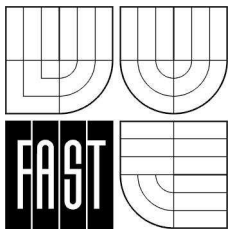
**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**
**FAKULTA STAVEBNÍ**

**PROF. ING. JINDŘICH MELCHER,DR.SC.**
**ING. MARCELA KARMAZÍNOVÁ, CSC.**
**ING. MIROSLAV BAJER,CSC.**
**ING. KAREL SÝKORA**

# PRVKY KOVOVÝCH KONSTRUKCÍ

MODUL BO02-M05

## PRUTY NAMÁHANÉ KROUCENÍM




**STUDIJNÍ OPORY**
**PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA**

Jazyková korektura nebyla provedena, za jazykovou stránku odpovídá autor.

© *Prof. Ing. Jindřich Melcher, DrSc., Ing. Karel Sýkora*

# OBSAH

**1 Úvod ..... 4**
1.1 Cíle ..... 4
1.2 Požadované znalosti ..... 5
1.3 Doba potřebná ke studiu ..... 5
1.4 Klíčová slova ..... 5
**2 Geometrické a statické průřezové charakteristiky ..... 6**
2.1 Úvod ..... 6
2.2 Souřadnice bodů střednice ..... 6
2.3 Hlavní body průřezu ..... 7
2.4 Průřezové veličiny ..... 8
**3 Prosté kroucení ..... 9**
3.1 Předpoklady vzniku prostého kroucení ..... 9
3.2 Pruty otevřeného průřezu ..... 10
3.3 Pruty uzavřeného průřezu ..... 11
**4 Vázané a složené kroucení ..... 12**
4.1 Vlasovovo řešení ..... 12
4.2 Analogie problému kroucení s ohybem a přibližné řešení ..... 18
**5 Příklad ..... 22**
**6 Kontrolní otázky ..... 31**
**7 Literatura ..... 32**

# 1 Úvod



Kroucení má nepříznivý vliv z hlediska napětí a přetvoření především u příčně zatížených prutů s tenkostěnnými otevřenými průřezy. Vliv kroucení je možné omezovat vhodnou konstrukční úpravou a řešením a skladbou nosného systému, které mohou kroucení jednotlivých prvků eliminovat. Když není možné účinek kroucení vyloučit je třeba při působení konstrukce vycházet z teorie kroucení tenkostěnných prutů, jejíž základy byly zpracované v [5].

Tenkostěnným prutem se v teorii konstrukcí rozumí útvar prizmatického, nebo válcového tvaru, jehož charakteristické rozměry příčného řezu ( tloušťka stěny $t$, výška, resp. šířka průřezu $h$ ) a délka prutu $L$ tvoří posloupnost veličin řádově odlišné velikosti. Nosný systém pokládáme za tenkostěnný prut, pokud je splněný vztah $t:h:L \le 1:10:100$.

Uspořádání příčného řezu tenkostěnného prutu je charakterizované střednicí průřezu ( spojnice bodů dělících tloušťku stěn ). Podle tvaru střednice se rozlišují tenkostěnné pruty otevřeného průřezu a uzavřeného průřezu. Zvláštní kategorií prutů otevřeného průřezu jsou svazkové průřezy se střednicí tvořící svazek úseček protínající se v jednom bodě ( úhelník, T profil apod. ). Uzavřené profily se dělí podle počtu buněk uzavřených stěnami průřezu na jednosvazkové a vícesvazkové. Tenkostěnným prutem může být dílčí prvek konstrukce i nosný systém jako celek ( trámový most, duté klapky vodních staveb atd.)

## 1.1 Cíle



Cílem tohoto modulu je :

- definovat hlavní body průřezu, výsečové souřadnice a výsečové statické veličiny
- objasnit, za jakých podmínek vzniká kroucení
- definovat „prosté kroucení“ a „složené (vázané) kroucení“
- naznačit chování prutu při prostém a složeném (vázaném) kroucení
- určit velikost a průběh napětí v průřezu krouceného prutu
- vysvětlit výhodu analogie ohybu s kroucením

## 1.2 Požadované znalosti



Ke zvládnutí a pochopení následujícího učiva jsou *třeba znalosti* **stavební mechaniky a pružnosti a pevnosti,** mechanických vlastností materiálů, používaných na stavební konstrukce. Předpokládá se prostorová představivost.

## 1.3 Doba potřebná ke studiu



Celková optimální doba pro studium je velmi individuální a závisí zejména na intenzívnosti studia a soustředěnosti čtenáře na obsah textu. **.**

Celková doba pro prostudování modulu tedy činí cca 6 až 9 hodin, pokud budete procházet i příklad, pak se doba prodlouží o jednu až dvě hodiny.

## 1.4 Klíčová slova




Tenkostěnný prut otevřeného a uzavřeného průřezu, hlavní body průřezu, těžiště, střed ohybu, hlavní nulový výsečový bod, hlavní výsečová souřadnice, výsečový statický moment, lineární výsečový statický moment, výsečový moment setrvačnosti, bimoment, moment prostého kroucení, moment vázaného kroucení, prosté (volné) kroucení, složené (vázané) kroucení, normálové napětí od kroucení, smykové napětí od kroucení, natočení prutu, deplanace průřezu, součinitel vlivu tuhosti prutu v kroucení, součinitele podmínek uložení a zatížení.

# 2 Geometrické a statické průřezové charakteristiky

## 2.1 Úvod



Při výpočtu napjatosti a přetvoření tenkostěnných prutů se popisuje uspořádání příčného řezu a jeho mechanické veličiny geometrickými a statickými veličinami. Zaměříme se především na ty , které kromě základních charakteristik klasické teorie pružnosti a plasticity vyžaduje řešení problému kroucení.

## 2.2 Souřadnice bodů střednice

Každému bodu střednice tenkostěnného průřezu se přiřazují tři souřadnice: lineární souřadnice $Z\,(mm)$, $z\ (mm)$ jako orientované vzdálenosti od centrálních os $Y, Z$ a výsečová souřadnice $\omega\,(mm^2)$, která pro zvolený bod $P$ v rovině průřezu ( označovaný jako pól ) a pro zvolený bod $M_0$ na střednici průřezu ( označovaný jako začátek odečítání výsečové souřadnice) je definován obecným výrazem $d_\omega = r d_s$, tj.

$$\omega_{(s)} = \int_0^s r d_s$$

kde $r$ je rameno tečny střednice průřezu vztáhnuté k pólu $P$ v integrovaném úseku,

s délka střednice měřená od počátečního bodu $M_0$

Výsečová souřadnice obecného bodu $M$ na střednici průřezu ve vztahu ke zvolenému počátku $M_0$ se rovná dvojnásobné ploše omezené počátečním průvodičem ($P\ M_0$), koncovým průvodičem ($P\ M$) a střednicí průřezu. Pro průřezy s přímkovými úseky je

$$\omega(s) = \sum_i r_i s_i$$

kde $r_i$ je rameno střednice příslušného úseku $i$ k pólu $P$,

$s_i$ délka příslušného úseku ( v úseku $i$ zahrnujícím bod $M$, jehož souřadnice hledáme, je $s_i$ délka úseku po tento bod).

Průběh výsečové souřadnice se vynáší na střednici průřezu v závislosti na znaménko, které se odvozuje od zvolené konvence otáčení počátečního průvodiče do koncového průvodiče.

## 2.3 Hlavní body průřezu

Každý průřez tenkostěnného prutu má jednoznačně definované hlavní body průřezu:

těžiště $C_g$, střed ohybu $C_s$ a hlavní nulový výsečový bod $M_0$.

Střed ohybu (střed kroucení) je bodem v rovině příčného řezu, kolem kterého se při kroucení průřez pootáčí jako celek. Středem ohybu musí procházet výslednice příčného zatížení, aby prut byl namáhaný jen ohybem ( bez kroucení). Excentricita příčného zatížení z hlediska kroucení se tedy vztahuje ke středu ohybu.

