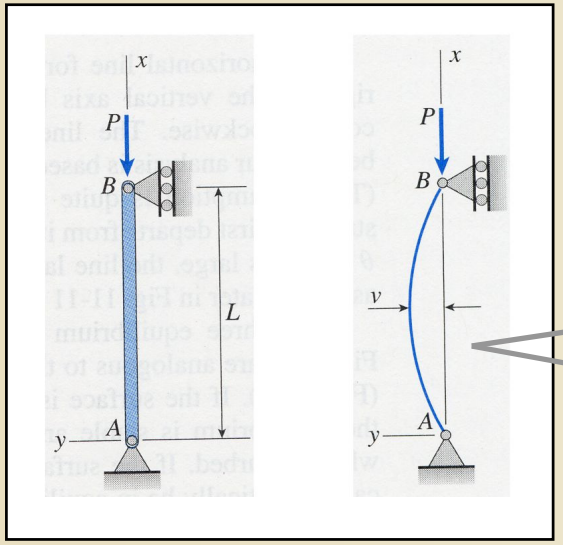
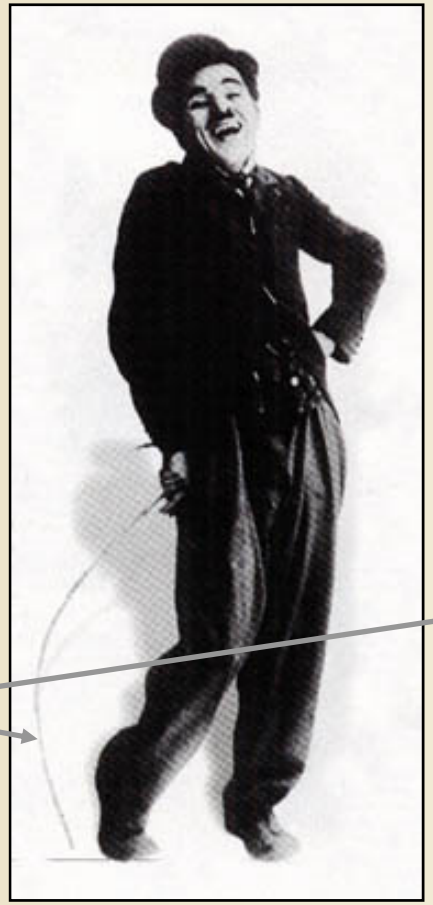
Téma 12
Stabilita a vzpěrný tlak

- Eulerovo řešení stability tlačeného prutu
- Ztráta stability v pružno-plastickém oboru
- Posouzení ocelových konstrukcí na vzpěr

Stabilita

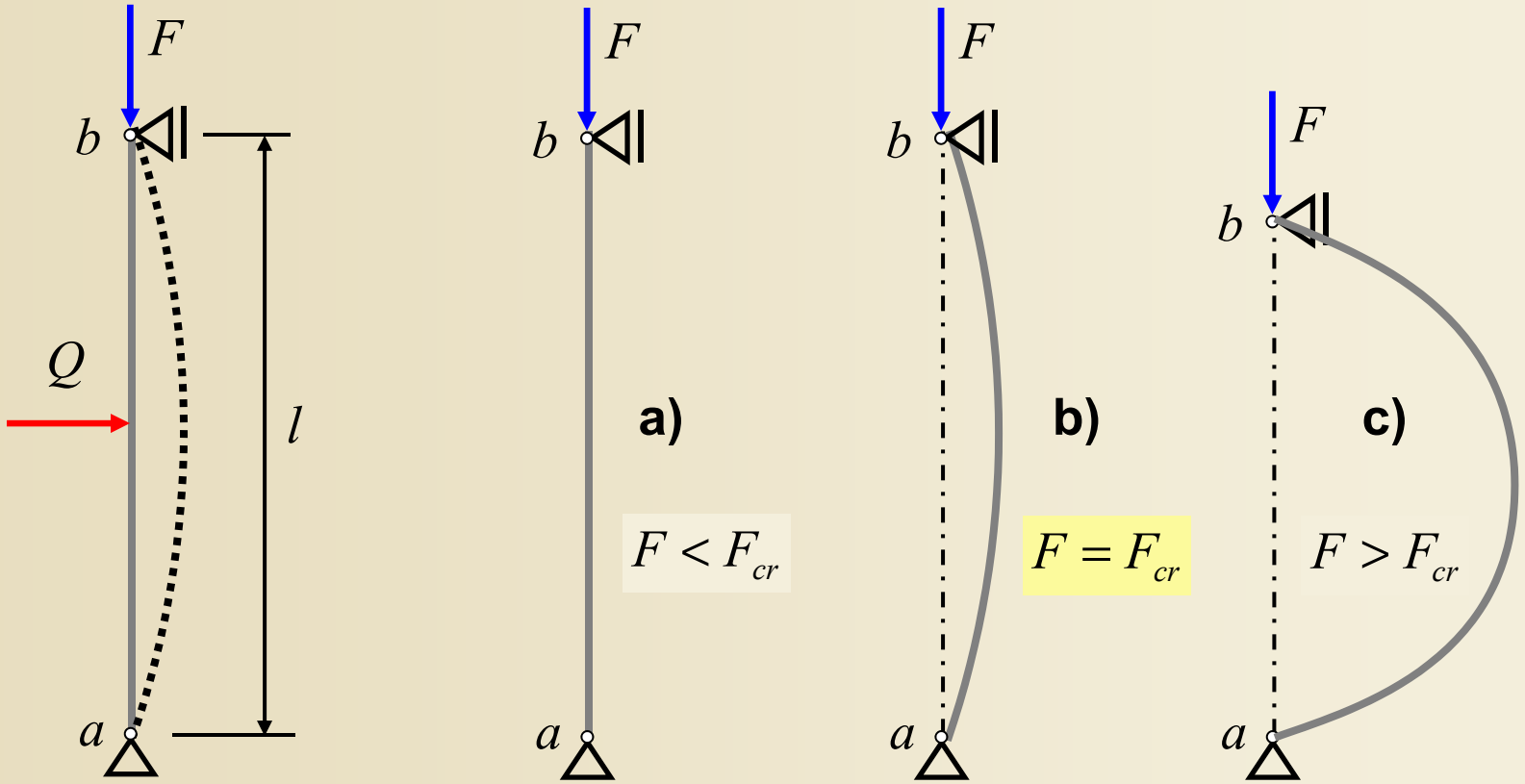
Stabilita - schopnost zachovat nebo obnovit původní rovnovážný stav soustavy bez samovolného narůstání deformací







Stabilní, indiferentní, nestabilní stav



a) **Stabilní stav** – prut se navrátí do své původní polohy

b) **Indiferentní** (mezilehlý případ – čistě teoretický) **stav** – prut zůstane vychýlen, ale deformace již nerostou

c) **Nestabilní stav** – samovolný nárůst deformací

Vzpěrná pevnost, vzpěrný tlak

Štíhlé pruty, namáhané **tlakem** – mohou vybočit ze svého původně přímého tvaru.

Odolnost proti tomuto vybočení – **vzpěrná pevnost**, namáhání **vzpěrným tlakem**.

Jedná se o velmi složitý jev, který je ovlivněn:

- materiálovými vlastnostmi
- geometrickými charakteristikami
- zatížením
- počáteční napjatostí

Nejjednodušší model – ideálně pružný, přímý prut, centricky zatížený tlakovou silou.

Ztráta stability nastane při dosažení **kritické hodnoty tlakové síly**.

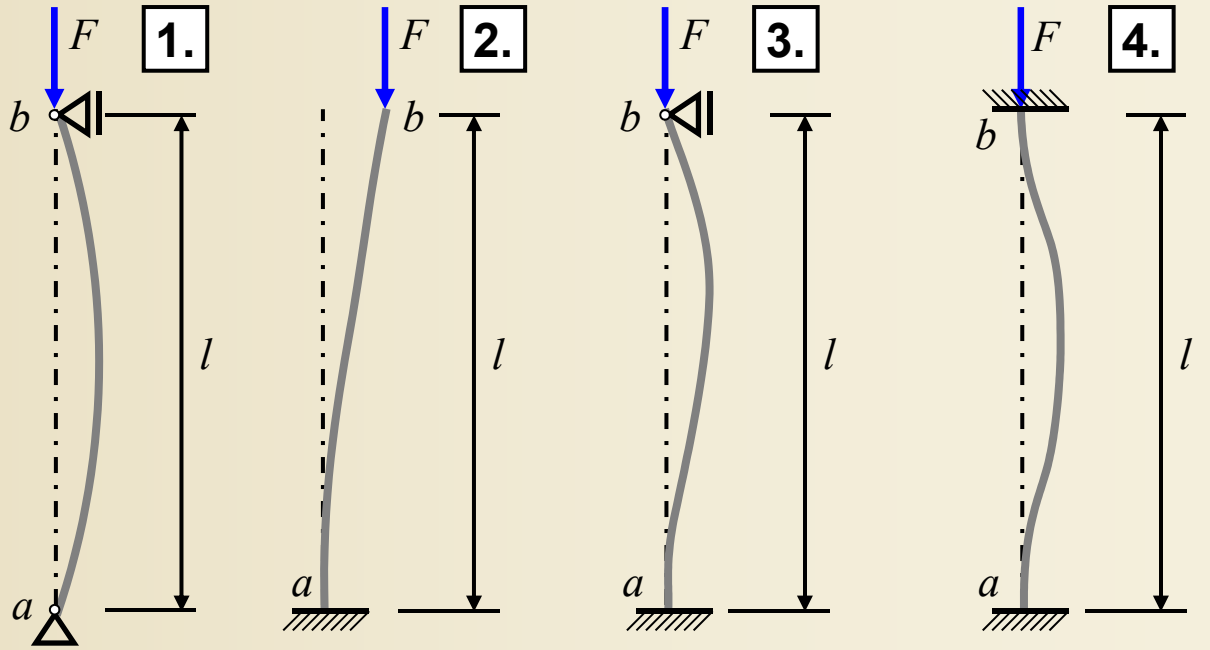
Eulerovo řešení stability přímého prutu

Předpoklady řešení:

- ideálně pružný materiál
- prut je přímý
- tlaková síla působí v ose prutu
- deformace jsou řádově menší než délka prutu
  (teorie malých deformací)
- statické účinky se vyšetřují na zdeformovaném prutu
  (teorie II.řádu)



