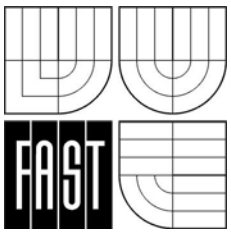
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Doc. Ing. ZDENĚK KALA, Ph.D.

PRUŽNOST A PEVNOST

MODUL BD05-M03

ANALÝZA TENKOSTĚNNÝCH PRUTŮ
PŘÍKLADY



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

© … Doc. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

OBSAH

1 Úvod 5
1.1 Cíle 5
1.2 Požadované znalosti 5
1.3 Doba potřebná ke studiu 5
1.4 Klíčová slova 5
2 Výsečové charakteristiky a střed smyku 6
2.1 Profil tvaru I 6
3 Výpočet napětí při ohybovém kroucení tenkostěnného prutu s otevřeným průřezem 9
3.1 Příklad výpočtu tenkostěnného prutu s otevřeným průřezem 9
4 Závěr 15
4.1 Shrnutí 15
4.2 Kontrolní otázky 15
5 Studijní prameny 15
5.1 Seznam použité literatury 15
5.2 Seznam doplňkové studijní literatury 15

1 Úvod

1.1 Cíle



Modul, který se chystáte studovat, obsahuje základní informace klasické teorie pružnosti tenkostěnných prutů otevřeného průřezu. Kapitoly modulu navazují na moduly BD02–MO1, BD02–MO1 a BD02–M03. Cílem je shrnout obecná témata, která jsou součástí nauky o pružnosti, a poskytnout učební text studentům distančního studia stavební fakulty. Všem uživatelům budu vděčný za upozornění na případné chyby a opomenutí v textu.

31. srpna 2007

Autor

1.2 Požadované znalosti



Student by měl mít základní znalosti z teoretických předmětů (zejména matematiky a fyziky) ze střední školy, rozšířené o znalosti z teoretických předmětů prvního ročníku matematika I, matematika II, základy stavební mechaniky a základní znalosti z pružnosti a pevnosti.

1.3 Doba potřebná ke studiu



Celková optimální doba pro prostudování uvedených příkladů je, včetně zopakování základních pojmů, 5 hodin.

1.4 Klíčová slova



Tenkostěnný prut otevřeného průřezu, Vlasovovy hypotézy, napětí, deplanace, volné a vázané kroucení, výsečová souřadnice, bimoment, ohybově krouticí moment, střed smyku.

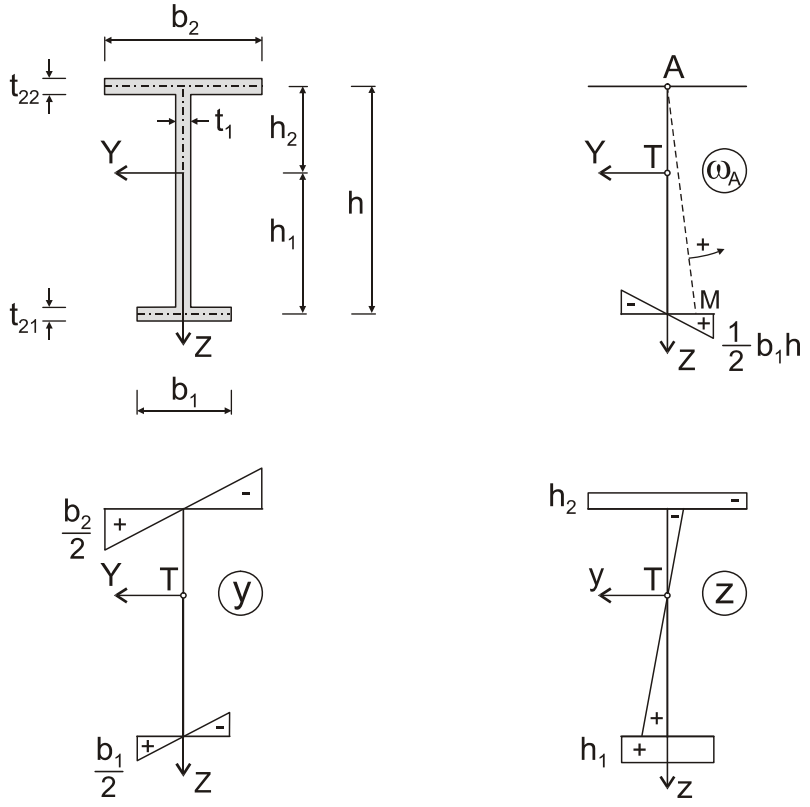
2 Výsečové charakteristiky a střed smyku