Poloha středu ohybu průřezu tenkostěnného prutu $C_s$ s libovolnými centrálními osami $X$, $Y$ ve vztahu k libovolně zvolenému pólu $P_{(x_p, y_p)}$ se určí podle vztahů:

$$y_{C_s} = y_P + \xi_{C_s}$$

$$z_{C_s} = z_P + \eta_{C_s}$$

kde $\xi_{C_s}, \eta_{C_s}$ jsou orientované vzdálenosti středu ohybu od zvoleného pólu $P$ definované vztahy:

$$\xi_{C_s} = \frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2}(I_z S_{\omega y} - I_{yz} S_{\omega z})$$

$$\eta_{C_s} = -\frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2}(I_y S_{\omega z} - I_{yz} S_{\omega y})$$

kde $I_y$, $I_z$ jsou momenty setrvačnosti průřezu,

$I_{yz}$ deviační moment průřezu,

$S_{\omega y}$, $S_{\omega z}$ lineární výsečové statické momenty stanovené pro libovolně zvolený počátek odečítání výsečové souřadnice $M_0$.

Pro hlavní centrální osy setrvačnosti $I_{yz} = 0$ se výrazy pro $\xi_{C_s}$ a $\eta_{C_s}$ zjednoduší.

U symetrických průřezů leží střed ohybu vždy na ose symetrie ( u dvouose symetrických průřezů je tedy $C_g \equiv C_s$).

Hlavní nulový výsečový bod leží na střednici pruřezu v bodě, kterému v soustavě pomocných výsečových souřadnic

$$\bar{\omega}_{M_0} = \frac{S_\omega}{A}$$

kde $S_\omega$ je výsečový statický moment,

A plocha průřezu.

U symetrických průřezů leží hlavní nulový výsečový bod $M_0$ v průsečíku osy symetrie se střednicí průřezu.

## 2.4 Průřezové veličiny

Výsečové statické veličiny otevřených průřezů jsou dán obecnými vztahy:

- výsečový statický moment ($mm^2$)

$$S_\omega = \int_A \omega dA$$

Tato veličina se používá ve formě $S_\omega(s)$ po střednici průřezu ( při výpočtu druhotného smykového napětí při složeném kroucení), nebo jako výsledná hodnota pro celý průřez při hledání bodu $M_0$ podle vztahu:

- lineární výsečový statický moment ($mm^2$) $S_{\omega y} = \int_A \omega z dA$

$$S_{\omega z} = \int_A \omega y dA$$

- výsečový moment setrvačnosti ($mm^2$) $I_\omega = \int_A \omega^2 dA$

kde $d_A$ je diferenciál plochy průřezu,

$\omega$ hlavní výsečová souřadnice.

# 3 Prosté kroucení

Prosté kroucení ( nazývané také volné, čisté nebo Saint-Venantovo kroucení) je stavem napjatosti tenkostěnného prutu, při kterém vznikají v jeho průřezech vlivem vnějších kroutících účinků jen smyková napětí $\tau$, označovaná jako primární ( SAINT-VENANTOVA) kroutící napětí nebo napětí od prostého kroucení.

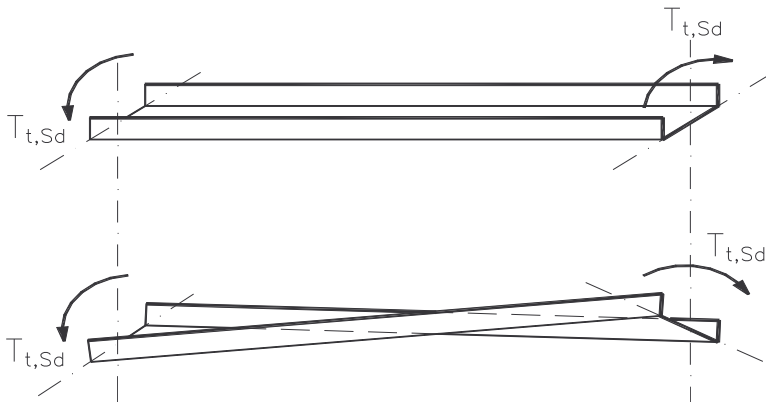
## 3.1 Předpoklady vzniku prostého kroucení

Prosté kroucení vzniká za těchto předpokladů:

a) u prutů, jejichž průřez při kroucení deplanuje ( tj. nastává porušení původní rovinnosti příčných řezů nerovnoměrným posuvem bodů průřezu ve směru podélné osy prutu), vznikne prosté kroucení jen při zatížení dvěma stejně velkými kroutícími momenty $T_{t,Sd}$ opačného směru působících na konci prutu v rovinách kolmých na jeho podélnou osu, přitom se nesmí v žádném místě bránit deplanaci průřezu ( na obr….. je schematický příklad přetvoření prutu otevřeného průřezu při prostém kroucení). Tento způsob namáhání se označuje jako prosté kroucení s deplanací.

b) u prutů, jejichž průřez při kroucení nedeplanuje, vzniká vždy jen prosté kroucení,

přičemž nezáleží na uložení prutu ani na působišti kroutícího zatížení. V tomto případě jde o prosté kroucení bez deplanace. Z otevřených tenkostěnných průřezů patří do skupiny nedeplanujících všechny svazkové průřezy, u kterých se střednice všech částí průřezu protínají v jednom bodě – centru svazku ( kde $P \equiv M_0$ ) a proto výsečový moment setrvačnosti $I_\omega = 0$ (průřezy L,T, atd.).



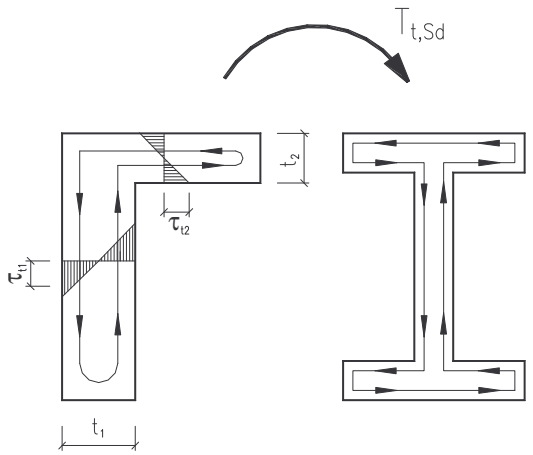

*Obr.3.1: Napětí od prostého kroucení, které se určuje z vnějšího kroutícího momentu $T_{t,Sd}$ působícího v příslušném řezu.*

**Shrnutí:**

Prosté kroucení vzniká u prutů, jejichž průřez nedeplanuje( svazkové průřezy ) popřípadě i u jiných prutů s deplanujícími průřezy, zatížených na obou koncích stejně velkými kroutícími momenty opačného smyslu, přičemž deplanaci nesmí být po celé délce prutu bráněno. Při prostém kroucení vzniká pouze tzv. smykové napětí

## 3.2 Pruty otevřeného průřezu

Rozdělení smykového napětí $\tau_t$ po tloušťce průřezu je pro úzký obdelník i pro tenkostěnné průřezy složené z více obdélníkových částí ($t \ll h$) patrno na obr. 3.2. Na okraji průřezu dosahuje napětí hodnotu




*Obr.3.2: Smykové napětí u otevřeného průřezu*

$$\tau_{t,\max} = \frac{T_{t,Sd}}{I_t} t \quad \text{, kde}$$

| | |
|---|---|
| t | tloušťka průřezu v posuzovaném místě |
| $I_t$ | moment tuhosti průřezu v prostém kroucení |
| $T_{t,Sd}$ | vnější kroutící moment působící ve vyšetřovaném průřezu |

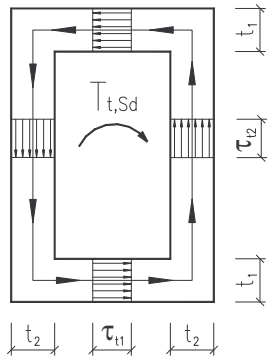
Moment tuhosti se vypočítá podle vztahu: $I_t = \frac{1}{3}\alpha \sum b_i t_i$, kde opravný součinitel $\alpha$ zahrnuje vliv spojitosti a tvaru průřezu složeného z dílčích částí obdélníkového průřezu a nabývá hodnoty:

$\alpha = 1,3$ pro válcované a příčně vyztužené svařované průřezy tvaru I,

$\alpha = 1,2$ pro válcované průřezy U, pro úhelníky

$\alpha = 1,0$ pro obdelníkové přůřezy a průřezy z plechu tvarované za studena.

