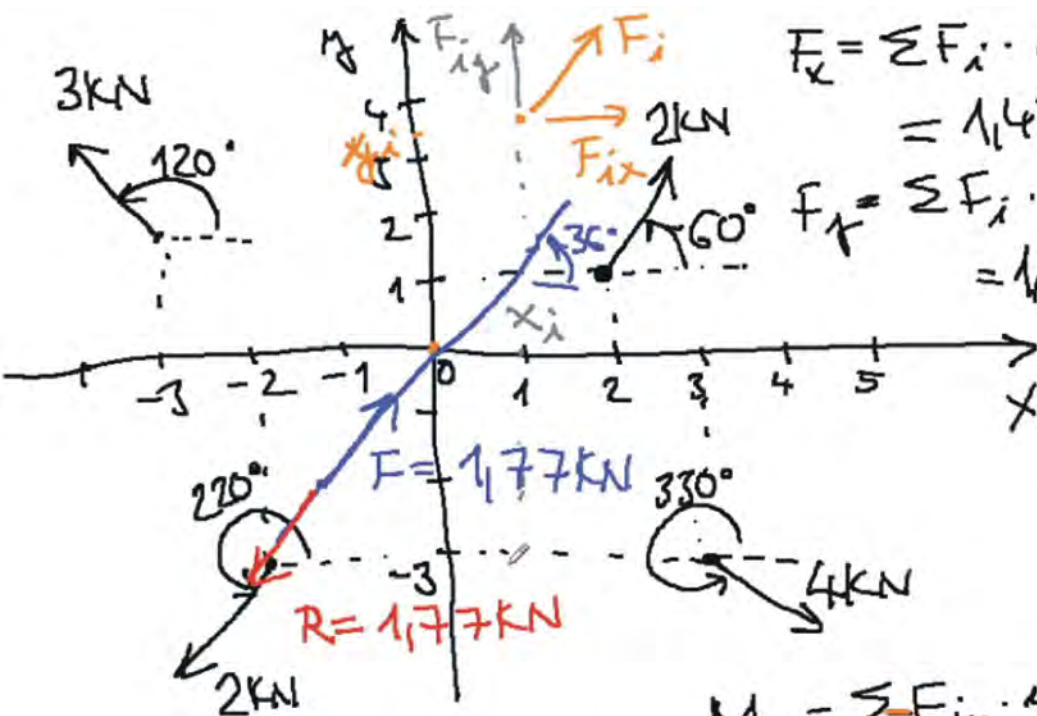
$$- (-15,588) \cdot 2 + (-9) \cdot (-3)$$

$$- (-6,946) \cdot (-2) + (-79,392) \cdot (-4)$$

$$- 14 \cdot (-4) + (-42,215) \cdot 2$$

$$= 232,629 \text{ kNm}$$

$$M_0 = R \cdot r \Rightarrow r = \frac{232,629}{42,526} = 5,47 \text{ m}$$



$$F_x = \sum F_i \cdot \cos \alpha_i = 2 \cdot \cos 60^\circ + 3 \cdot \cos 120^\circ + 2 \cdot \cos 220^\circ + 4 \cdot \cos 330^\circ = 1.432 \text{ kN}$$

$$F_y = \sum F_i \cdot \sin \alpha_i = 2 \cdot \sin 60^\circ + 3 \cdot \sin 120^\circ + 2 \cdot \sin 220^\circ + 4 \cdot \sin 330^\circ = 1.045 \text{ kN}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{1.432^2 + 1.045^2} = 1.777 \text{ kN}$$