Při výpočtu napjatosti a deformace tenkostěnných prutů otevřeného průřezu je třeba kromě určení těžiště , statických momentů, momentů setrvačnosti a deviačních momentů třeba ještě určit:

- Souřadnice středu smyku.
- Polohu počátku výsečových souřadnic.
- Určit obrazce hlavních výsečových souřadnic ω.
- Vypočítat hodnoty výsečových statických momentů S_ω a výsečového momentu setrvačnosti I_ω.

2.1 Profil tvaru I

Zadání příkladu: Určete polohu středu smyku, polohu počátku výsečových souřadnic, vykreslete obrazce hlavních výsečových souřadnic a vypočítejte hodnotu výsečového statického momentu a výsečového momentu setrvačnosti tenkostěnného otevřeného jednoose symetrického I průřezu zobrazeného na obr. 1.



Obr. 1: Otevřené průřezy

Polohu středu smyku lze určit dle vztahu (3.38), viz [Mo]. Nejprve vypočítáme výsečové deviační momenty $I_{\omega y}$, $I_{\omega z}$ ke zvolenému středu otáčení A, který je výhodné si zvolit na průsečíku horního pásu a stojiny. Dále je třeba vykreslit průběhy *y*, *z*.

$$I_{\omega y} = \int_A z\omega(s)dA = \int_{h_1-\frac{t_{21}}{2}}^{h_1+\frac{t_{21}}{2}} \left(h_1 \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}b_1 h}{\frac{1}{2}b_1} y\, dy \right) dz = \int_{-\frac{t_{21}}{2}}^{\frac{t_{21}}{2}} \left(h_1 \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} -h\, y\, dy \right) dz = 0 \qquad (2.1)$$

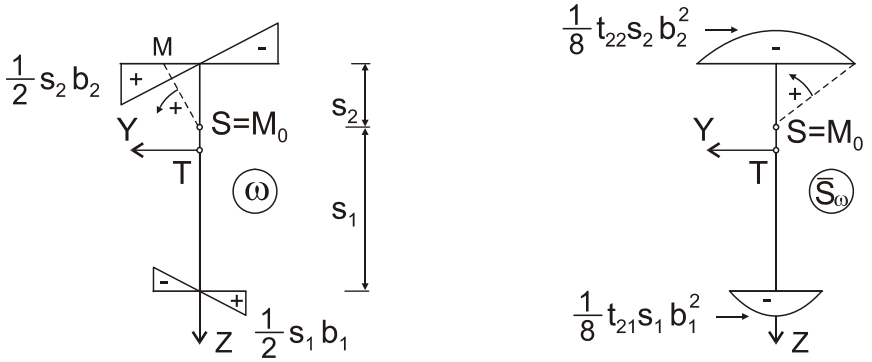
$$I_{\omega z} = \int_A y\omega(s)dA = \int_{h_1-\frac{t_{21}}{2}}^{h_1+\frac{t_{21}}{2}} \left(\int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} y \frac{-\frac{1}{2}b_1 h}{\frac{1}{2}b_1} y\, dy \right) dz = t_{21} \int_{-\frac{b_1}{2}}^{\frac{b_1}{2}} -h\, y^2\, dy = -t_{21} h \frac{b_1^3}{12} \qquad (2.2)$$

Z (2.1) plyne, že střed smyku leží na ose symetrie. Pro určení jeho druhé souřadnice je třeba vyjádřit moment setrvačnosti průřezu I_z k těžištní ose *z*. Zanedbáme-li malou hodnotu momentu setrvačnosti stojiny k ose *z* lze vzdálenost středu kroucení od pomocného pólu A zapsat jako:

$$z_S - z_A = -\frac{I_{\omega z}}{I_z} = -\frac{-t_{21} h \frac{b_1^3}{12}}{\frac{1}{12}t_{21}b_1^3 + \frac{1}{12}t_{22}b_2^3} \qquad (2.3)$$

$$z_S = z_A + \frac{b_1^3 h t_{21}}{b_1^3 t_{21} + b_2^3 t_{22}} \qquad (2.4)$$

Znaménko plus znamená, že střed smyku leží od pomocného bodu A ve směru kladné osy z. Podmínka $S_\omega = \int_A \omega(s)\, dA = 0$ může být splněna pouze tehdy, pokud počátek výsečových souřadnic nulový bod M_0 leží na ose symetrie. Průběh výsečové souřadnice $\omega = \int_{M_0}^{M} r \cdot ds$ je zobrazen na obr. 2.