Leonhard Euler
(1707 - 1783)



1. Prut oboustranně kloubově uložený



$$M = -E.I.w'' \quad \rightarrow \quad w'' = -\frac{M}{E.I}$$ Diferenciální rovnice II.řádu

$$M_{(x)} = F.w_{(x)} \quad \rightarrow \quad w'' = -\frac{F}{E.I}.w$$

Substituce

$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} \quad \rightarrow \quad w'' = -\alpha^2.w \quad \rightarrow \quad w'' + \alpha^2.w = 0$$

Obecné řešení:

$$w'' + \alpha^2.w = 0 \quad \rightarrow \quad w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x)$$

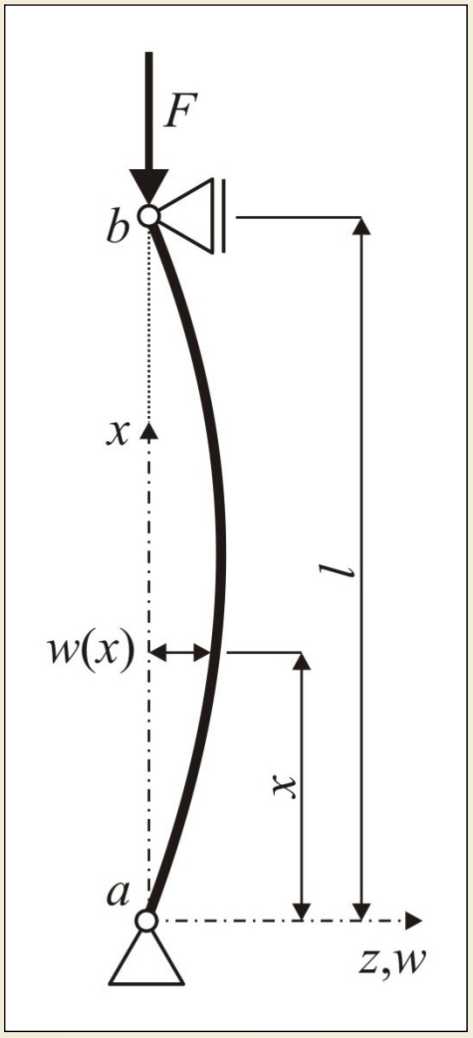
Důkaz:

$$w' = \alpha.c_1.\cos(\alpha.x) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.x)$$

$$w'' = -\alpha^2.c_1.\sin(\alpha.x) - \alpha^2.c_2.\cos(\alpha.x)$$

$$w'' + \alpha^2.w = 0$$

$$\rightarrow \quad -\alpha^2.c_1.\sin(\alpha.x) - \alpha^2.c_2.\cos(\alpha.x) + \alpha^2.[c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x)] = 0$$



1. Prut oboustranně kloubově uložený

Obecné řešení:

$$w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x)$$

Okrajové podmínky:

$w_{(x=0)} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1.\sin(\alpha.0) + c_2.\cos(\alpha.0) = 0$

$0 \qquad\qquad 1$

$\rightarrow \quad c_2 = 0$

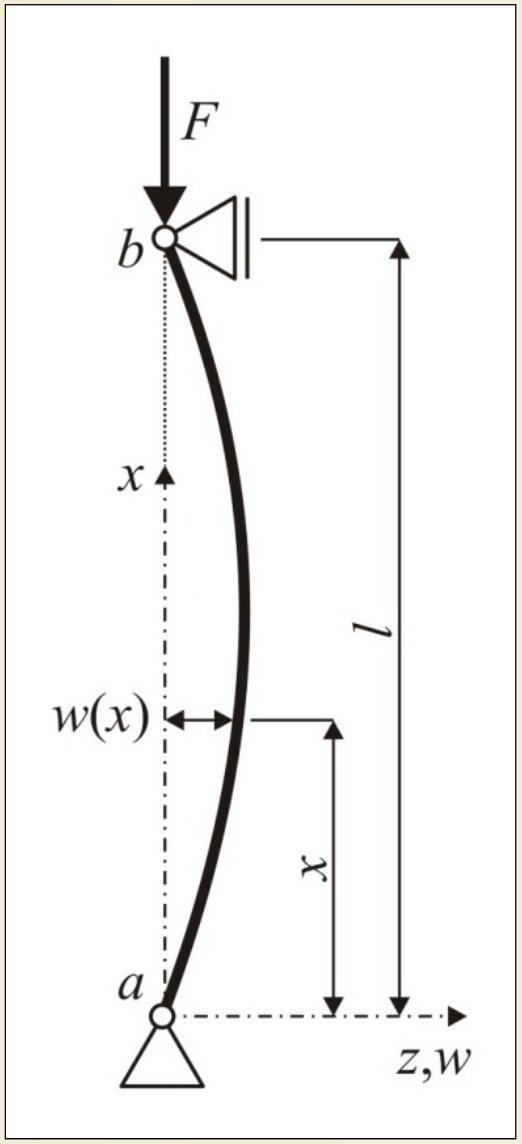
$w_{(x=l)} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1.\sin(\alpha.l) + c_2.\cos(\alpha.l) = 0$

0

Řešení: a) $c_1 = 0$ … nulový průhyb – stabilní případ

b) $\sin(\alpha.l) = 0$ …stabilitní řešení

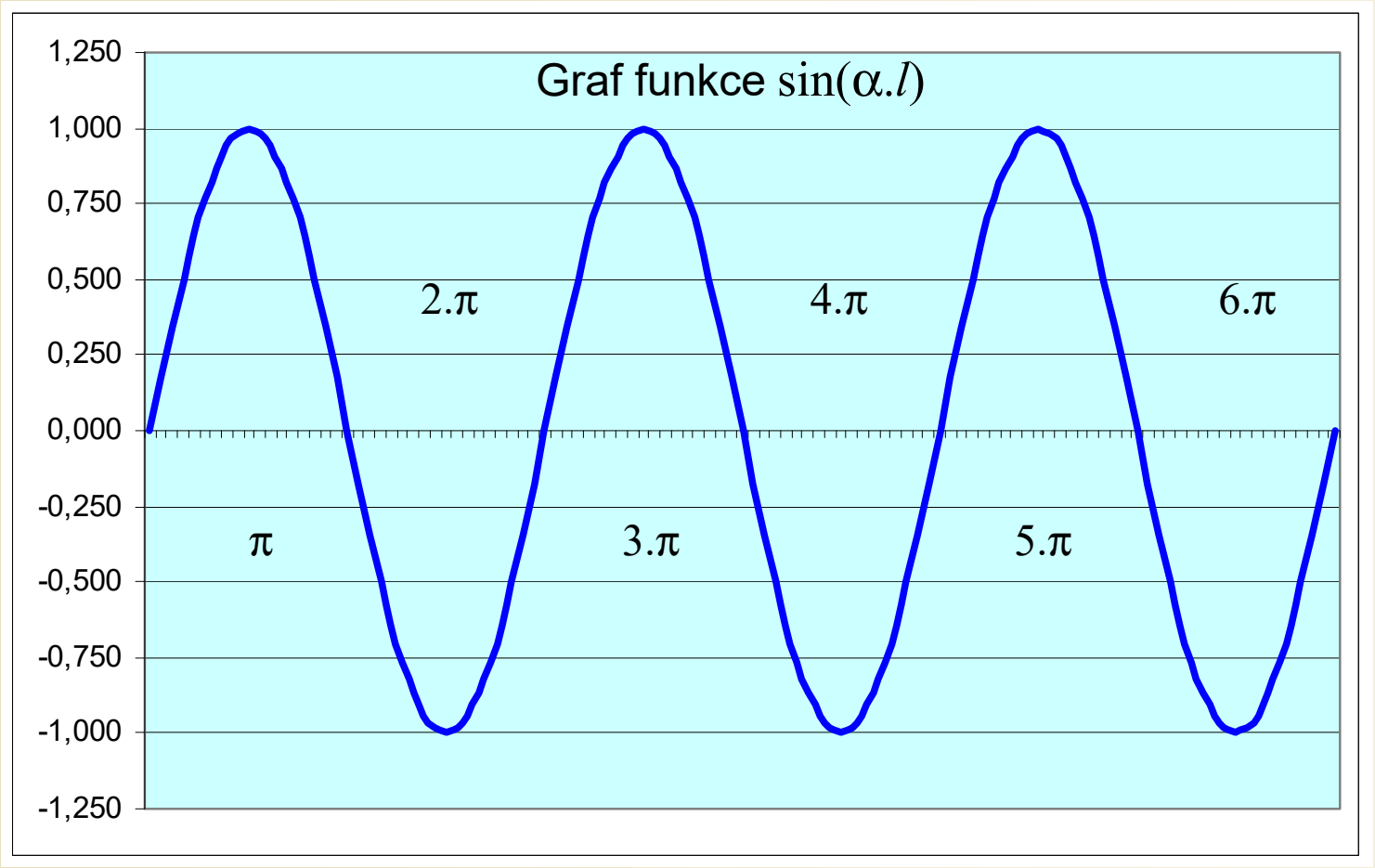
Stabilitní podmínka: $\sin(\alpha.l) = 0$