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{1.432}{1.777} = 0.81 \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

$$\sin \alpha = \frac{F_y}{F} = \frac{1.045}{1.777} = 0.59 \Rightarrow \alpha = 36^\circ$$

$$M_o = \sum F_{ix} \cdot y_i + F_{iy} \cdot x_i = -2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1 + 2 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2$$

$$- (3 \cdot \cos 120^\circ) \cdot 2 + 3 \cdot \sin 120^\circ \cdot (-3)$$

$$- 2 \cdot \cos 220^\circ \cdot (-3) + 2 \cdot \sin 220^\circ \cdot (-2)$$

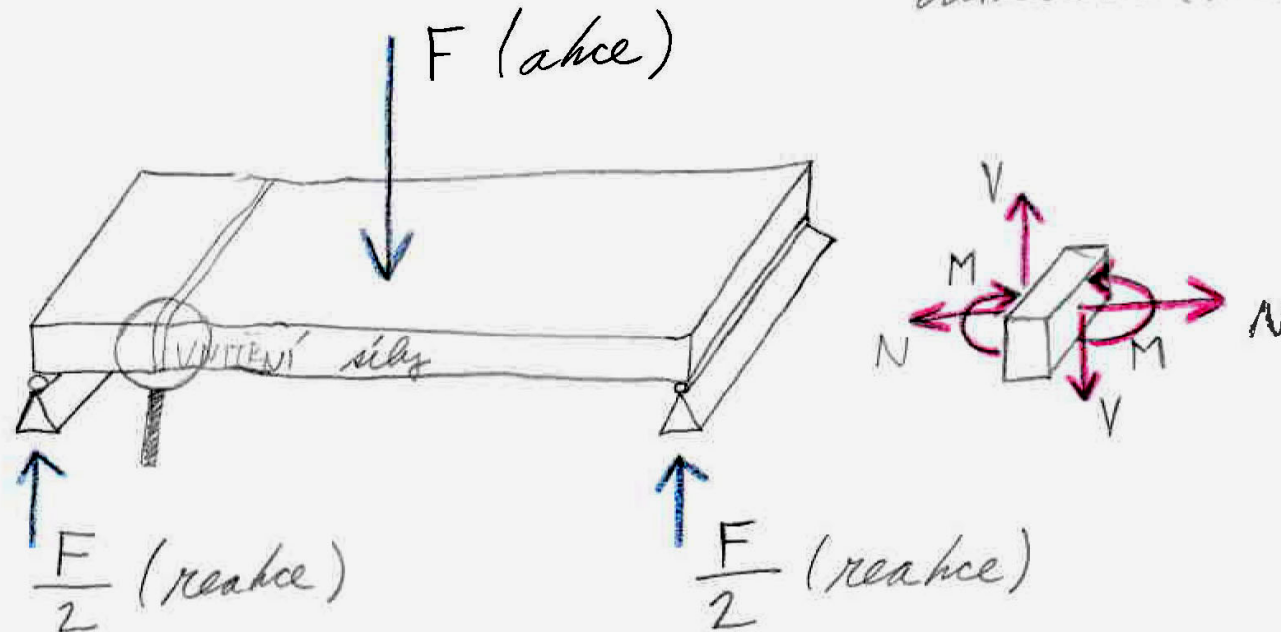
$$- 4 \cdot \cos 330^\circ \cdot (-3) + 4 \cdot \sin 330^\circ \cdot (-3)$$

$$= 2.45 + (-4.79) - 2.03 + 4.39 = 0.03 \text{ kNm}$$

~~$M_o = F \cdot r$~~
 $0.03 = 1.777 \cdot r$
 $r = \frac{0.03}{1.777} = 0.017 \text{ m}$

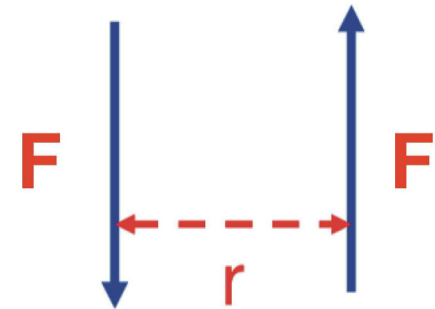
SÍLA – VNITŘNÍ A VNĚJŠÍ

mějří síla (působí na těleso zvenčí) – akce
vnitřní síla (vzniká uvnitř tělesa působením v důsledku namáhání) – reakce