## 3.3 Pruty uzavřeného průřezu




$$\tau_t = \frac{T_{t,Sd}}{\Omega.t}$$

t tloušťka průřezu v posuzovaném místě

Ω … dvojnásobná plocha omezená střednicí průřezu

$T_{t,Sd}$ … vnější kroutící moment působící ve vyšetřovaném průřezu

*Obr.3.3: Smykové napětí u uzavřeného průřezu*

**Přetvoření** při prostém kroucení má dvě složky:
- úhel pootočení průřezu $\varphi$
- deplanaci průřezu, tj. nerovnoměrný posun $w(s)$ bodů střednice ve směru podélné osy prutu.
-

Poměrný úhel pootočení průřezu $\vartheta$ je dán vztahem

$$\vartheta = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{T_{t,Sd}}{GI_t}$$

a celkový úhel pootočení průřezu prutu v úseku $0....x \le L$ bude

$$\varphi(L) = \int_0^L \frac{T_{t,Sd}}{GI_t} dx = \frac{T_{t,Sd} L}{GI_t}$$

Relativní deplanace bodů střednice vzhledem k bodu, který volíme jako počáteční ( $s = 0$ ) je

$$w(s) = -\vartheta\omega(s)$$

kde $\omega(s)$ je výsečová souřadnice bodu průřezu stanovena pro pól ve středu ohybu průřezu a začátek odečítání v bodě, kde $s = 0$.

# 4 Vázané a složené kroucení



Vázané kroucení je stavem napjatosti tenkostěnného prutu, při kterém vznikají vlivem nerovnoměrné deplanace jednotlivých průřezů po délce krouceného prutu normálová výsečová napětí $\sigma_\omega$ a z nich vyplývající druhotná výsečová smyková napětí $\tau_\omega$.

V obecném případě vznikají při kroucení tenkostěnného prutu současně oba druhy kroucení, prosté i vázané. Tento způsob kroucení se označuje jako složené kroucení.

Teorie výpočtu složeného kroucení tenkostěnných prutů je rozpracovaná na základě dvou předpokladů:

- průmět obrysu příčného řezu do roviny kolmé na osu prutu je při kroucení neměnný ( průřez se nedeformuje ve svoji rovině ); když tento předpoklad není zajištěn ( např. vlastní ohybovou tuhostí stěn, jako je to u válcovaných profilů nebo příčným vyztužením např. u svařovaných profilů), je třeba řešit problém kroucení se zohledněním vlivu změny tvaru průřezu;
- smykové deformace ve střednicové ploše prutu jsou zanedbatelné (předpokládají se nulové).

## 4.1 Vlasovovo řešení

Velikost výsečového normálového napětí při složeném kroucení (podobně jako při řešení problému ohybu) vychází z rozboru protáhnutí vláken prutu ve směru jeho podélné osy. Na základě již uvedených předpokladů odvodil VLASOV [5] pro poměrné prodloužení vztah

$$\varepsilon_x = -\varphi''(x)\omega$$

Příslušné výsečové normálové napětí je

$$\sigma_\omega = -E\varphi''(x)\omega$$

Na základě těchto vztahů je možno formulovat zákon výsečových ploch, který zní:
Při složeném kroucení je průběh poměrného protažení a tedy i výsečového normálového napětí $\sigma_\omega$ přímo úměrný hlavní výsečové ploše $\omega$.

Působení normálových napětí $\sigma_x$ v průřezu prutu nahrazujeme při ohybu výslednými vnitřními silami ( ohybovými momenty ) podle vztahů

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA$$

Při složeném kroucení, když $M_y = M_z = 0$ a tedy $\sigma_x = \sigma_\omega$, musí výsečové napětí tvořit v průřezu rovnovážnou soustavu ( ve směru podélné osy $X$ nepůsobí žádné další napětí ). Na vyjádření intenzity celkového účinku napětí v průřezu je zavedena statická veličina bimoment podle vztahu

$$B = \int_A \sigma_\omega \omega dA$$

který má formálně podobný tvar jako vztahy pro ohyb.

Dosazením za $\sigma_\omega$ dostaneme

$$B = -EI_\omega \varphi''$$

a po úpravě

$$\sigma_\omega = \frac{B\,\omega}{I_\omega}$$

Smykové napětí v průřezu musí být v rovnováze s vnějším kroutícím momentem řezu $T$.

Základní smykové napětí $\tau_t$ při složeném kroucení má podobný charakter jako smykové napětí při prostém kroucení. Jeho výslednicí je moment prostého kroucení $T_t$, který je možné vyjádřit jako funkci úhlu pootočení

$$T_t = GI_t \varphi'$$

Příslušné smykové napětí je potom

$$\tau_t = \frac{T_t}{I_t} t$$

Na rozdíl od prostého kroucení smykové napětí $\tau_t$ není jedinou složkou podílející se na přenosu vnějšího kroutícího momentu $T_{VK}$ v průřezu. Z proměnného průběhu funkce úhlu pootočení a tedy i výsečového normálového napětí $\sigma_\omega$ po délce nosníku a z podmínky nutné rovnováhy vnitřních sil působících na prvek nosníku rovnoběžně s jeho podélnou osou, vyplývá existence druhotných smykových napětí $\tau_\omega$.

Výslednice smykových napětí $\tau_\omega$ vyjadřuje ke středu ohybu průřezu moment vázaného kroucení $T_\omega$, který podle VLASOVA závisí na funkci úhlu pootočení podle vztahu

$$T_\omega = -EI_\omega \varphi'''$$

Příslušná druhotná smyková napětí jsou dána vztahem

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega S_\omega(s)}{I_\omega t}$$

kde $S_\omega(s) = \int_A \omega dA$ je výsečový statický moment bodu střednice průřezu ve kterém určujeme napětí; začátek (s=0 ) se volí na okraji střednice, t je tloušťka stěny průřezu, kde napětí určujeme.

Zatím byla uvedena závislost složek napětí $\sigma_\omega, \tau_t, \tau_\omega$, resp. silových veličin $B, T_t, T_\omega$ na funkci úhlu pootočení. Když určíme tuto funkci, je problém napjatosti i přetvoření prutu při složeném kroucení vyřešený.

Z rovnováhy kroutících momentů v průřezu prutu vyplývá, že moment výslednice primárních smykových napětí $\tau_t$ a druhotných smykových napětí $\tau_\omega$ ke středu ohybu průřezu se rovná celkovému vnějšímu kroutícímu momentu v řezu $T$.

Platí tedy $T_\omega + T_t = T$

Po dosazení a derivováním podle souřadnice $x$ dostáváme

$$EI_\omega \varphi^{IV} - GI_t \varphi'' = m(x)$$

kde $m(x) = -T'$ je intenzita kroutícího zatížení.

Rovnice je základní diferenciální rovnice složeného kroucení umožňující v závislosti na tuhosti, zatížení uložení prutu stanovit funkci úhlu pootočení. Řešení rovnice obsahuje 4 konstanty, které je potřebné určit v závislosti na okrajových podmínkách prutu v uložení. Na každém konci prutu můžeme psát 2 okrajové podmínky, které mají v běžných případech tvar:

- prosté podepření v kroucení

$$\varphi = 0$$

$$\varphi'' = 0, \text{ tj. } B = 0 \text{ ( volná deplanace )}$$

- vetknutí v kroucení

$$\varphi = 0$$

$$\varphi' = 0, \text{ tj. nulová deplanace}$$

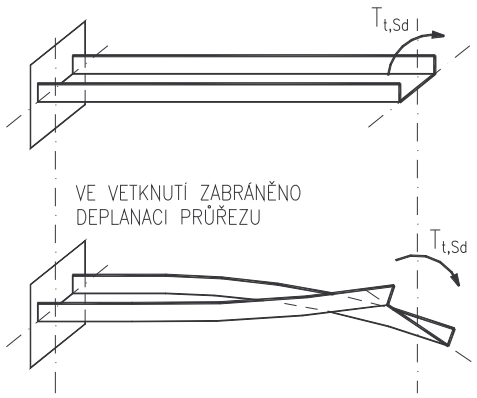
- volný nezatížený konec $\varphi'' = 0$, tj. $B = 0$ ( volná deplanace )

$\varphi''' - \varphi' GI_t / EI_\omega = 0$, tj. $T = 0$

Řešením diferenciální rovnice je příslušný problém složeného kroucení definovaný takto:

Z diferenciální rovnice složeného kroucení se určí funkce úhlu pootočení $\varphi(x)$, s pomocí které se stanoví silové veličiny složeného kroucení $B, T_t, T_\omega$ podle uvedených vztahů a dále se již mohou vypočítat příslušná napětí složeného kroucení $\sigma_\omega, \tau_t, \tau_\omega$.

Řešení diferenciální rovnice je poměrně pracné. Pro běžné případy zatížení a uložení kroucených prutů používáme výsledné vzorce pro výpočet silových veličin složeného kroucení (viz tab. 4.1).