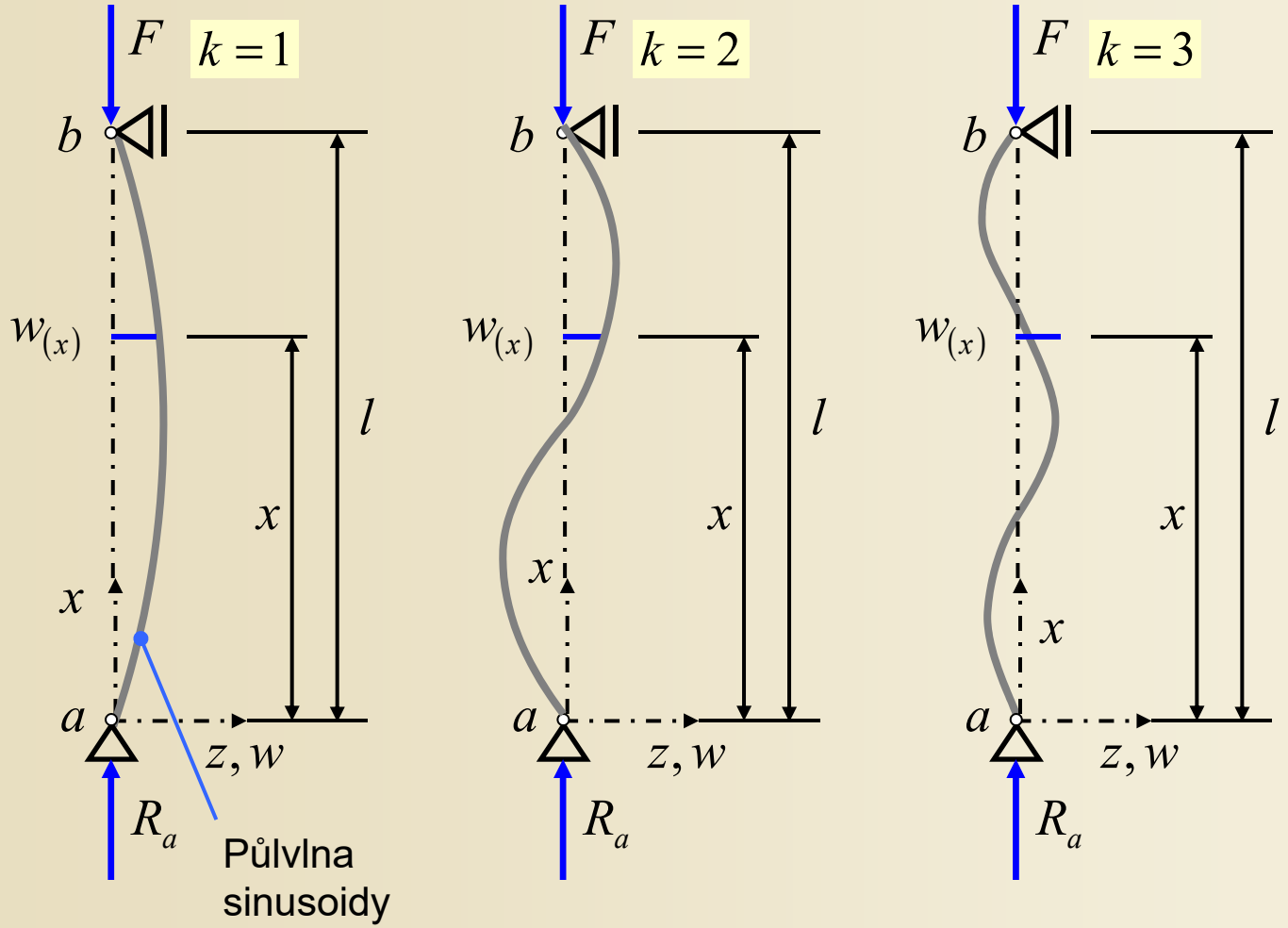
1. Prut oboustranně kloubově uložený

Stabilitní podmínka: $\sin(\alpha.l) = 0$

Řešení: $\alpha.l = k.\pi \quad \ldots k = 1, 2, 3, \ldots \quad \alpha = \frac{k.\pi}{l}$



1. Prut oboustranně kloubově uložený



atd. …

Praktický význam má řešení pouze pro $k = 1$ $\rightarrow$ $\alpha = \frac{\pi}{l}$

1. Prut oboustranně kloubově uložený

Výsledek řešení stabilitní podmínky

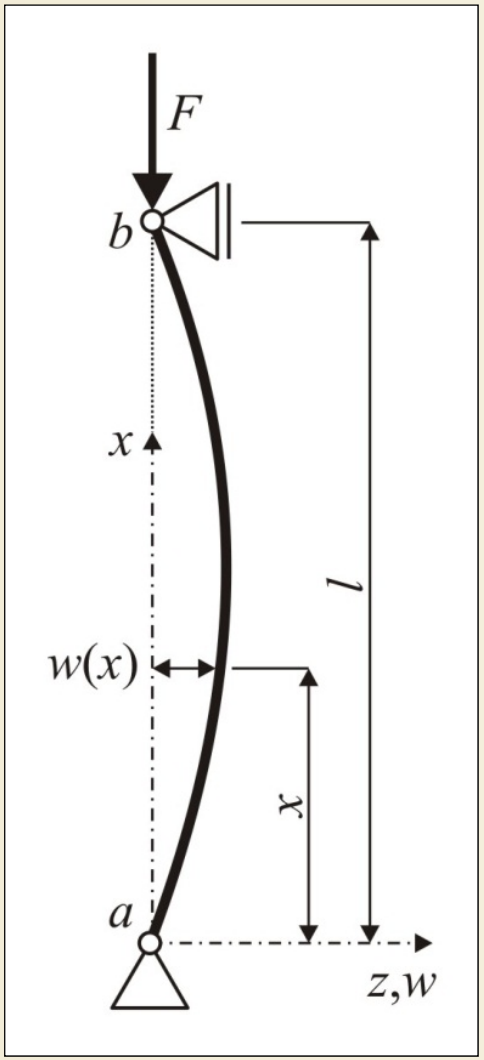
$$\alpha = \frac{\pi}{l}$$

$\rightarrow$ Substituce

$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

Po úpravě: $$F = F_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{l^2}$$ **Eulerova** kritická síla

Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u oboustranně kloubově uloženého prutu ztráta stability.



Poznámky k řešení:

- C_1 je neurčena, řešení odpovídá indiferentnímu stavu
- prut vybočí ve směru menší tuhosti - $I_{\min}$

2. Konzolový prut

$$M = -E.I.w'' \quad \rightarrow \quad w'' = -\frac{M}{E.I}$$ Diferenciální rovnice II.řádu

$$M_{(x)} = -F.\left[\delta - w_{(x)}\right] \quad \rightarrow \quad w'' = \frac{F}{E.I}.(\delta - w)$$

Substituce

$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} \quad \rightarrow \quad w'' = \alpha^2.(\delta - w) \quad \rightarrow \quad w'' + \alpha^2.w = \alpha^2.\delta$$

Obecné řešení: 3 neznámé

$$w'' + \alpha^2.w = \alpha^2.\delta \quad \rightarrow \quad w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x) + \delta$$

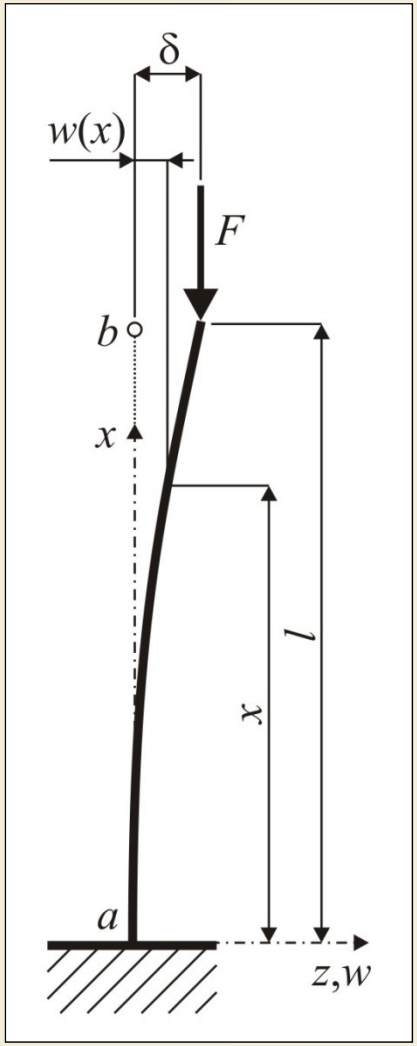
Důkaz:

$$w' = \alpha.c_1.\cos(\alpha.x) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.x)$$

$$w'' = -\alpha^2.c_1.\sin(\alpha.x) - \alpha^2.c_2.\cos(\alpha.x)$$

$$w'' + \alpha^2.w = \alpha^2.\delta$$

$$\rightarrow \quad -\alpha^2.c_1.\sin(\alpha.x) - \alpha^2.c_2.\cos(\alpha.x) + \alpha^2.\left[c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x) + \delta\right] = \alpha^2.\delta$$



2. Konzolový prut

Obecné řešení:

$$w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x) + \delta \qquad w' = \alpha.c_1.\cos(\alpha.x) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.x)$$

Okrajové podmínky:

$$w_{(x=0)} = 0 \quad \rightarrow \quad c_1.\sin(\alpha.0) + c_2.\cos(\alpha.0) + \delta = 0$$

$$c_2 = -\delta$$

$$w'_{(x=0)} = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha.c_1.\cos(\alpha.0) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.0) = 0$$

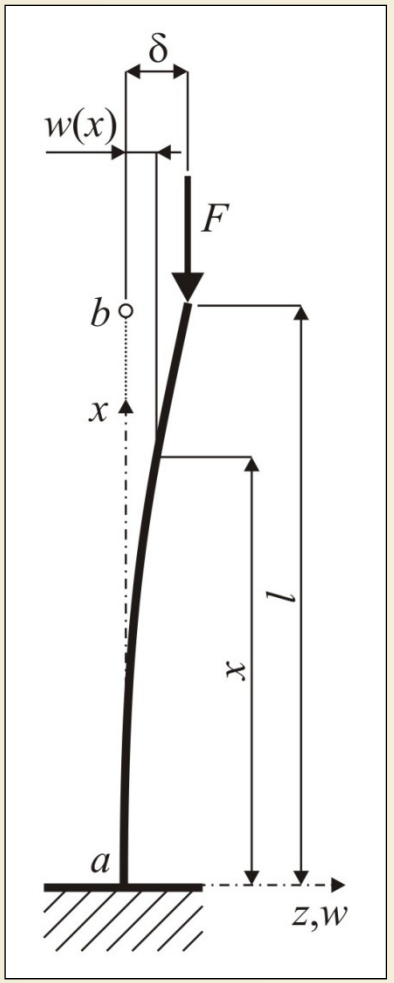
$$c_1 = 0$$

$$w_{(x=l)} = \delta \quad \rightarrow \quad c_1.\sin(\alpha.l) + c_2.\cos(\alpha.l) + \delta = \delta$$

$$c_2.\cos(\alpha.l) = 0$$

Stabilitní podmínka:

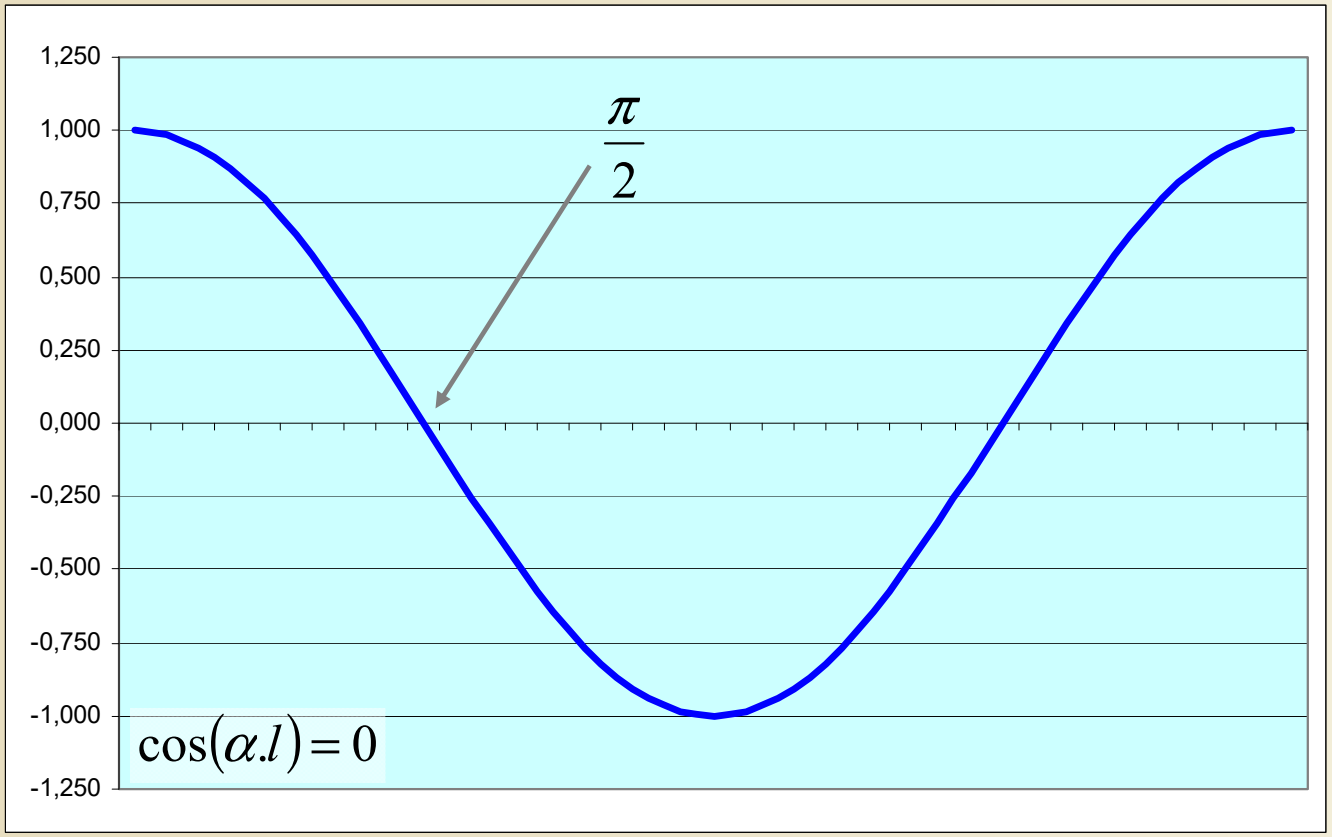
$$\cos(\alpha.l) = 0 \quad \text{…stabilitní řešení}$$

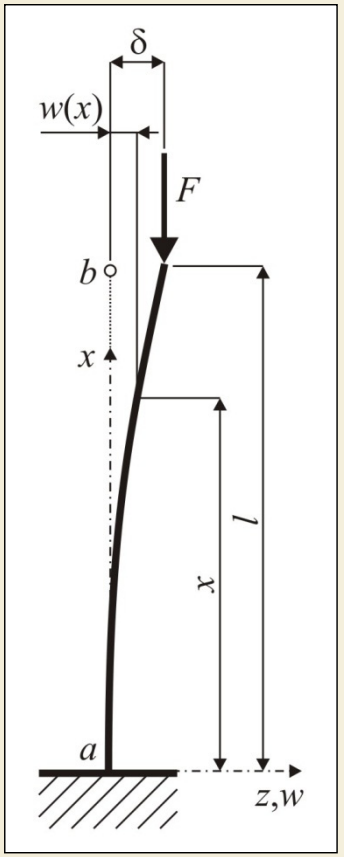


2. Konzolový prut

Stabilitní podmínka: $\cos(\alpha.l)=0$ Řešení: $\alpha.l=\frac{\pi}{2}+k.\pi$ … $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

Praktický význam pouze pro nejnižší kořen $\alpha.l=\frac{\pi}{2}$ $\rightarrow$ $\alpha=\frac{\pi}{2.l}$





2. Konzolový prut

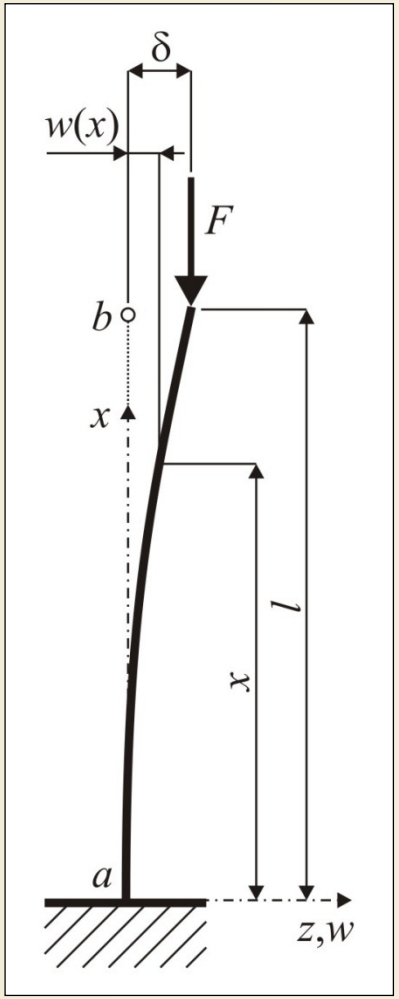
Výsledek řešení stabilitní podmínky

$$\alpha = \frac{\pi}{2.l}$$

$\rightarrow$ Substituce

$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} = \frac{\pi^2}{4.l^2}$$

Po úpravě: $$F = F_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{4.l^2}$$ **Eulerova** kritická síla



Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u konzolového prutu ztráta stability.

Poznámky k řešení:

- C_2 je neurčena, řešení odpovídá indiferentnímu stavu
- Prut vybočí ve směru menší tuhosti – $I_{\min}$
- Kritická síla je vzhledem k oboustranně kloubově podepřenému prutu čtvrtinová

3. Prut jednostranně vetknutý

H … staticky neurčitá veličina

$$M = -E.I.w'' \rightarrow w'' = -\frac{M}{E.I}$$

Diferenciální rovnice II.řádu

$$M_{(x)} = F.w_{(x)} + H.(l-x) \rightarrow w'' = -\frac{F}{E.I}.w - \frac{H}{E.I}.(l-x)$$

Substituce

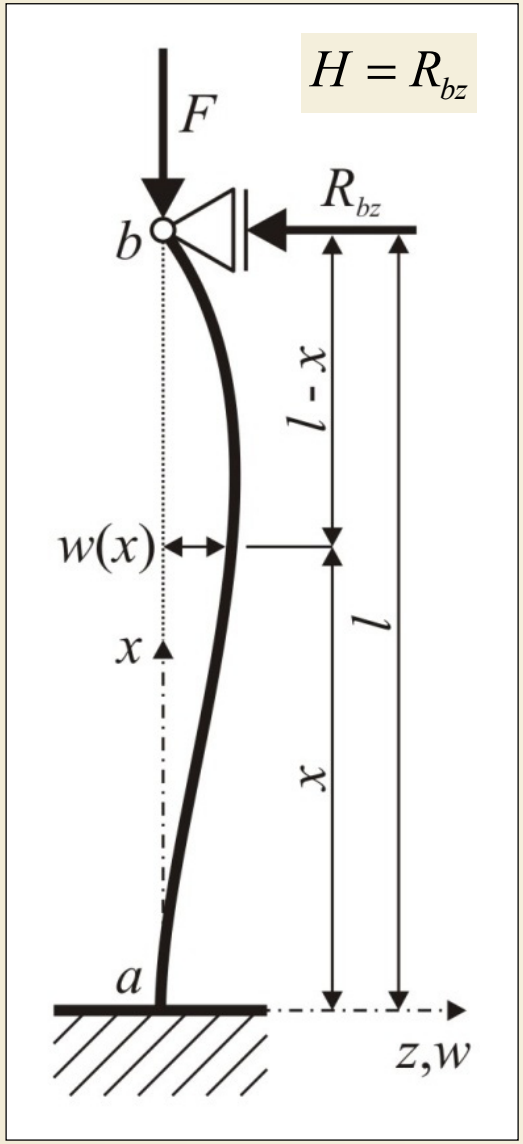
$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} \rightarrow w'' + \alpha^2.w = -\alpha^2.\frac{H}{F}.(l-x)$$

Obecné řešení: 3 neznámé

$$\rightarrow w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x) - \frac{H}{F}.(l-x)$$

$$w' = \alpha.c_1.\cos(\alpha.x) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.x) + \frac{H}{F}$$

$$w'' = -\alpha^2.c_1.\sin(\alpha.x) - \alpha^2.c_2.\cos(\alpha.x)$$



3. Prut jednostranně vetknutý

Obecné řešení:

$$w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x) - \frac{H}{F}.(l - x)$$

$$w' = \alpha.c_1.\cos(\alpha.x) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.x) + \frac{H}{F}$$

$$H = R_{bz}$$

Okrajové podmínky:

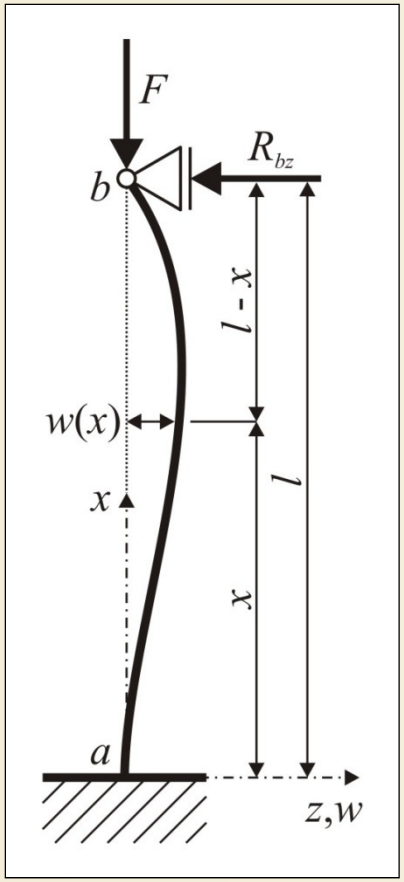
$w_{(x=0)} = 0 \rightarrow c_1.\sin(\alpha.0) + c_2.\cos(\alpha.0) - \frac{H}{F}.(l - 0) = 0 \quad c_2 = \frac{H}{F}.l$