STATICKÝ MOMENT DVOJICE SIL

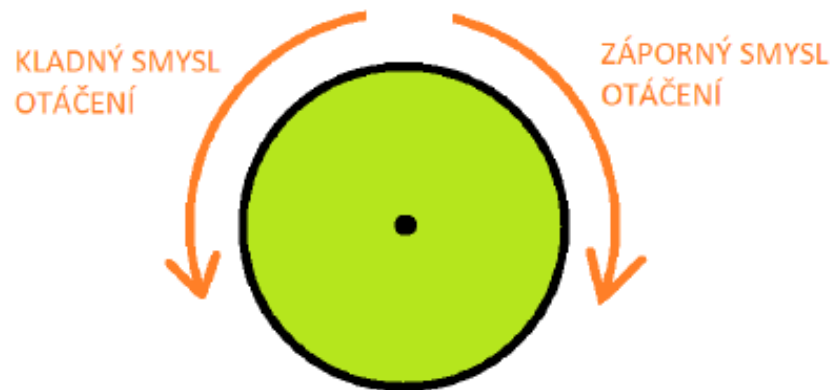
- **dvojice sil**
 - rovnoběžné
 - opačně orientované
 - stejně velké



Moment dvojice sil:

$$M = F \cdot r \quad [\text{kNm}]$$

moment je ke všem bodům v rovině stejný

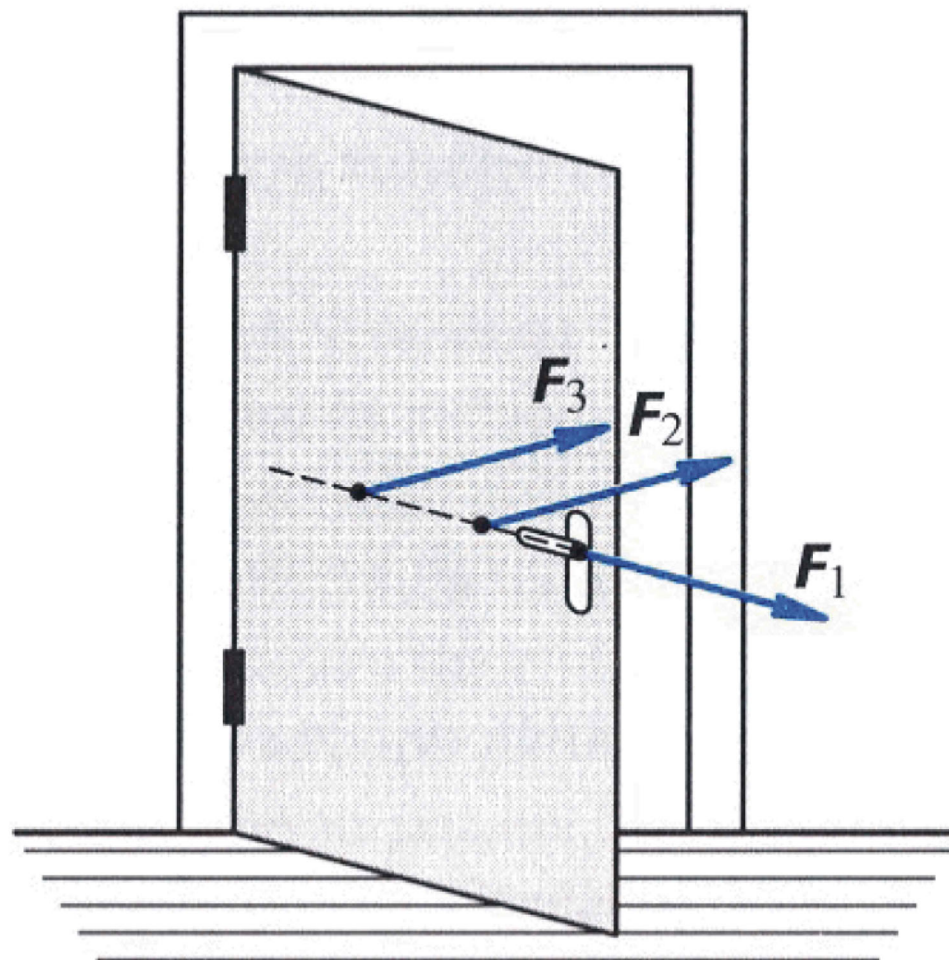


STATICKÝ MOMENT SÍLY K BODU

Uvažujeme, že síla je kolmá k ose otáčení.

Otáčivý účinek závisí na:

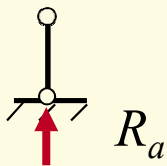
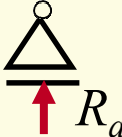
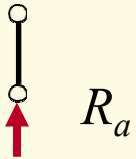
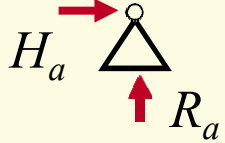
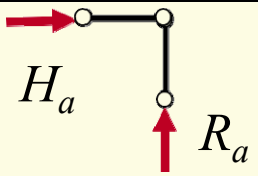
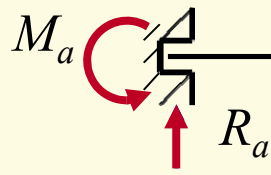
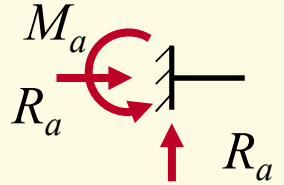
- velikosti síly,