*Obr. 4.1: Složené (vázané) kroucení*

**Shrnutí:**

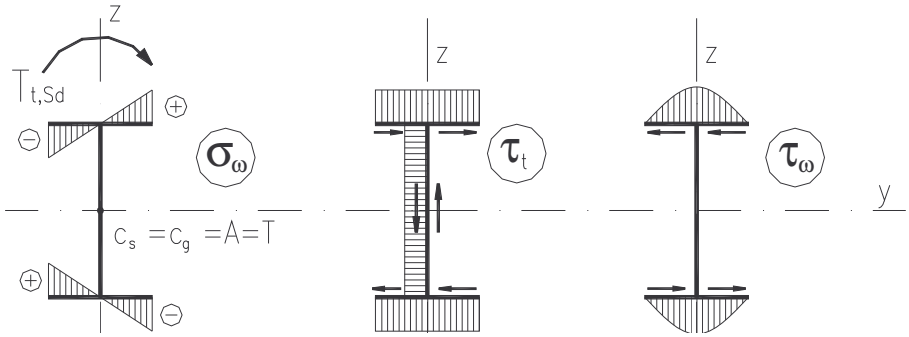
Vázané a složené kroucení vzniká u prutů s deplanujícími průřezy při obecném kroutícím zatížení a obecných okrajových podmínkách ( uložení konců prutů v kroucení ), s vyjímkou případů prostého kroucení. Vznikají tři vnitřní návrhové silové veličiny – bimoment $B_{Sd}$, moment ohybového kroucení $T_{\omega,Sd}$, moment prostého kroucení $T_{t,Sd}$, a z nich napětí $\sigma_\omega$, $\tau_t$, $\tau_\omega$.

- *Pruty otevřeného průřezu*

$\sigma_\omega = \dfrac{B_{Sd}.\omega}{I_\omega}$ normálové napětí od kroucení

$\tau_\omega = \dfrac{T_{\omega,Sd}.S_\omega}{I_\omega.t}$ smykové napětí od ohybového kroucení

$$\tau_t = \frac{T_{t,Sd} \cdot t}{I_t}$$ smykové napětí od prostého kroucení




*Obr. 4.2: Normálová a smyková napětí u prutu otevřeného průřezu*

$B_{Sd}$ … hodnota bimomentu

$T_{\omega,Sd}$ … moment ohybového kroucení

$T_{t,Sd}$ … moment prostého kroucení

$\omega$ … hlavní výsečová souřadnice posuzovaného místa

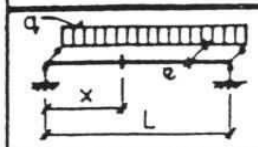
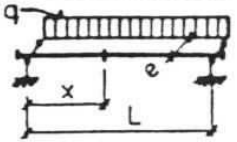
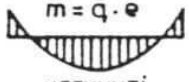
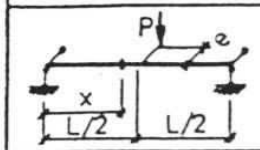
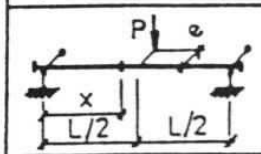
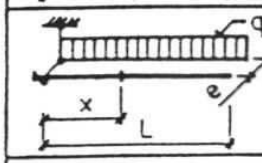
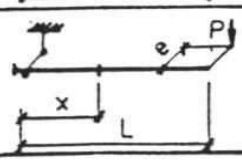
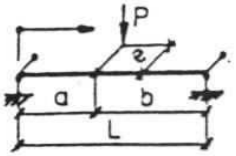
$I_\omega$ … výsečový moment setrvačnosti průřezu ke středu smyku

$I_t$ … moment tuhosti v prostém kroucení

t … tloušťka průřezu v posuzovaném místě

$S_\omega$ … výsečový statický moment pro posuzované místo

*Tab.4.1: Silové veličiny při složeném kroucení*

| SCHEMA | BIMOMENT B | | OHYBOVÉ KROUTÍCÍ MOMENT $T_w$ | MOMENT PROSTÉHO KROUCENÍ $T_t$ |
|---|---|---|---|---|
|  | $m = q.e$  VOLNÉ ULOŽENÍ V KROUCENÍ | $\frac{m}{\psi^2}\left[1 - \frac{\cosh \psi(L/2 - x)}{\cosh \psi L/2}\right]$ | $\frac{m}{\psi} \cdot \frac{\sinh \psi(L/2 - x)}{\cosh \psi L/2}$ | $\frac{m}{\psi}\left[\psi(L/2-x) - \frac{\sinh \psi(L/2 - x)}{\cosh \psi L/2}\right]$ |
|  | $m = q.e$  VETKNUTÍ V KROUCENÍ | $\frac{m}{\psi^2}\left[1 - \frac{\psi L.\cosh \psi(L/2 - x)}{2 . \sinh \psi L/2}\right]$ | $m\frac{L}{2} \cdot \frac{\sinh \psi(L/2 - x)}{\sinh \psi L/2}$ | $m\left[L/2 - x - L/2\,\frac{\sinh \psi(L/2-x)}{\sinh \psi L/2}\right]$ |
|  | $T = P.e$  VOLNÉ ULOŽENÍ V KROUCENÍ | $\frac{T}{2\psi} \cdot \frac{\sinh \psi x}{\cosh \psi L/2}$ | $\frac{T}{2} \cdot \frac{\cosh \psi x}{\cosh \psi L/2}$ | $\frac{T}{2}\left(1 - \frac{\cosh \psi x}{\cosh \psi L/2}\right)$ |
|  | $T = P.e$  VETKNUTÍ V KROUCENÍ | $\frac{T}{2} \cdot \frac{\cosh \psi x - \cosh \psi(L/2 - x)}{\psi \cdot \sinh \psi L/2}$ | $\frac{T}{2} \cdot \frac{\sinh \psi x + \sinh \psi(L/2 - x)}{\sinh \psi L/2}$ | $\frac{T}{2}\left[1 - \frac{\sinh \psi x + \sinh \psi(L/2-x)}{\sinh \psi L/2}\right]$ |
|  | $m = q.e$  KONZOLA VETKNUTÁ V KROUCENÍ | $m\frac{\cosh \psi L - \cosh \psi x - \psi L.\sinh \psi(L-x)}{\psi^2 . \cosh \psi L}$ | $m\frac{\psi L.\cosh \psi(L-x) - \sinh \psi x}{\psi . \cosh \psi L}$ | $m\left[L-x - \frac{\psi L\cosh \psi(L-x) - \sinh \psi x}{\psi . \cosh \psi L}\right]$ |
|  | $T = P.e$  KONZOLA VETKNUTÁ V KROUCENÍ | $-T\frac{\sinh \psi(L - x)}{\psi . \cosh \psi L}$ | $T\frac{\cosh \psi(L - x)}{\cosh \psi L}$ | $T\left[1 - \frac{\cosh \psi(L - x)}{\cosh \psi L}\right]$ |
|  | VOLNÉ ULOŽENÍ V KROUCENÍ  $T = P.e$ | $0 \le x \le a$: $T.\frac{\sinh \psi b \,.\, \sinh \psi x}{\psi . \sinh \psi L}$<br>$a \le x \le L$: $T.\frac{\sinh \psi a \,.\, \sinh \psi(L - x)}{\psi . \sinh \psi L}$ | $0 \le x \le a$: $T.\frac{\sinh \psi b \,.\, \cosh \psi x}{\sinh \psi L}$<br>$a \le x \le L$: $-T.\frac{\sinh \psi a \,.\, \cosh \psi(L - x)}{-\sinh \psi L}$ | $0 \le x \le a$: $T\left[b/L - \frac{\sinh \psi b \,.\, \cosh \psi x}{\sinh \psi L}\right]$<br>$a \le x \le L$: $T\left[-a/L + \frac{\sinh \psi a \,.\, \cosh(L-x)\psi}{\sinh \psi L}\right]$ |

## 4.2 Analogie problému kroucení s ohybem a přibližné řešení



Vzhledem k pracnosti aplikace obecné Vlasovovy teorie tenkostěnných prutů jsou vypracovány jednoduché a praktické, když přibližné, metody výpočtu kroucených prutů.
Když porovnáme diferenciální rovnici složeného kroucení s diferenciální rovnicí teorie 2. řádu nosníku ohýbaného a současně taženého, je zřejmé, že mezi oběma problémy existuje úplná analogie. Přepisem odpovídajících si symbolů a veličin je možné se známých řešení jednoho stavu namáhání přímo odvodit závislosti pro analogický stav.
V případě, že je tuhost průřezu prostém kroucení zanedbatelně malá, tj. platí $GI_t \to 0$, zjednoduší se rovnice složeného kroucení na tvar platný jen pro vázané kroucení

$$EI_\omega \varphi^{IV} = m$$

který se podobá rovnici ohybu $EI_t \eta^{IV} = q$

Uvedená podobnost se označuje jako zjednodušená analogie ohybu a kroucení. S použitím této analogie je možné se známých závislostí platných pro ohýbaný prut odvodit vztahy platné pro analogický případ vázaného kroucení ( tj. pro analogické zatížení a analogické podepření ).
Postupy vycházející z předpokladu $GI_t \to 0$ nejsou vhodné pro všechny pruty ( zvláště u válcovaných průřezů by vznikly velké nepřesnosti ).