Obr. 2: Průběh výsečové souřadnice ω a výsečového statického momentu $\overline{S}_\omega$.

Maximální hodnotu $\overline{S}_\omega$ na horní pásnici je rovna:

$$^{2}\max \overline{S}_\omega = \int_{-h_2-\frac{t_{22}}{2}}^{-h_2+\frac{t_{22}}{2}} \left(\int_{-\frac{b_2}{2}}^{0} s_2\ y\ dy \right) dz = -\frac{1}{8} t_{22} s_2 b_2^2 \qquad (2.5a)$$

$$^{1}\max \overline{S}_\omega = \int_{h_1-\frac{t_{21}}{2}}^{h_1+\frac{t_{21}}{2}} \left(\int_{0}^{\frac{b_1}{2}} -s_1\ y\ dy \right) dz = -\frac{1}{8} t_{21} s_1 b_1^2 \qquad (2.5b)$$

Na stojině je $\overline{S}_\omega = 0$, neboť zde neexistuje smykový tok. Výsečový moment setrvačnosti I_ω vypočítáme jako:

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = \int_{-h_2-\frac{t_{22}}{2}}^{-h_2+\frac{t_{22}}{2}} \left(\int_{-\frac{b_2}{2}}^{\frac{b_2}{2}} (s_2\ y)^2\ dy \right) dz + \int_{h_1-\frac{t_{21}}{2}}^{h_1+\frac{t_{21}}{2}} \left(\int_{\frac{b_1}{2}}^{-\frac{b_1}{2}} (-s_1\ y)^2\ dy \right) dz = \qquad (2.6)$$

$$= \frac{1}{12} t_{22} b_2^3 s_2^2 + \frac{1}{12} t_{21} b_1^3 s_1^2$$

Pokud do (2.6) dosadíme za s_1 a s_2 z (2.4) obdržíme výraz pro výsečový moment setrvačnosti I_ω:

$$I_\omega = \frac{b_1^3 b_2^3 h^2 t_{21} t_{22}}{12\left(t_{21} b_1^3 + t_{22} b_2^3\right)} \qquad (2.7)$$

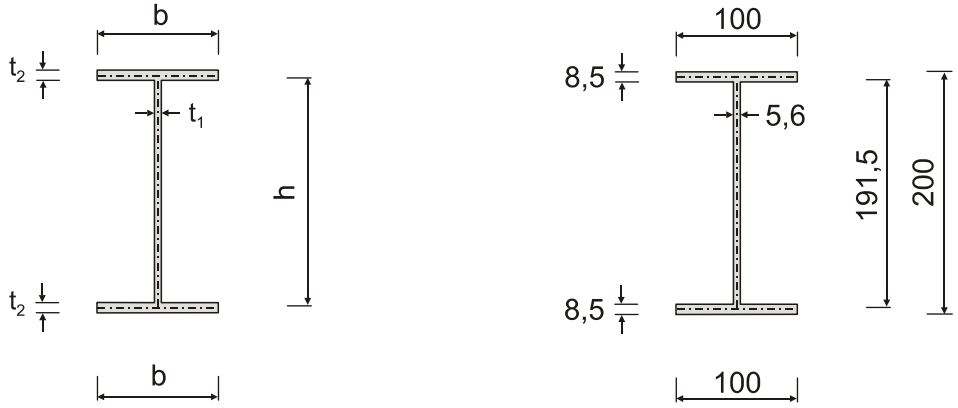
3 Výpočet napětí při ohybovém kroucení tenkostěnného prutu s otevřeným průřezem

Při výpočtu napjatosti tenkostěnných prutů otevřeného průřezu se postupuje podle těchto hlavních bodů:

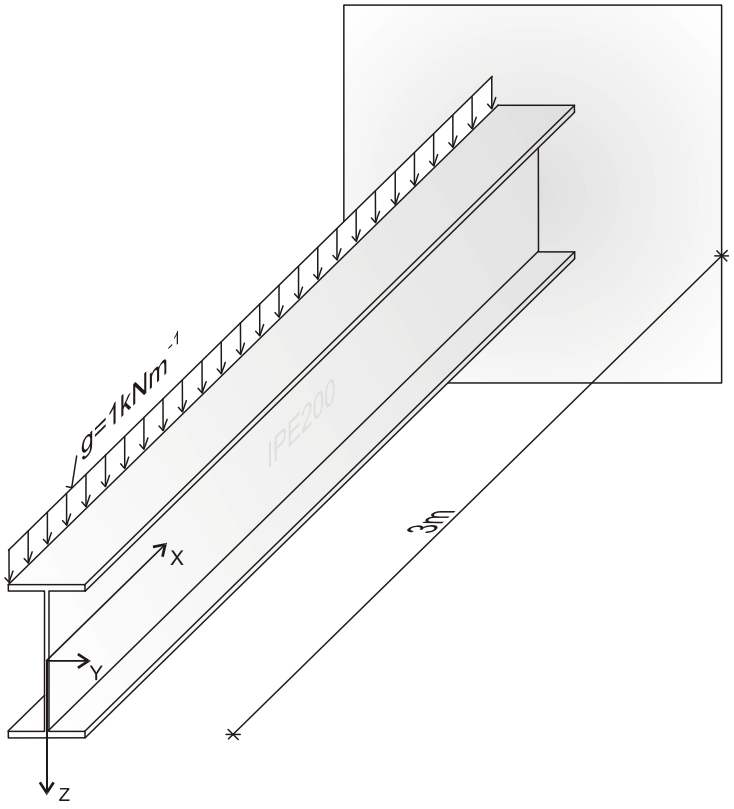
- Výpočet průřezových charakteristik.
- Rozdělení účinku zatížení na dílčí složky, přičemž normálová síla působí v těžišti, ohybové momenty působí kolem hlavních centrálních os setrvačnosti, posouvající síly působí rovnoběžně s hlavními osami setrvačnosti, krouticí moment působí kolem středu smyku.
- Za daných okrajových podmínek se stanoví $\varphi(x)$, $\Theta(x)=\varphi'(x)$, $B(x)$ a $M_\omega(x)$. Moment prostého kroucení $M_k(x)$ se určí odečtením $M_x(x)-M_\omega(x)$.
- Určíme normálové smykové napětí vázaného kroucení v tenkostěnném prutu.
- Vypočteme celková normálová a smyková napětí podle vztahů (3.51) a (3.76), které jsou uvedeny v [1].

3.1 Příklad výpočtu tenkostěnného prutu s otevřeným průřezem

Zadání příkladu: Tenkostěnný prut IPE200 z oceli S235 délky $L = 3$m je na jednom konci vetknutý a zatížený dle obr. 4. Vyšetřete u prutu rozložení normálových a smykových napětí.