- směru síly,
- poloze působistě síly.



Příklady jednoduchých vazeb tuhého prutu v rovině

Vnější vazby reakcemi odebírají nosníku stupně volnosti.

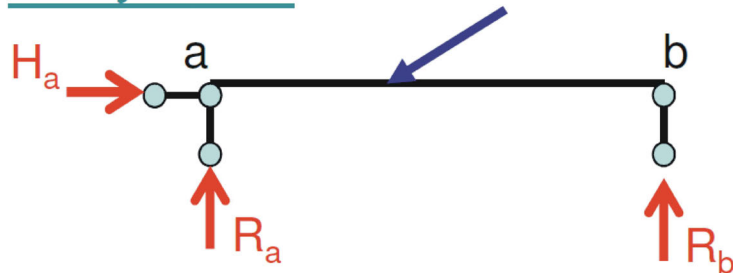
n –násobná vazba ruší objektu **n stupňů volnosti**.

Název vazby	Násobnost vazby	Označení vazby a reakce
Kyvný prut	1	
Posuvná kloubová podpora	1	 nebo 
Pevný kloubová podpora	2	 nebo 
Posuvné vetknutí	2	
Dokonalé vetknutí	3	

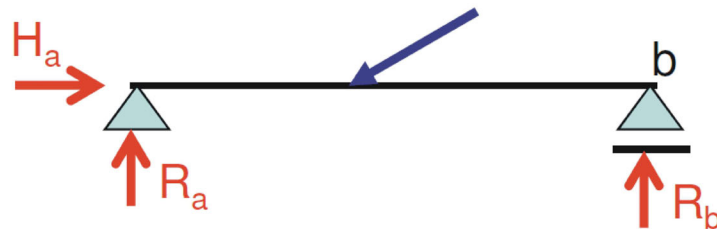
Staticky určité podepření

- staticky určité podepřený nosník – vazbami jsou zrušeny právě jeho 3 stupně volnosti a zatížený nosník je v rovnováze
- vazby (jsou v nich reakce) jsou jednoznačně dány typem podpory a místem, kde podpírají nosník