Řešení zachovávající výhody zjednodušené analogie a respektující přitom skutečnou tuhost průřezu v prostém kroucení vychází z principu modifikované analogie. Vychází se z výrazu pro bimoment, který se určuje ze vztahu $B_o = Me$ pro $GI_t \to 0$, tj. s využitím známých vztahů pro ohybový moment. Hodnota $B_o$ se opraví s ohledem na skutečnou tuhost v prostém kroucení podle vztahu

$$B = B_o(1 - \chi)$$

kde pro opravný součinitel $\chi$ platí obecný vztah

$$\chi = \frac{B(GI_t \to 0) - B(GI_t)}{B(GI_t \to 0)}$$

Na základě vztahu $B = B_o(1-\chi)$ je možné s využitím rovnice $T_\omega + T_t = T$ a $T_\omega = B'$ psát výsledné vztahy pro výpočet silových veličin složeného kroucení:

$$B = Me(1-\chi)$$

$$T_t = Te\chi$$

$$T_\omega = Te(1-\chi)$$

- *Pruty uzavřeného průřezu*

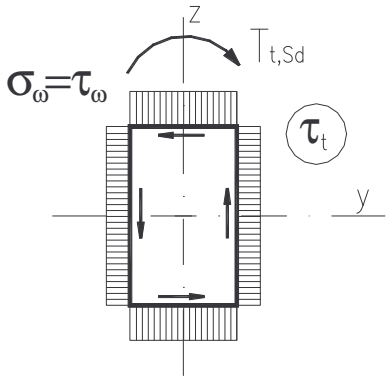
Pruty s uzavřeným průřezem mají v porovnání s pruty s otevřeným průřezem velkou tuhost v kroucení, jejich deplanace je zpravidla zanedbatelná a lze ji přibližně brát $\sigma_\omega=\tau_\omega=0$. Smykové napětí od prostého kroucení se určí podle vztahu

$$\tau_t = \frac{T_{Sd}}{\Omega.t}$$

$T_{Sd}$ … vnější kroutící moment v posuzovaném průřezu

$\Omega$ … dvojnásobná plocha omezená střednicí průřezu

t … tloušťka průřezu v posuzovaném místě




*Obr. 4.3: Smykové napětí na uzavřeném průřezu*

Složky vnitřních sil $B_{Sd}, T_{\omega,Sd}, T_{t,Sd}$ při kroucení průřezu můžeme určit :

1. **přesně** – řešením diferenciální rovnice složeného kroucení s uvážením konkrétních okrajových podmínek uložení konců prutů v kroucení

$$E.I_\omega.\varphi^{IV} - G.I_t.\varphi^{II} = m$$

m … kroutící zatížení prutu

φ … úhel pootočení průřezu, jenž je předmětem řešení uvedené rovnice

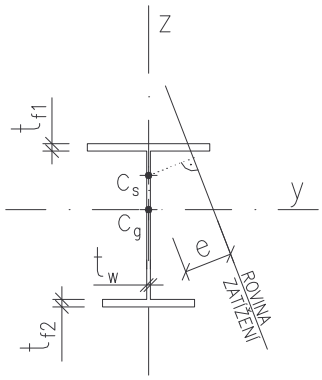
a pak $B_{Sd} = -E.I_{\omega}.\varphi^{II}$ ,

$T_{\omega,Sd} = -E.I_{\omega}.\varphi^{III}$ ,

$T_{t,Sd} = G.I_t.\varphi^{I}$ .

Pro nejčastěji se vyskytující případy kroutícího zatížení a okrajové podmínky jsou uvedeny vztahy a průběhy pro $B_{Sd}, T_{\omega,Sd}, T_{t,Sd}$ např. viz tab. 4.1.

2. **<u>přibližně</u>** – analogie ohybu s kroucením s respektováním tuhosti v kroucení – působí-li příčné zatížení na prut otevřeného průřezu v rovině, jejíž vzdálenost od středu smyku $C_s$ má hodnotu *e*




$$B_{Sd} = M_{Sd}.e.(1-\kappa)\,,$$

$$T_{\omega,Sd} = V_{Sd}.e.(1-\kappa)\,,$$

$$T_{t,Sd} = V_{Sd}.e.\kappa$$

*Obr. 4.4: Působení příčného zatížení ve vzdálenosti e od středu smyku $C_s$*

$M_{Sd}$ , $V_{Sd}$ návrhový ohybový moment a posouvající síla v posuzovaném průřezu určené pro podmínky podepření prutu v kroucení

$\kappa$ součinitel vlivu tuhosti prutu v prostém a ohybovém kroucení, který lze brát přibližně

$$\kappa = \frac{1}{\beta + \left(\frac{\alpha}{\psi.L}\right)^2}$$

L … délka (rozpětí) prutu

$\alpha$, $\beta$ … součinitele podmínek uložení a zatížení viz ČSN 731401-98, str.113, Tab.F.1

$$\psi = \sqrt{\frac{G.I_t}{E.I_\omega}} = 0{,}62.\sqrt{\frac{I_t}{I_\omega}} \quad \ldots \text{ parametr kruhu}$$

**Shrnutí:**



Kroucení vzniká u ohýbaných nosníků v případech, když příčně působící zatížení neprochází tzv. středem smyku a v případě osaměle působících kroutících momentů. Prosté (volné) kroucení vzniká u prutů, jejichž průřezy nedeplanují, popř. u prutů s deplanujícími průřezy, zatížených na obou koncích kroutícími momenty opačného smyslu, přičemž deplanaci nesmí být po celé délce prutu bráněno. Při prostém kroucení vzniká pouze tzv. smykové napětí od prostého kroucení. Složené (vázané) kroucení vzniká u prutů s deplanujícími průřezy při obecném kroutícím zatížení a obecných okrajových podmínkách. Vznikají tři vnitřní silové veličiny – bimoment, moment prostého kroucení a moment ohybového kroucení. V závislosti na nich tři napětí – normálové, smykové od prostého kroucení a smykové od ohybového kroucení.

Přibližná analogie ohybu s kroucením s respektováním tuhosti v kroucení

$$\left.\begin{aligned} B_{Sd} &= M_{Sd}.e.(1-\kappa) \\ T_{\omega,Sd} &= V_{Sd}.e.(1-\kappa) \\ T_{t,Sd} &= V_{Sd}.e.\kappa \end{aligned}\right\}$$

průběhy s ohledem na uložení prutu a zatížení, viz Tab.4.1

$M_{Sd}$ , $V_{Sd}$ návrhový ohybový moment a návrhová posouvající síla v posuzovaném průřezu

$\kappa$ součinitel vlivu tuhosti prutu v prostém a ohybovém kroucení, který lze brát přibližně

$$\kappa = \frac{1}{\beta + \left(\frac{\alpha}{\psi.L}\right)^2}$$

L … délka (rozpětí) prutu

$\alpha$, $\beta$ … součinitele podmínek uložení a zatížení viz ČSN 731401 – 98, str.113, Tab. F.1

$$\psi = \sqrt{\frac{G.I_t}{E.I_\omega}} \quad \ldots \text{ parametr kruhu}$$

# 5 Příklad



Navrhněte a posuďte nosník **I** průřezu o rozpětí 5,0m na ohyb a kroucení zatížený silou $F_{sd} = (20 + n \cdot 2)kN = 20 + 40 \cdot 2 = \underline{\underline{100kN}}$, působící uprostřed nosníku s excentricitou 50mm nosník je zajištěn proti klopení pouze v podporách.