$w'_{(x=0)} = 0 \rightarrow \alpha.c_1.\cos(\alpha.0) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.0) + \frac{H}{F} = 0 \quad c_1 = -\frac{H}{\alpha.F}$

$w_{(x=l)} = 0 \rightarrow c_1.\sin(\alpha.l) + c_2.\cos(\alpha.l) = 0$

$$-\frac{H}{\alpha.F}.\sin(\alpha.l) + \frac{H}{F}.l.\cos(\alpha.l) = 0 \qquad \frac{\sin(\alpha.l)}{\cos(\alpha.l)} = \alpha.l$$

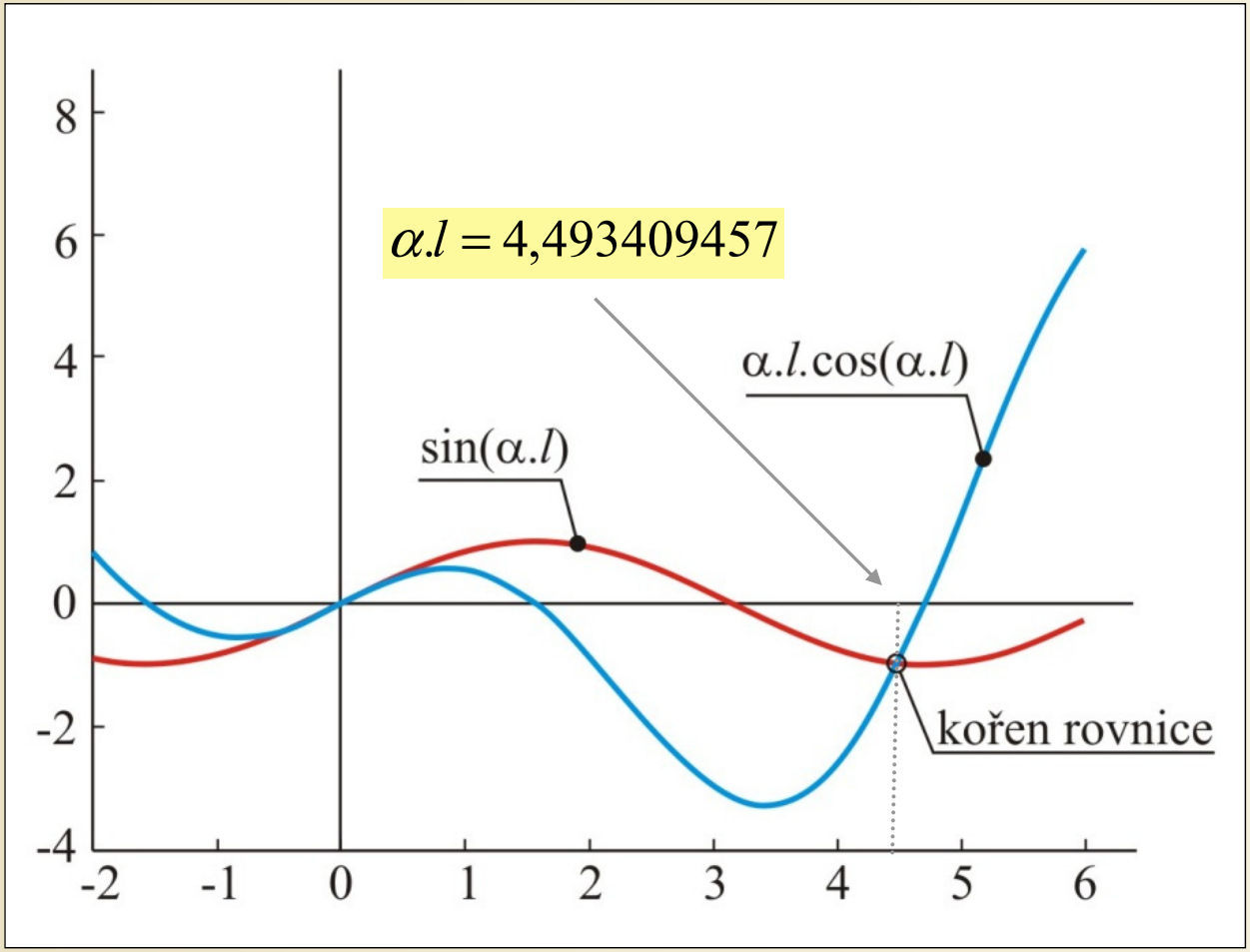
Stabilitní podmínka: $\tan(\alpha.l) = \alpha.l$ …stabilitní řešení



3. Prut jednostranně vetknutý

Stabilitní podmínka: $\tan(\alpha.l) = \alpha.l \rightarrow \frac{\sin(\alpha.l)}{\cos(\alpha.l)} = \alpha.l \rightarrow \alpha.l.\cos(\alpha.l) - \sin(\alpha.l) = 0$

Numerické řešení:



3. Prut jednostranně vetknutý



Stabilitní podmínka: $\tan(\alpha.l) = \alpha.l$

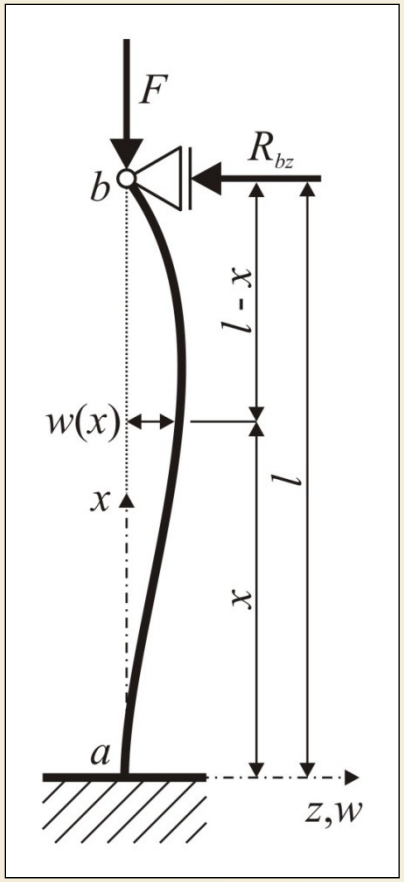
Výsledek řešení stabilitní podmínky

$\alpha.l = 4{,}493409457$ $\rightarrow$

Substituce

$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} = \frac{(4{,}4934...)^2}{l^2}$$

Po úpravě: $F = F_{cr} = (4{,}4934...)^2 . \frac{E.I}{l^2}$ **Eulerova** kritická síla



Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u jednostranně vetknutého prutu ztráta stability.

Poznámky k řešení:

- Prut vybočí ve směru menší tuhosti – $I_{\min}$

4. Prut oboustranně vetknutý

$$M = -E.I.w'' \rightarrow w'' = -\frac{M}{E.I}$$ Diferenciální rovnice II.řádu

$$M_{(x)} = F.w_{(x)} - M_{by} \rightarrow w'' = -\frac{F}{E.I}.w + \frac{M_{by}}{E.I}$$

Substituce

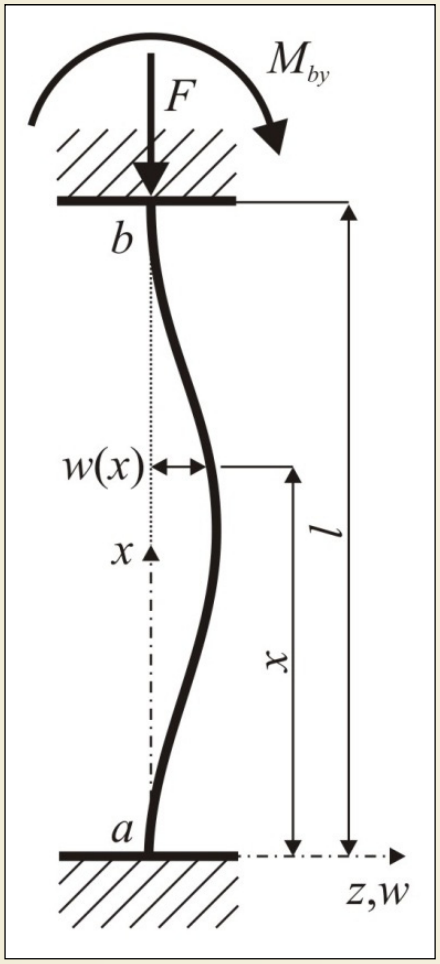
$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} \rightarrow w'' + \alpha^2.w = \alpha^2.\frac{M_{by}}{F}$$

Obecné řešení: 3 neznámé

$$w'' + \alpha^2.w = \alpha^2.\frac{M_{by}}{F} \rightarrow w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x) + \frac{M_{by}}{F}$$

$$w' = \alpha.c_1.\cos(\alpha.x) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.x)$$

$$w'' = -\alpha^2.c_1.\sin(\alpha.x) - \alpha^2.c_2.\cos(\alpha.x)$$



4. Prut oboustranně vetknutý

Obecné řešení: $w = c_1.\sin(\alpha.x) + c_2.\cos(\alpha.x) + \frac{M_{by}}{F}$

$w' = \alpha.c_1.\cos(\alpha.x) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.x)$

Okrajové podmínky:

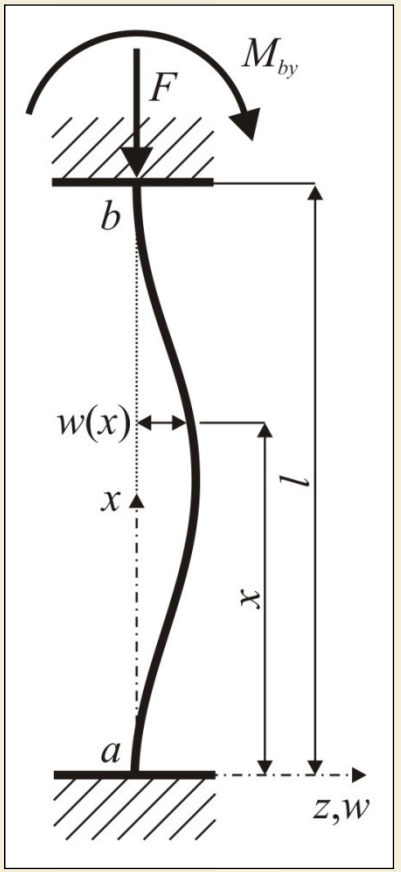
$w_{(x=0)} = 0 \rightarrow c_1.\sin(\alpha.0) + c_2.\cos(\alpha.0) + \frac{M_{by}}{F} = 0 \rightarrow c_2 = -\frac{M_{by}}{F}$

$w'_{(x=0)} = 0 \rightarrow \alpha.c_1.\cos(\alpha.0) - \alpha.c_2.\sin(\alpha.0) = 0 \rightarrow c_1 = 0$

$w_{(x=l)} = 0 \rightarrow c_1.\sin(\alpha.l) + c_2.\cos(\alpha.l) + \frac{M_{by}}{F} = 0$

$\frac{M_{by}}{F}.[1 - \cos(\alpha.l)] = 0 \rightarrow \cos(\alpha.l) = 1$ … Stabilitní podmínka

$w'_{(x=l)} = 0 \rightarrow \alpha.0.\cos(\alpha.l) - \alpha.\frac{M_{by}}{F}.\sin(\alpha.l) = 0 \rightarrow \sin(\alpha.l) = 0$



4. Prut oboustranně vetknutý

Stabilitní podmínka: $\cos(\alpha.l)=1$

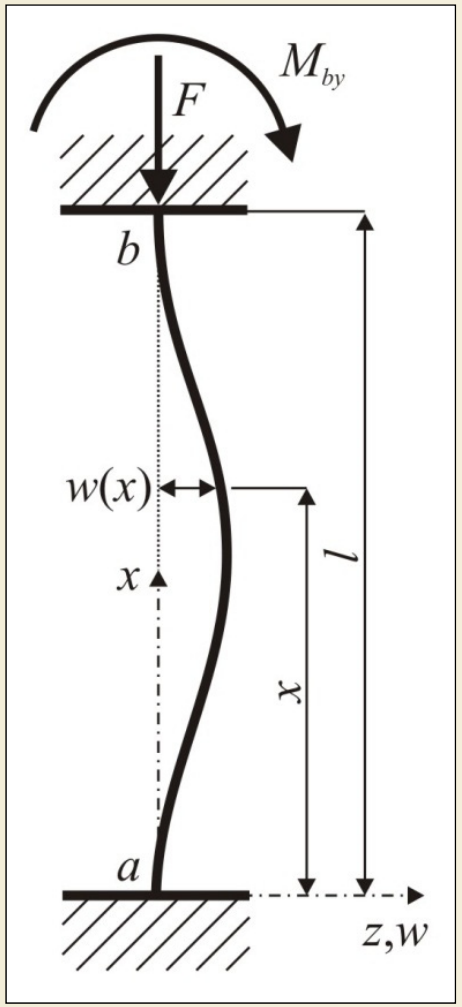
Výsledek řešení stabilitní podmínky

$\alpha.l = 2.\pi \quad \rightarrow$

Substituce

$$\alpha^2 = \frac{F}{E.I} = \frac{(2.\pi)^2}{l^2}$$

Po úpravě: $F = F_{cr} = (2.\pi)^2 . \frac{E.I}{l^2}$ **Eulerova** kritická síla

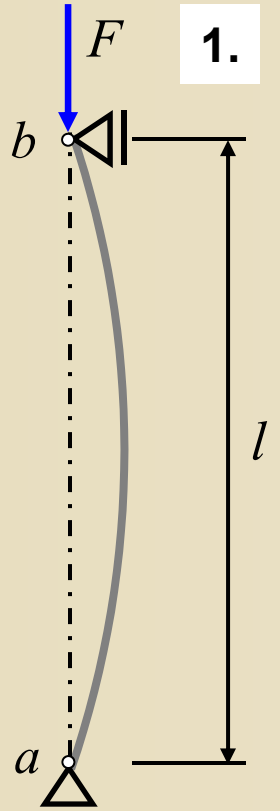


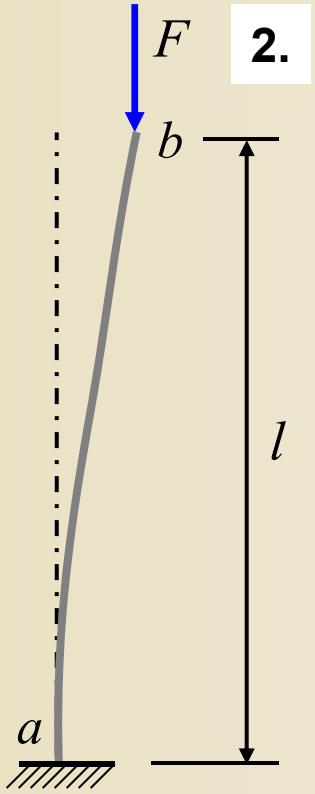
Při dosažení této hodnoty tlakové kritické síly nastane u oboustranně vetknutého prutu ztráta stability.

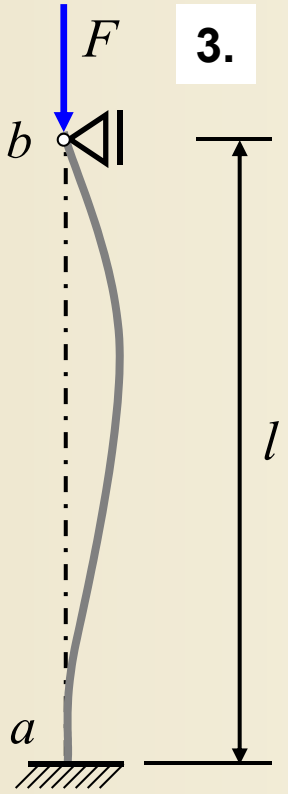
Poznámky k řešení:

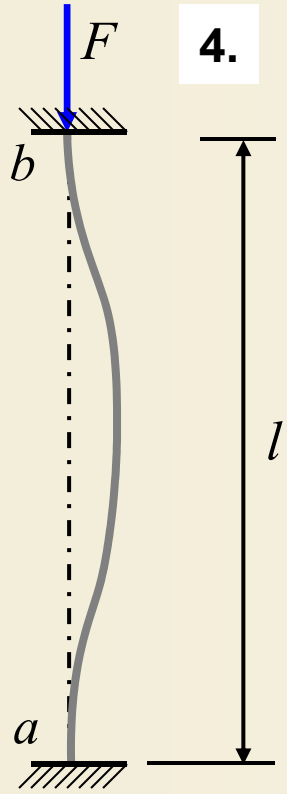
- Prut vybočí ve směru menší tuhosti – $I_{\min}$
- Kritická síla je vzhledem k oboustranně kloubově podepřenému prutu čtyřnásobná

Shrnutí Eulerova řešení stability přímého prutu









$$F_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{l^2}$$

$$F_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{4.l^2}$$

$$F_{cr} = (4{,}4934...)^2 . \frac{E.I}{l^2}$$

$$F_{cr} = (2.\pi)^2 . \frac{E.I}{l^2}$$

Lze sjednotit do tvaru:

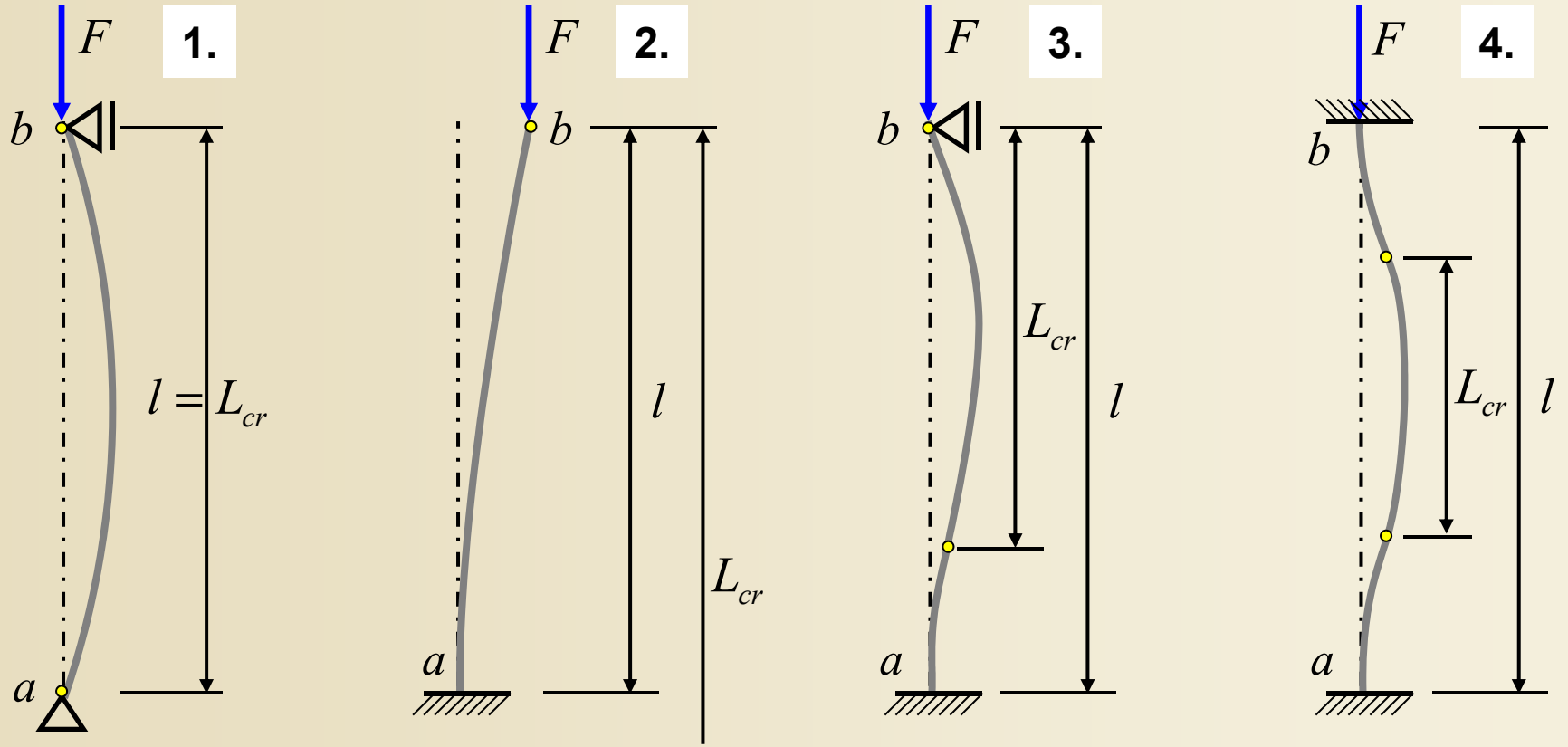
$$F_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{L_{cr}^2}$$

$$L_{cr} = \beta . l$$

L_{cr} …vzpěrná délka

β …součinitel vzpěrné délky

Shrnutí Eulerova řešení stability přímého prutu



$\beta = 1$ $\beta = 2$ $\beta = 0{,}6991571312 \approx 0{,}7$ $\beta = 0{,}5$

$$F_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{(\beta.l)^2}$$

$$L_{cr} = \beta.l$$

L_{cr} … **vzpěrná délka** je rovna délce sinusové půlvlny ohybové čáry po vybočení – vzdálenost inflexních bodů.