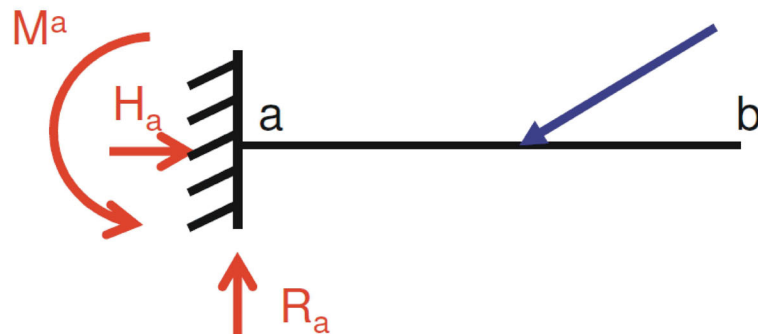
Prostý nosník



Totožné podepření, jiný model podpor:



Konzolový nosník



Výpočet reakcí:

- odhadnout směr reakcí podle zatížení a zakreslit je do obrázku
- sestavit 3 podmínky rovnováhy (v každé rovnici jen jedna neznámá reakce)
- Sestavit u prostého nosníku 4. kontrolní rovnici (u konzoly není většinou zapotřebí)

PODEPŘENÍ, VNĚJŠÍ VAZBY



PODEPŘENÍ, VNĚJŠÍ VAZBY



PODEPŘENÍ, VNĚJŠÍ VAZBY



PODEPŘENÍ, VNĚJŠÍ VAZBY



Úlohy kinematiky v oboru stavební mechaniky:

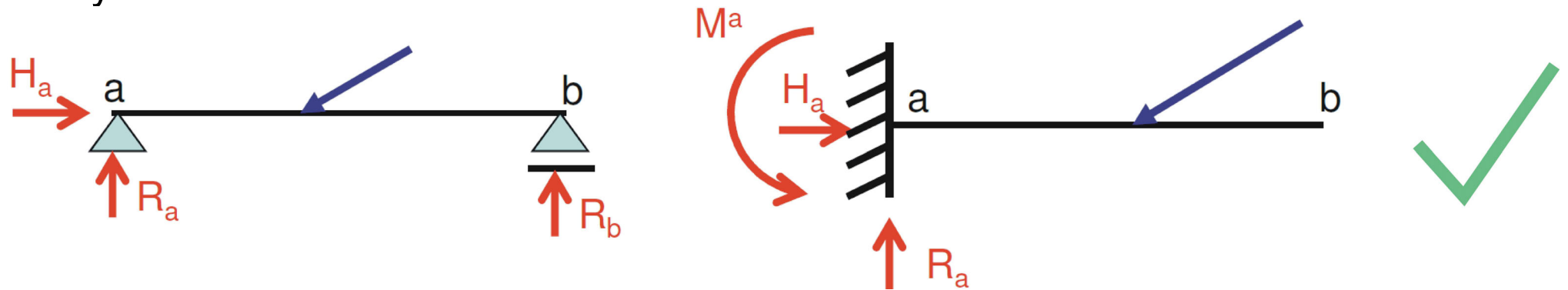
- a) určit nejmenší nezbytně nutný počet vnějších i vnitřních (u soustav) vazeb pro zajištění dokonalé nehybnosti konstrukce
- b) připojit tyto vazby k tělesu (tělesům) konstrukce způsobem zajišťujícím dokonalou nehybnost (nebezpečí nevhodného umístění)

Typy konstrukcí z hlediska kinematiky:

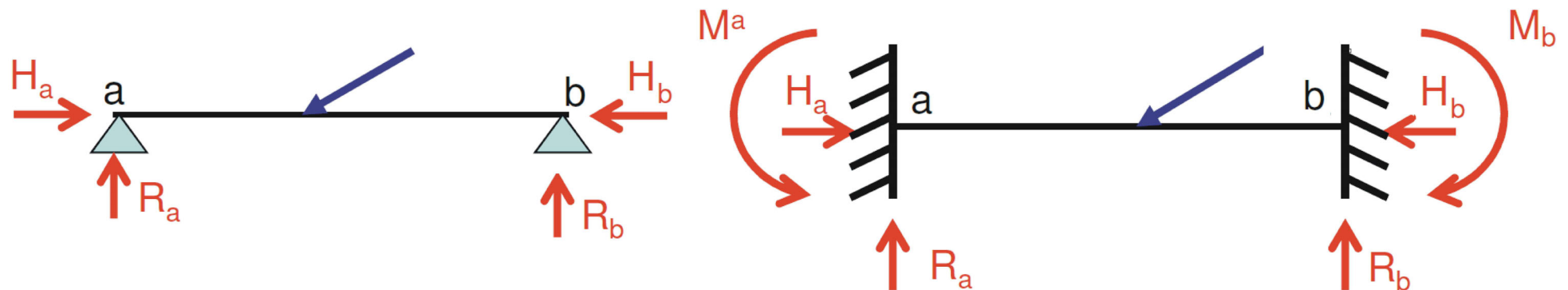
- a) **Kinematicky určité**: konstrukce podepřené nejmenším nezbytně nutným počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, zabývá se obor stavební statika.
- b) **Kinematicky přeúčité**: konstrukce podepřené větším počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, nelze řešit pro dokonale tuhá tělesa, pouze za předpokladu reálně deformovatelných těles, zabývají se obory pružnost a plasticita, statika stavebních konstrukcí.
- c) **Kinematicky neurčité**: málo vazeb, nehybnost konstrukcí nezajištěna

Typy konstrukcí z hlediska kinematiky:

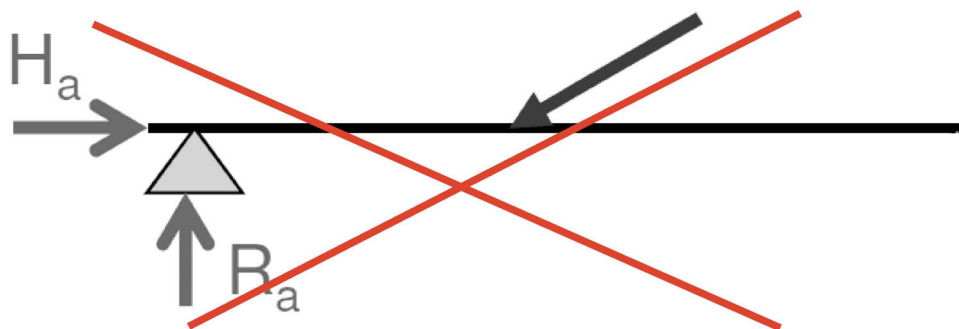
a) **Kinematicky určité**: konstrukce podepřená nejmenším nezbytně nutným počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, zabývá se obor stavební statika.



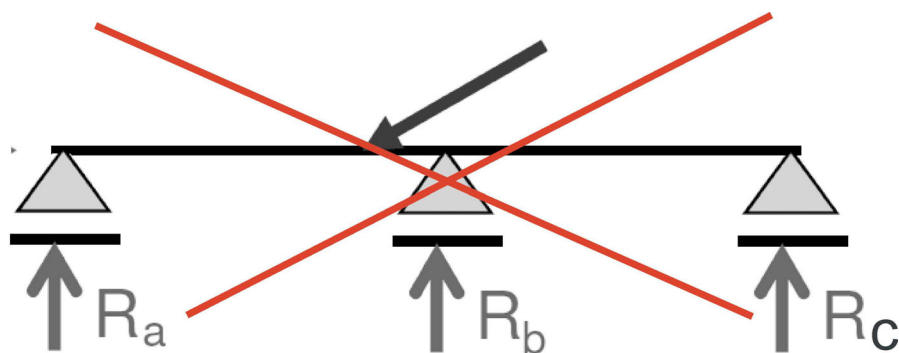
b) **Kinematicky přeúčité**: konstrukce podepřená větším počtem správně umístěných vazeb, nehybnost konstrukcí zajištěna, nelze řešit pro dokonale tuhá tělesa, pouze za předpokladu reálně neformovatelných těles, zabývají se obory pružnost a plasticita, statika stavebních konstrukcí.