**Řešení:**

**a) vstupní parametry:**

| | |
|---|---|
| působící síla: | $F_{sd} = \underline{\underline{100kN}}$ |
| vzdálenost $F_{Sd}$ od podpor: | $L/2 = \underline{\underline{2,5m}}$ |
| excenricita | $e = \underline{\underline{50mm}}$ |
| součinitel spolehlivosti mat.: | $\gamma_{M_0} = \gamma_{M_1} = 1,15$ |
| dílčí součinitel spol. – náh.břem. | $\gamma_Q = 1,4$ |
| dílčí součinitel spol. | $\gamma_G = 1,2$ |

**b) Výpočet momentu a posouvající síly:**

**b.1.) Stanovení ohybového momentu:**

$$M_{Sd} = \frac{1}{4} \cdot F_{Sd} \cdot L = \frac{1}{4} \cdot 100 \cdot 5 = \underline{\underline{125,0kNm}}$$

**b.2.) Stanovení posouvající síly:**

$$V_{Sd} = \frac{1}{2} \cdot F_{Sd} = \frac{1}{2} \cdot 100 = \underline{\underline{50,0kNm}}$$

Nosník se navrhne na ohyb při ztrátě příčné a torzní stability podle vzorce:

$$M_{b,Rd} = \frac{\chi_{LT} \cdot W_{eff,\min} \cdot f_y}{\gamma_{M1}},$$

protože se počítá pružně, pak předpokládá se, že navrhovaný profil bude třídy 1 nebo 2, ale $\beta_w = \frac{W_{el,y}}{W_{pl,y}} \leq 1$.

Pro první přiblížení se uvažuje $\beta_w = 1$.

Musí se tedy nejprve odhadnout součinitel ztráty příčné a torzní stability $\chi_{LT}$ pro:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}} = 1 \quad ,$$

$$\lambda_1 = 93{,}9 \cdot \varepsilon = 93{,}9$$

za předpokladu, že štíhlost na klopení $\lambda_{LT} = 100$ ,

bude poměrná štíhlost: $\overline{\lambda_{LT}} = \frac{\lambda_{LT}}{\lambda_1}\sqrt{\beta_w} = \frac{100}{93{,}9} \cdot 1 \cong \underline{\underline{1{,}06}}$ ,

z tabulek pro válcované nosníky platí křivka a $\Rightarrow \chi_{LT} = 0{,}62$ ,

potom:

$$W_{y,ef,\min} = \frac{M_{Sd} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{LT} \cdot f_y} = \frac{125{,}0 \cdot 10^6 \cdot 1{,}15}{0{,}62 \cdot 275} = \underline{\underline{843{,}11 \cdot 10^3\, mm^3}}$$

Pro namáhání kroucením je ponechána rezerva 50%

$$W_{y,ef} = 1{,}5 \cdot W_{y,ef,\min} = \underline{\underline{1264{,}66 \cdot 10^3\, mm^3}}$$

**Navrženo I 400**

**Zatřídění průřezu:**

Průřez z oceli S275 se zatřídí: (ČSN 731401 – 98, str.28.)

**Stojina:** $\frac{d}{t_w} \le 72 \cdot \varepsilon \qquad \left(\varepsilon = \sqrt{235 / f_y}\right)$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{275}}$$

$$\frac{d}{t_w} \le 72 \cdot \sqrt{\frac{235}{275}}$$

$$\frac{378,4}{14,4} \le 66,6 \Rightarrow \underline{\underline{26,28 \le 66,6}} \Rightarrow \quad \textit{třída}\ 1.$$

**pásnice:**

$$\frac{c}{t_f} \le 10 \cdot \varepsilon \qquad \left(\varepsilon = \sqrt{235 / f_y}\right)$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{275}}$$

$$\frac{c}{t_f} \le 10 \cdot \sqrt{\frac{235}{275}}$$

$$\frac{77,5}{21,6} \le 9,2 \Rightarrow \underline{\underline{3,6 \le 9,2}} \Rightarrow \quad \textit{třída}\ 1.$$

**Charakteristické hodnoty profilu I 400:**

$A = 118 cm^2$ , $I_y = 29100 cm^4$ , $W_y = 1460 cm^3$ , $S_y = 862,6 cm^3$ ,
$t_w = 14,4 mm$ ,
$t_f = 21,6 mm$ , $I_z = 1140 cm^4$ , $b = 155 mm$ , $k = 1,29$ , $h = 400 mm$
$I_t = 1700 \cdot 10^3 mm^4$ , $i_y = 157 mm$ , $i_z = 31,2 mm$ , $g_k = 92,6 kg/m$

Poloměr setrvačnosti při klopení je dán vztahem:

$$i_{y1} = \frac{i_z}{i_y} \cdot \frac{h}{2} = \frac{31,2}{157} \cdot \frac{400}{2} = \underline{\underline{40,13 mm}}$$

Výsečové statické hodnoty:

$$I_\omega = 395 \cdot 10^9 mm^6$$

$$\omega_{\max} = \pm \frac{b \cdot h}{4} = \pm \frac{155 \cdot 378,4}{4} = \underline{\underline{\pm 14\,663 mm^2}}$$

$$S_{\omega,\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{4} \cdot \frac{b}{2} \cdot d_p = \frac{1}{16} \cdot 21,6 \cdot 155^2 \cdot 378,4 = \underline{\underline{12,273 \cdot 10^6 mm^4}}$$

**e) Posouzení na mezní stav použitelnosti:**

Vlastní tíhu nosníku je možno zanedbat. Charakteristická hodnota síly se vypočte z návrhové hodnoty.

$$F_K = \frac{F_{Sd}}{\gamma_Q} = \frac{100}{1,4} = \underline{\underline{71,43kN}} \quad ,$$

$$\delta = \frac{1 \cdot F_K \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I_y} = \frac{1 \cdot 71\,429 \cdot 5\,000^3}{48 \cdot 210\,000 \cdot 291\,000} = \underline{\underline{3,04mm}}$$

Průhyb je oproti dovolené hodnotě $\frac{L}{250} = \frac{5000}{250} = 20mm$ zanedbatelný a tudíž se nemusí posuzovat (přesněji) s vlivem vlastní tíhy.

**f) Posouzení na mezní stav únosnosti:**

Namáhání profilu se rozdělí na namáhání od ohybu a na namáhání od kroucení.

**f.a.) Namáhání od ohybu:**

Pro navržený I profil se stanoví štíhlost z hlediska ztráty stability v ohybu. Kritický moment $M_{cr}$ se stanoví pro $k = 1$ (prosté uložení na ohyb) a pro $k_w = 1$( není bráněno deplanaci). Určí se součinitele $C_1 = 1,365$, $C_2 = 0,553$, a jelikož zatížení působí na horní tlačenou pásnici, proto $z_g = \frac{h}{2} = \frac{400}{2} = \underline{200mm}$

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_z}{(k \cdot L)^2} \cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{k}{k_w}\right)^2 \cdot \frac{I_w}{I_z} + \frac{(k \cdot L)^2 \cdot G \cdot I_t}{\pi^2 \cdot E \cdot I_z} + (C_2 \cdot z_g)^2} - (C_2 \cdot z_g) \right] =$$

$$= 1,365 \cdot \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 11,4 \cdot 10^6}{(1 \cdot 5000)^2} \cdot$$

$$\cdot \left[ \sqrt{\left(\frac{1}{1}\right)^2 \cdot \frac{3,95 \cdot 10^{11}}{11,4 \cdot 10^6} + \frac{5000^2 \cdot 81 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^6}{\pi^2 \cdot 210 \cdot 10^3 \cdot 11,4 \cdot 10^6} + (0,553 \cdot 200)^2} - (0,553 \cdot 200) \right] =$$

$$= \underline{\underline{423,45 \cdot 10^6\, Nmm}}$$

Pro pružné působení je poměrná štíhlost:

$$\overline{\lambda_{LT}} = \sqrt{\frac{W_{el} \cdot f_y}{M_{CR}}} = \sqrt{\frac{1460 \cdot 10^3 \cdot 275}{423{,}45 \cdot 10^6}} = \underline{\underline{0{,}974}}$$

Hodnota součinitele vzpěrnosti na klopení $\chi_{LT}$ plyne z křivky a (str.110. ČSN 73 1401 - 98), a nebo ze vzorce: $(\alpha_{LT} = 0{,}21)$

$$\Phi_{LT} = \frac{1 + \alpha_{LT} \cdot \left(\overline{\lambda_{LT}} - 0{,}2\right) + \overline{\lambda_{LT}}^2}{2} = \underline{\underline{1{,}05532}}$$

$$\chi_{LT} = \frac{1}{\Phi_{LT} + \sqrt{\Phi_{LT}{}^2 - \overline{\lambda_{LT}}^2}} \approx \underline{\underline{0{,}6839}}$$