Sloupy vstupního traktu, Tesco, Ostrava



Sloupy vstupního traktu, Tesco, Ostrava



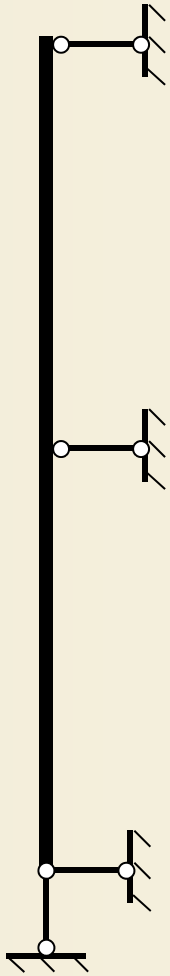
Sloup nároží, Aula VŠB-TU Ostrava



Sloup nároží, Aula VŠB-TU Ostrava







Pavilon V, výstaviště, Brno



Pavilon V, výstaviště, Brno

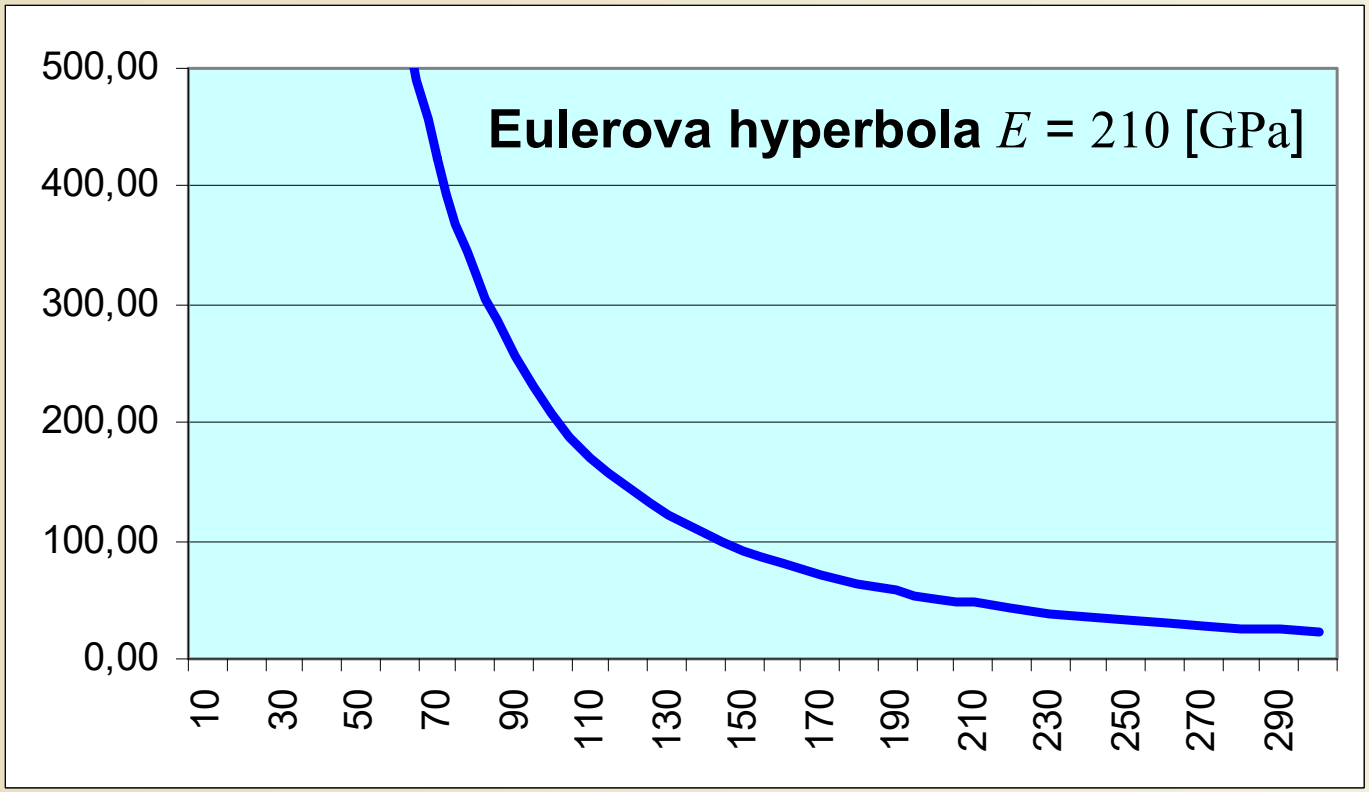


Kritické napětí, Eulerova hyperbola

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} \quad \rightarrow \quad F_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{L_{cr}^{\ 2}} \quad \rightarrow \quad \sigma_{cr} = \pi^2 . \frac{E.I}{A.L_{cr}^2} = \pi^2 . \frac{E.i^2}{L_{cr}^2} = \pi^2 . \frac{E}{\lambda^2}$$

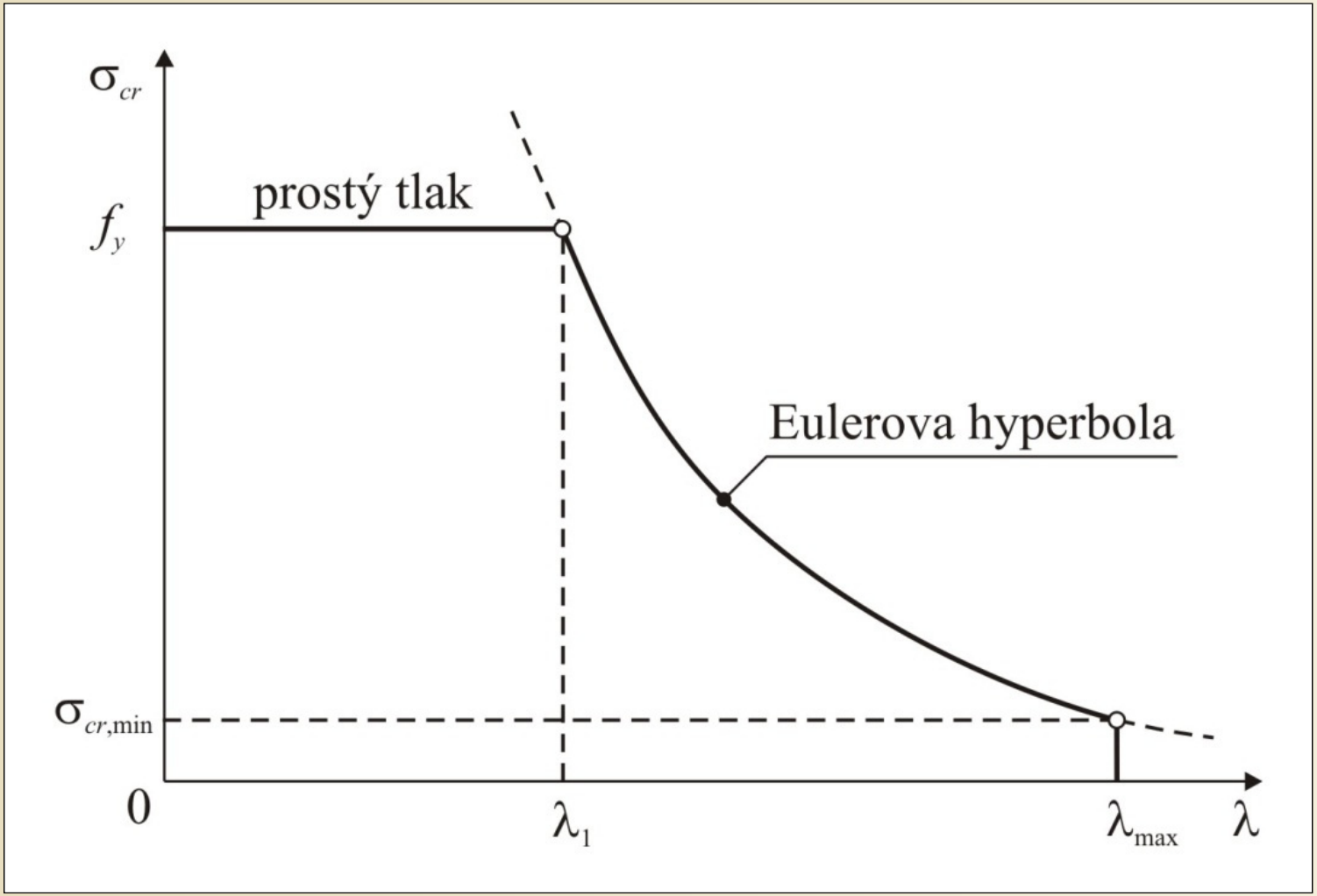
$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ … poloměr setrvačnosti [m]

$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$ … štíhlost prutu [-]



Eulerova hyperbola v pružném oboru

Pro $\sigma_{cr} > f_y$ rozhoduje únosnost v prostém tlaku $\lambda_{\max} \approx 290$



Reálné chování nosného prvku v tlaku

Chování tlačeného prutu v pružnoplastickém oboru:

$$\sigma_{cr} = \pi^2 . \frac{E}{\lambda^2} = f_y \rightarrow \lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