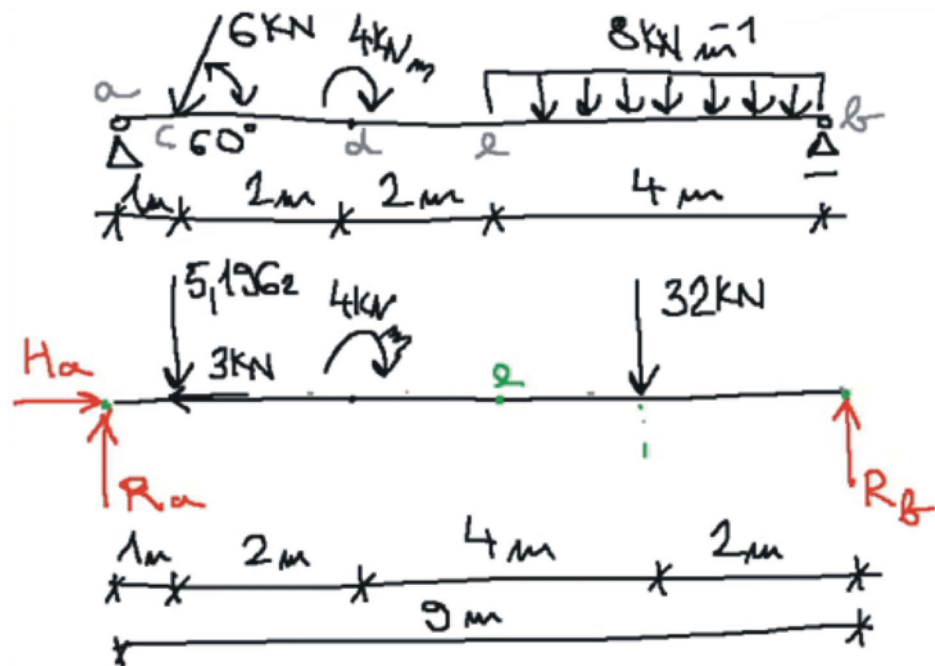


c) **Kinematicky neurčitý:** málo vazeb, nehybnost konstrukcí nezajištěna



d) **Výjimkové případy:** vazeb dost, ale jsou nevhodně uspořádané





$$\sum F_x = 0 \quad H_a - 3 = 0 \Rightarrow H_a = 3 \text{ kN}$$

$$\sum M_a = 0 \quad H_a \cdot 0 + R_a \cdot 0 - 5.196 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4 - 32 \cdot 7 + R_b \cdot 9 = 0$$

$$9 \cdot R_b = 233.196 \Rightarrow R_b = 25.91 \text{ kN}$$

$$\sum M_b = 0 \quad H_a \cdot 0 - R_a \cdot 9 + 5.196 \cdot 8 + 3 \cdot 0 - 4 + 32 \cdot 2 = 0$$

$$101.568 = R_a \cdot 9 \quad R_a = 11.285 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 11.285 - 5.196 - 32 + 25.91 = 0 \quad \checkmark$$

$$\sum M_c = 0$$

$$H_a \cdot 0 - \underline{R_a \cdot 5} + 5.196 \cdot 4 + 3 \cdot 0 - 4 - 32 \cdot 2 + \underline{R_b \cdot 4} = 0$$