Moment od vlastní tíhy nosníku:

$$M_{G,Sd} = \frac{1}{8} \cdot G_k \cdot \gamma_G \cdot L^2 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{92{,}6}{100}\right) \cdot 1{,}2 \cdot 5^2 \approx \underline{\underline{3{,}473 kNm}} \quad ,$$

ten se přičte k momentu od nahodilého zatížení a vyčíslí se, normálové napětí:

$$\sigma_{x,b} = \frac{M_{Sd} + M_{G,Sd}}{\chi_{LT} \cdot W_{el,y}} = \frac{\left(125 + 3{,}473\right) \cdot 10^6}{0{,}6839 \cdot 1460 \cdot 10^3} = \underline{\underline{128{,}67 MPa}}$$

Smykové napětí se, za předpokladu rovnoměrného rozdělení smykového napětí po výšce stěny nosníku, určí z plochy účinné ve smyku:

$$A_v = A - 2 \cdot b \cdot t_f + \left(t_w + 2r\right) \cdot t_f =$$
$$= 11800 - 2 \cdot 155 \cdot 21{,}6 + \left(14{,}4 + 2 \cdot 14{,}4\right) \cdot 21{,}6 \approx \underline{\underline{5726{,}1 mm^2}}$$

$$\tau_b = \frac{V_{Sd}}{A_V} = \frac{50 \cdot 10^3}{5726{,}1} = \underline{\underline{8{,}732 MPa}} \le \frac{f_y}{\sqrt{3} \cdot 1{,}15} = \underline{\underline{138{,}06 MPa}} \quad \Rightarrow \textit{vyhovuje}$$

**f.b.) Namáhání od kroucení:** (postup dle ČSN 73 1401 - 98)

Rozdělovací parametr $\chi$, vyjadřující vliv tuhosti průřezu na rozdělení kroutícího momentu na volné a vázané kroucení, závisí na parametru tuhosti průřezu:

$$\psi \cdot L = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}} \cdot L = \sqrt{\frac{81000 \cdot 1700000}{210000 \cdot 3{,}95 \cdot 10^{11}}} \cdot 5000 = \underline{\underline{6{,}44}}$$

Parametr $\chi$ se vypočte z hodnot $\alpha$ a $\beta$. Pro prostý nosník bez zabránění deplanace a pro zatížení osamělým břemenem je $\alpha = 3{,}7$ a $\beta = 1{,}08$

$$\chi = \frac{1}{\beta + \left(\frac{\alpha}{\psi \cdot L}\right)^2} = \frac{1}{1{,}08 + \left(\frac{3{,}7}{6{,}44}\right)^2} = \underline{\underline{0{,}709}}$$

dále se vyčíslí bimoment z rovnice:

$$B_{Sd} = M_{Sd} \cdot e \cdot (1 - \chi) = 125 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}29072 = \underline{\underline{1{,}817 kNm^2}}$$

a normové napětí od kroucení:

$$w = \frac{1}{4} \cdot b \cdot \bar{h} = \frac{1}{4} \cdot 155 \cdot (400 - 21{,}6) = \underline{\underline{14{,}663 \cdot 10^3 mm^2}}$$

$$\sigma_{x,w} = \frac{B_{Sd}}{I_\omega} \cdot w = \frac{1{,}817 \cdot 10^9 \cdot 14{,}663 \cdot 10^3}{3{,}95 \cdot 10^{11}} = \underline{\underline{67{,}45 MPa}}$$

Dále se vypočte moment prostého kroucení:

$$\tau_{t,Sd} = V_{Sd} \cdot e \cdot \chi = 50 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}709 = \underline{\underline{1{,}773 kNm}}$$

a moment vázaného kroucení:

$$T_{w,Sd} = V_{Sd} \cdot e \cdot (1 - \chi) = 50 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}29072 = \underline{\underline{0{,}727 kNm}}$$

Z momentů v prostém a vázaném kroucení se vypočítají smyková napětí. K tomu je potřeba vyčíslit statický výsečový moment pro řez uprostřed pásnice průřezu.

$$S_{\omega,\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h}{4} \cdot \frac{b}{2} \cdot d_p = \frac{1}{16} \cdot 21{,}6 \cdot 155^2 \cdot 378{,}4 = \underline{\underline{12{,}273 \cdot 10^6 mm^4}}$$

Smyková napětí od prostého kroucení v pásnici:

$$\tau_t = \frac{T_{w,Sd}}{I_t} \cdot t_f = \frac{0,727 \cdot 10^6}{1700 \cdot 10^3} \cdot 21,6 = \underline{\underline{9,235 MPa}}$$

a ve stěně:

$$\tau_t = \frac{T_{w,Sd}}{I_t} \cdot t_w = \frac{0,727 \cdot 10^6}{1700 \cdot 10^3} \cdot 14,4 = \underline{\underline{6,156 MPa}}$$

Smykové kroucení od vázaného kroucení v pásnici:

$$\tau_w = \frac{T_{w,Sd} \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot t_f} = \frac{0,727 \cdot 10^6 \cdot 12,273 \cdot 10^6}{1700 \cdot 10^3 \cdot 21,6} = \underline{\underline{1,045 MPa}}$$

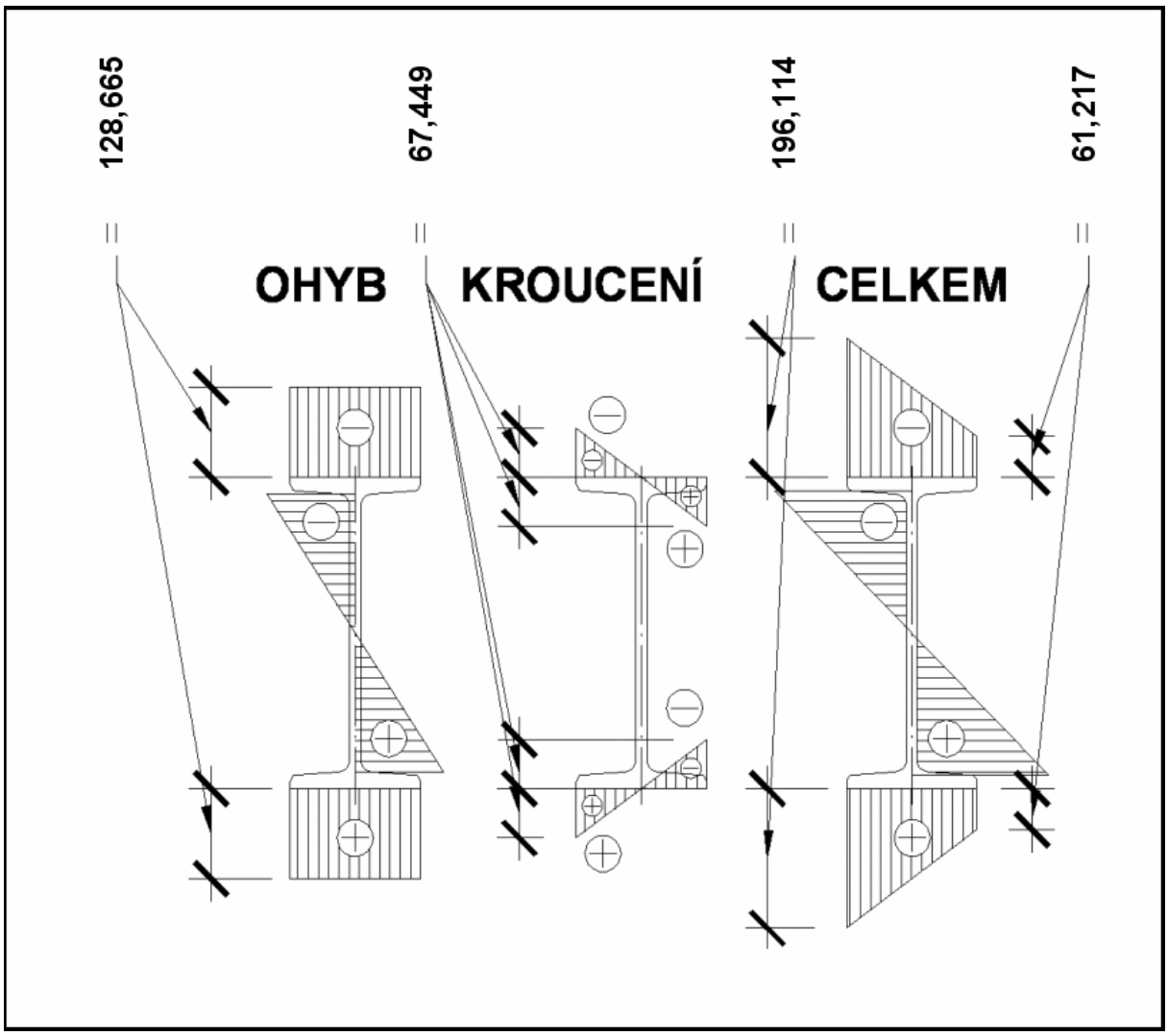
Ve stěně nosníku je smykové napětí od vázaného kroucení rovno nule, neboť je zde výsečová souřadnice a tedy i její statický moment roven nule. Největší normálové napětí bude v místě největšího ohybového momentu uprostřed rozpětí nosníku