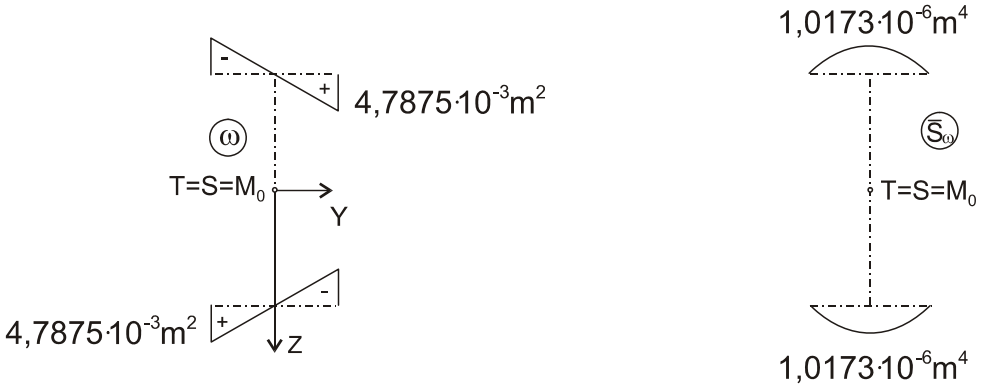


Obr. 3: Geometrie profilu IPE200



Obr. 4: Zatížení konzoly IPE200

V prvním kroku je třeba určit průběh výsečové souřadnice ω. Jelikož je průřez IPE200 dvouose symetrický, je střed smyku totožný s těžištěm. Průběh výsečové souřadnice a výsečového statického momentu $\overline{S}_\omega$ byl řešen v předchozím příkladu (viz obr. 2), přičemž pro zde řešený průřez IPE200 platí $b = b_1 = b_2 =$ 100 mm a $s = s_1 = s_2 =$ 95,75 mm, viz obr. 5.



Obr. 5: Průběh výsečové souřadnice ω

Výsečový moment setrvačnosti I_ω vypočítáme dle (2.7), přičemž pro dvouose symetrický průřez IPE se výpočtový vztah zjednoduší na tvar:

$$I_\omega = \frac{1}{24} b^3 h^2 t_2 = \frac{1}{24} 100^3 \cdot 191{,}5^2 \cdot 8{,}5 = 13 \cdot 10^9 \,\mathrm{mm}^6 \Rightarrow I_\omega = 13 \cdot 10^{-9} \,\mathrm{m}^6 \qquad (3.1)$$

Pro vyjádření konstanty k je třeba znát modul pružnosti oceli $E = 210\mathrm{GPa}$, modul pružnosti ve smyku oceli $G = 81\mathrm{GPa}$. Moment tuhosti průřezu v kroucení $I_t = 69{,}8 \cdot 10^3 \,\mathrm{mm}^4 = 69{,}8 \cdot 10^{-9} \,\mathrm{m}^4$ byl určen dle (3.73) v [1].

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 10^9 \;\; 6{,}98 \cdot 10^{-8}}{210 \cdot 10^9 \;\; 1{,}3 \cdot 10^{-8}}} = 1{,}439093121 \,\mathrm{m}^{-1} \qquad (3.2)$$

V teoretické části [1] je uvedeno řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení úplné rovnice ve tvaru (3.81). Po dosazení do tohoto řešení z předchozích vztahů obdržíme:

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= C_1 \cosh(1{,}4391 \cdot x) + C_2 \sinh(1{,}4391 \cdot x) \\ &- \frac{1{,}4391}{81 \cdot 10^9 \cdot 6{,}98 \cdot 10^{-8}} \int_0^x M_x(\xi) \sinh(1{,}4391 \cdot (x - \xi)) d\xi \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Krouticí moment $M_x(\xi)$ je dle orientace osy X a působení zatížení na obr. 4 záporný a je dán výrazem:

$$M_x(\xi) = -g \cdot \xi \cdot 0{,}05 = -1 \cdot 10^3 \,\mathrm{Nm} \cdot \xi \cdot 0{,}05\mathrm{m} \qquad (3.4)$$

Dosazením (3.4) do (3.3) obdržíme po úpravě výraz pro relativní úhel zkroucení:

$$\Theta(x) = C_1 \sinh(1{,}4391 \cdot x) + C_2 \cosh(1{,}4391 \cdot x) + \frac{1}{113{,}076} \left(\frac{\sinh(1{,}4391 \cdot x)}{1{,}4391} - x \right) \qquad (3.5)$$

Ve výrazu (3.5) jsou dvě neznámé konstanty C_1 a C_2, které je třeba určit z okrajových podmínek.

Okrajové podmínky jsou:

1) $x = 0$: Na začátku na volném konci nevzniká normálové napětí, tj. ohybově krouticí bimoment $B = 0 \Rightarrow \frac{d\Theta}{dx} = 0$.
2) $x = 3$ m: Na konci prutu vetknutí zcela znemožňuje deplanaci, tj. $\frac{d\Theta}{dx} = 0$.