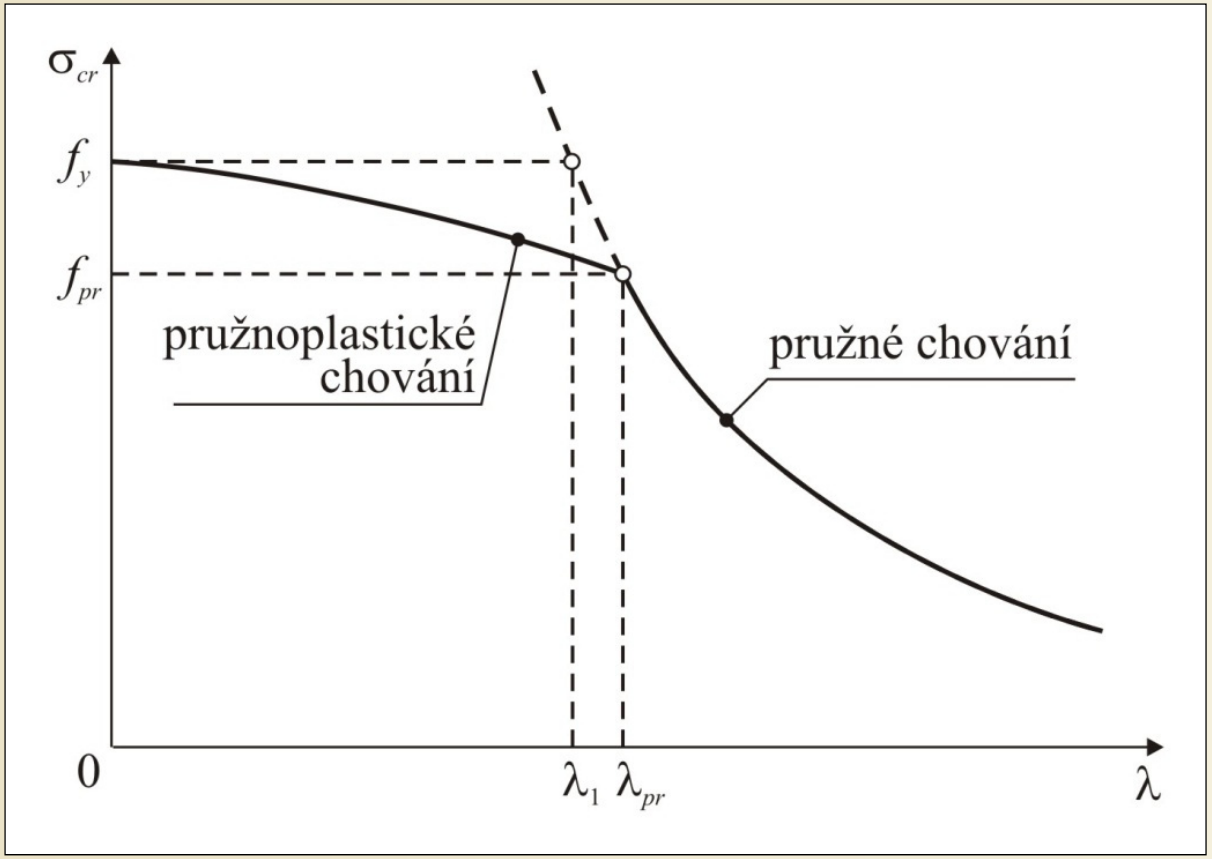
$$\sigma_{cr} = \pi^2 . \frac{E}{\lambda^2} = f_{pr} \rightarrow \lambda_{pr} = \pi \sqrt{\frac{E}{f_{pr}}}$$

Pro $f_y = 235$ MPa
a $E = 210000$ MPa:

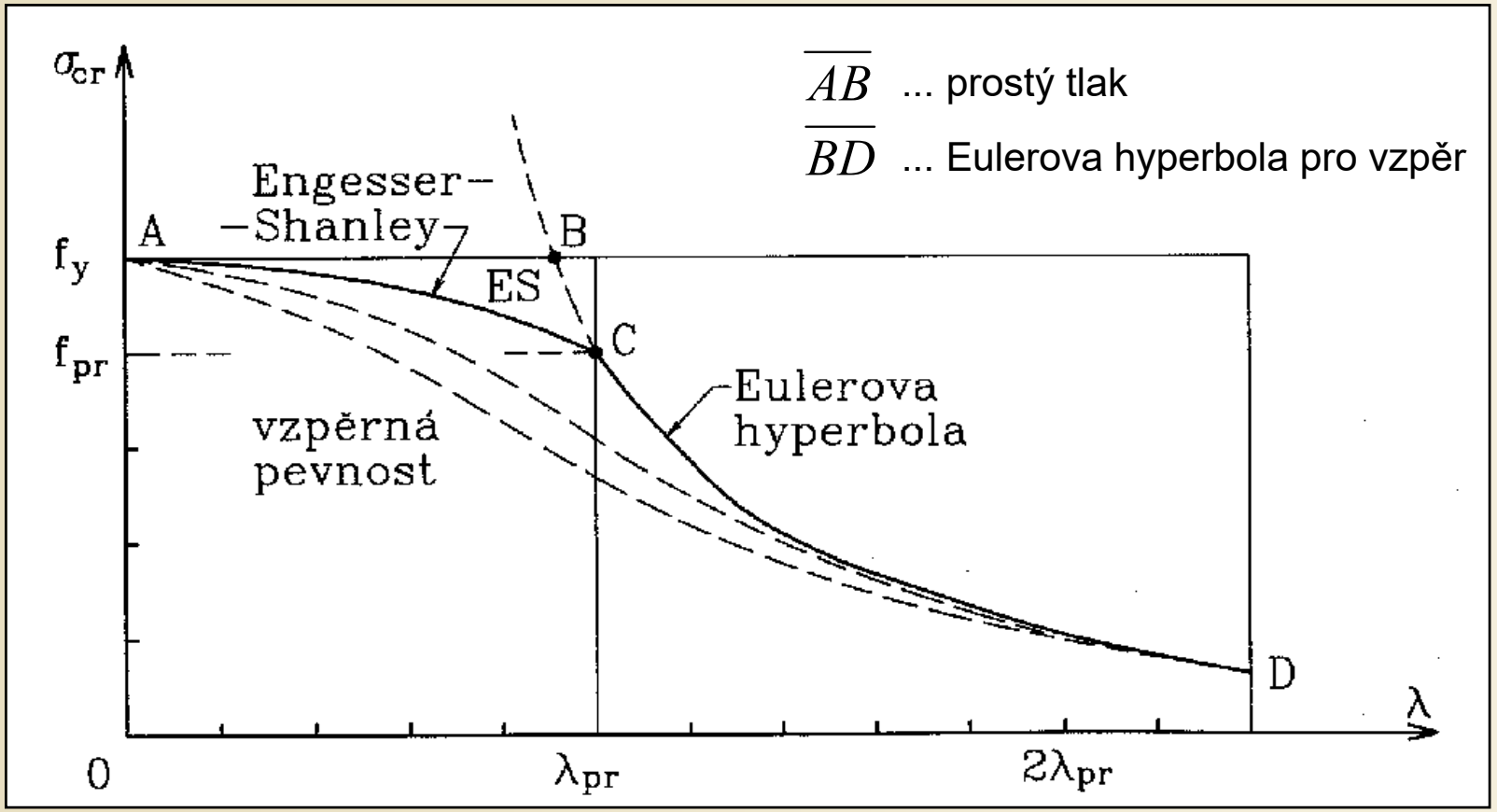
$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{210000}{235}} \cong 93{,}91$$

Pro $f_{pr} = 190$ MPa
a $E = 210000$ MPa:

$$\lambda_{pr} = \pi \sqrt{\frac{210000}{190}} \cong 104{,}44$$



Reálné chování nosného prvku v tlaku



Křivka $\overline{AC}$: Engesser-Shanleyovo kritické napětí:

$$\sigma_{cr} = \frac{f_y}{1 + \left(\frac{f_y}{f_{pr}} - 1\right).\left(\frac{\lambda}{\lambda_{pr}}\right)^2}$$

$$\lambda_{pr} = \pi.\sqrt{\frac{E}{f_{pr}}}$$

f_{pr} ... napětí na mezi úměrnosti

Posouzení ocelových prutů na vzpěr

$$N_{Sd} \leq N_{Rd} = \chi . A . \frac{f_{yk}}{\gamma_{M0}}$$

χ ... součinitel vzpěrnosti – z tabulky normy

λ	a	b	c	λ	a	b	c	λ	a	b	c
0	1,00	1,00	1,00	100	0,62	0,56	0,50	200	0,20	0,19	0,18
10	1,00	1,00	1,00	110	0,55	0,49	0,45	210	0,18	0,17	0,16
20	1,00	1,00	0,99	120	0,48	0,44	0,40	220	0,17	0,16	0,15
30	0,97	0,96	0,94	130	0,43	0,39	0,36	230	0,15	0,15	0,14
40	0,95	0,92	0,88	140	0,38	0,35	0,32	240	0,14	0,13	0,13
50	0,91	0,87	0,89	150	0,33	0,31	0,28	250	0,13	0,12	0,12
60	0,87	0,82	0,76	160	0,30	0,28	0,26	260	0,12	0,12	0,11
70	0,83	0,76	0,70	170	0,27	0,25	0,23	270	0,11	0,11	0,10
80	0,76	0,69	0,63	180	0,24	0,23	0,21	280	0,10	0,10	0,10
90	0,69	0,62	0,56	190	0,22	0,21	0,19	290	0,10	0,09	0,09

a - duté průřezy válcované za tepla, válcované I k ose *y* při $h/b > 1,2$
b - svařované truhlíkové průřezy, svař. I k ose *y*, válc. I k ose *z* aj.
c - U, L, T, obdílníkové, kruhové, svařované I profily k ose *z* (svislé) při $t_f < 40$ mm

Okruhy problémů k ústní části zkoušky

1. Eulerovo řešení stability tlačeného prutu, kritické břemeno, vzpěrná délka
2. Eulerovo řešení stability tlačeného prutu, štíhlost prutu, kritické napětí, Euerova hyperbola
3. Ztráta stability v pružno-plastickém oboru, vztahy mezi štíhlostí a kritickým napětím
4. Posudek ocelových prutů na vzpěr