**g) Průběh normálových napětí:**

$$\sigma_{x,\max} = \sigma_{x,b} + \sigma_{x,w} = 128,66 + 67,45 = \underline{\underline{196,114 MPa}}$$

$$\sigma_{x,\min} = \sigma_{x,b} - \sigma_{x,w} = 128,66 - 67,45 = \underline{\underline{61,22 MPa}}$$



**h) Průběh smykových napětí:**

ve stěně nosníku:

$$\tau_{\max} = \tau_b + \tau_t = 8{,}732 + 6{,}16 = \underline{\underline{14{,}89 MPa}}$$

v pásnici nosníku:

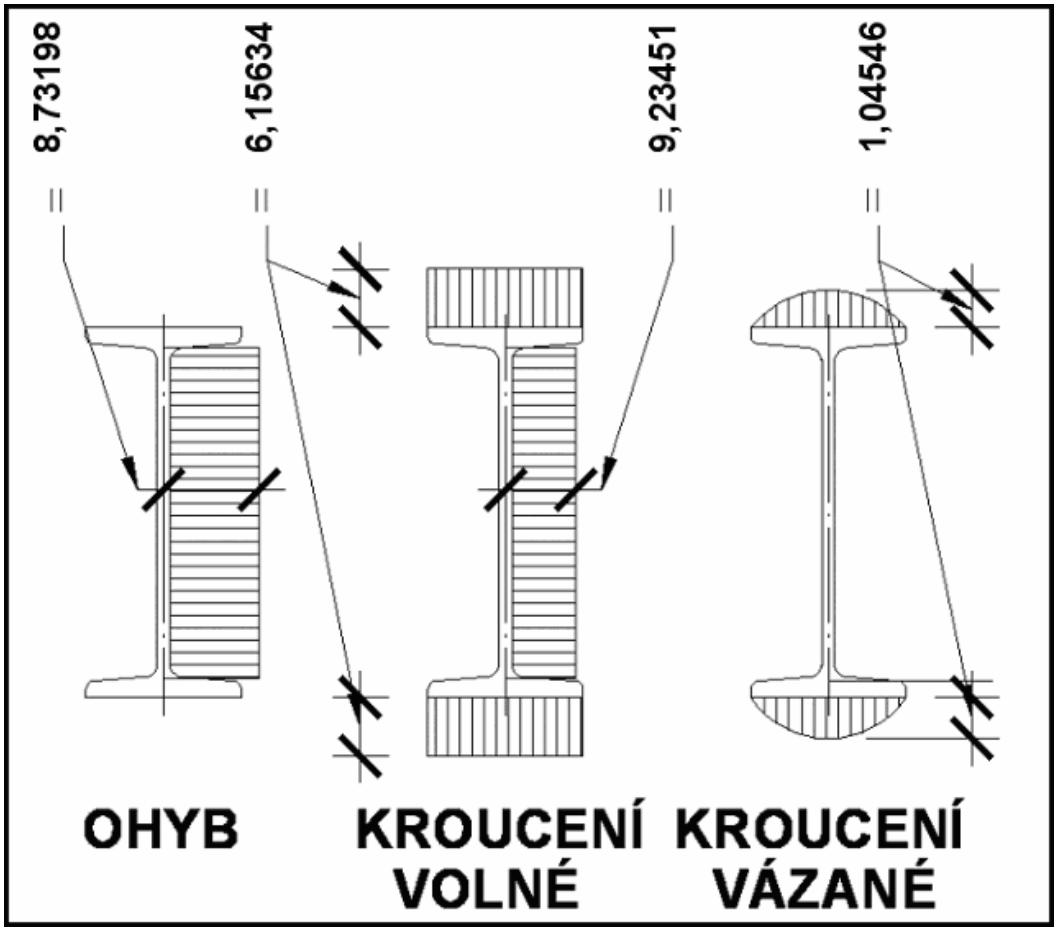
$$\tau_{\max} = \tau_b + \tau_t + \tau_w = 0 + 9{,}235 + 1{,}045 = \underline{\underline{10{,}28 MPa}}$$

Smyková napětí jsou menší než:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{f_y}{\gamma_{M_0}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{275}{1{,}15} = \underline{\underline{138{,}06 MPa}}$$

a jsou dokonce menší než

$$\frac{0{,}5 \cdot f_y / \gamma_{M_0}}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}5 \cdot 275 / \gamma_{M_0}}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{69{,}0310 MPa}}$$



# 6 Kontrolní otázky



1 *Kdy u prutů vzniká ohyb a kdy kroucení?*
2 *Jaký nosný systém pokládáme za tenkostěnný prut?*
3 *Co je střednice průřezu?*
4 *Čím se vyznačují svazkové průřezy?*
5 *Jaké hlavní body se určují v průřezu tenkostěnného prutu?*
6 *Definujte hlavní výsečovou souřadnici.*
7 *Kdy vzniká prosté kroucení?*
8 *Definujte vázané a složené kroucení.*
9 *Jaká napětí vznikají při prostém kroucení na otevřeném a uzavřeném průřezu?*
10 *Jaká přetvoření vznikají na krouceném prutu?*
11 *Jaké silové veličiny se určují u kroucených prutů?*
12 *Napište vztahy pro napětí, která vznikají při složeném kroucení.*
13 *Co je deplanace průřezu a jak závisí na hlavní výsečové souřadnici?*
14 *V čem je podstata analogie kroucení s ohybem?*
15 *Jaký význam má funkce úhlu pootočení při přesném řešení kroucení?*

# 7 Literatura


[1] Křupka, V. : Příčinkové čáry bimomentů a momentů kroutících. Inženýrské stavby. č. 10, 1959.

[2] Pan, V. : Statika tenkostěnných prutů a konstrukcí. Praha 1959.

[3] Faltus,F. : Ocelové konstrukce pozemního stavitelství. Praha 1960.

[4] Umanskij,A.A.: Stroitelnaja mechanika samol'ota. Moskva 1961.

[5] Vlasov,V.Z.: Tenkostěnné pružné pruty. Praha 1962.

[6] Mrazik,A.-Gruska,J.: Výpočet tenkostěnných prútov. VSAV, Bratislava 1965.

[7] Melcher,J.: Přibližný výpočet kroucených tenkostěnných prutů. Inženýrské stavby. Č. 6, 1968.

[8] Šertler, H.: Vliv kroutícího zatížení na přímo pojížděné mostní konstrukce s horní mostovkou. Inženýrské stavby. Č. 9. 1968.

[9] Svoboda, M.-Melcher,J.: Vybrané stati prvků ocelových konstrukcí. Brno 1970.

[10] Zborník- P'osobenie tenkostěnných otvorených a uzavretých prierezov. Bratislava 1972.

[11] Pechar,J.-Studnička,J.-Šafka,J.: Vybrané statě z ocelových konstrukcí. Praha 1973.

[12] Melcher,J. Ohyb, kroucení a stabilita ocelových nosníků. Knižnice odborných a vědeckých spisů VUT v Brně, svazek A-5, Brno 1975.

[13] Voříšek, V. a kol.: Prvky kovových konštrukcií. Bratislava 1983.

[14] Ferjenčík a kol.: Navrhovanie ocel'ových konštrukcií. Bratislava 1984.

[15] Sýkora, K.: Kovové konstrukce – pomůcka pro cvičení, VUT Brno, 1991

[16] Wald, F. a kol.: Prvky ocelových konstrukcí – Příklady podle Eurokódů, ČVUT Praha 1998