Pro vyjádření první okrajové podmínky je třeba zapsat první derivaci (3.5).

$$\frac{d\Theta}{dx} = C_1 \cdot 1{,}4391 \cdot \cosh(1{,}4391 \cdot x) + C_2 \cdot 1{,}4391 \cdot \sinh(1{,}4391 \cdot x) + \\ + \frac{1}{113{,}076}\left(\cosh(1{,}4391 \cdot x) - 1\right) \tag{3.6}$$

Úpravou (3.6) zapíšeme rovnici první okrajové podmínky pro x=0 ve tvaru:

$$C_1 \cdot 1{,}4391 + C_2 \cdot 0 + \frac{1}{113{,}076}(1-1) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0 \tag{3.7}$$

Druhá okrajová podmínka má tvar:

$$\Theta(x) = C_1 \sinh(1{,}4391 \cdot 3) + C_2 \cosh(1{,}4391 \cdot 3) + \frac{1}{113{,}076}\left(\frac{\sinh(1{,}4391 \cdot 3)}{1{,}4391} - 3\right) = 0 \tag{3.8}$$

Z (3.8) lze vyjádřit konstantu $C_2 = -5{,}43557 \cdot 10^{-3}$. Pro vyjádření normálového napětí od vázaného kroucení je třeba vyjádřit funkci bimomentu:

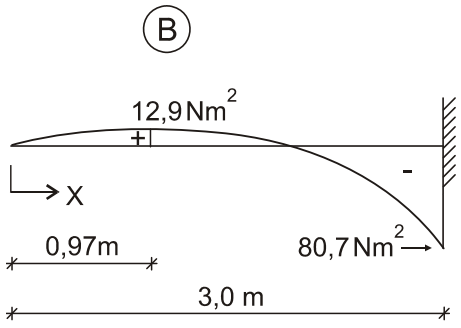
$$B = -EI_\omega \frac{d\Theta}{dx} = -210 \cdot 10^9 \;\cdot\; 13 \cdot 10^{-9} \cdot \\ \left(-5{,}43557 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}4391 \cdot \sinh(1{,}4391 \cdot x) + \frac{1}{113{,}076}\left(\cosh(1{,}4391 \cdot x) - 1\right)\right) = \\ = 21.355 \cdot \sinh(1{,}4391 \cdot x) - 24{,}143\left(\cosh(1{,}4391 \cdot x) - 1\right) = \tag{3.9}$$

$$= -1{,}394 \cdot e^{1{,}4391 \cdot x} - 22{,}749 \cdot e^{-1{,}4391 \cdot x} + 24{,}143 \qquad \left[\mathrm{Nm}^2\right]$$

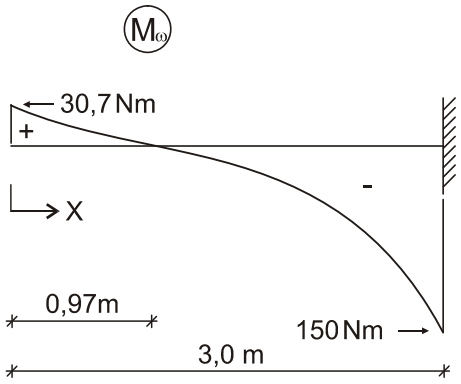
Funkce ohybově krouticího momentu M_ω se zapíše jako derivace bimomentu:

$$M_\omega = \frac{dB}{dx} = -2{,}0061 \cdot e^{1{,}4391 \cdot x} + 32{,}738 \cdot e^{-1{,}4391 \cdot x} \qquad \left[\mathrm{Nm}\right] \tag{3.10}$$

Položíme-li (3.10) rovno nule, obdržíme hodnotu x = 0,97 m pro kterou (3.9) nabývá extrému (minima). Průběhy funkce (3.9) a (3.10) jsou zobrazeny na obr. 6.



Obr. 6: Průběh bimomentu

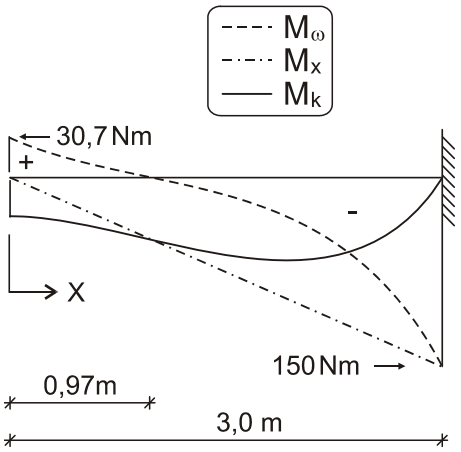


Obr. 7: Průběh momentu M_ω

Průběh krouticího momentu odpovídajícímu volnému kroucení M_k se vypočte dle vztahu: $M_k = M_x - M_\omega$:

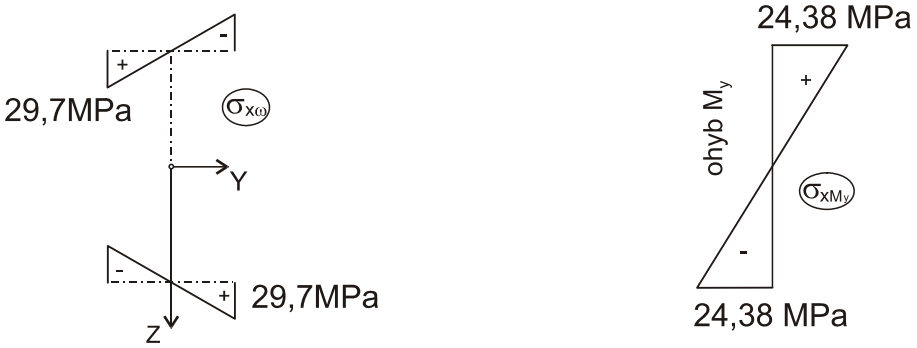
$$M_k = M_x - M_\omega = -1 \cdot 10^3 \cdot x \cdot 0{,}05 + 2{,}0061 \cdot e^{1{,}4391 \cdot x} - 32{,}738 \cdot e^{-1{,}4391 \cdot x} \qquad (3.11)$$

Průběh momentu odpovídajícímu volnému kroucení M_k po délce prutu je zobrazen na obr. 8.



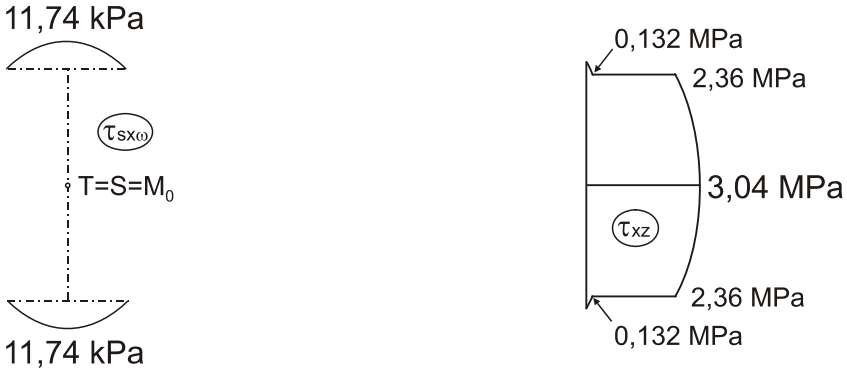
Obr. 8: Průběh kroutících momentů

Průběh normálového napětí od bimomentu je tvarově totožný s průběhem výsečové souřadnice ω, viz obr. 5. Normálové napětí od bimomentu a od ohybu kolem osy Y ve vetknutí je zobrazeno na obr. 9.



Obr. 9: Normálové napětí $\sigma_{x\omega}$ a $\sigma_{x_{My}}$ ve vetknutí

Průběh smykových napětí od ohybově krouticího momentu M_ω je tvarově totožný s průběhem výsečového statického momentu $\overline{S}_\omega$. Průběhy smykového napětí $\tau_{sx\omega}$ od ohybově krouticího momentu M_ω a smykového napětí za ohybu τ_{xz} ve vetknutí jsou zobrazeny na obr. 10.



Obr. 10: Průběhy smykového napětí $\tau_{sx\omega}$ a τ_{xz} ve vetknutí

Z obr. 8 je patrno, že krouticí moment M_k odpovídající volnému kroucení je ve vetknutí nulový. Moment M_k nabývá extrému $\max Mk = -66{,}28$ Nm pro x=1,94m, což jsme zjistili vyšetřením extrému funkce (3.11). Největší hodnota smykového napětí od prostého kroucení v tomto místě je na pásnici a má hodnotu:

$$\max^1 \tau_{sx} = \frac{M_k}{I_t} t_2 = \frac{66{,}28}{6{,}98 \cdot 10^{-8}} 0{,}0085 = 8{,}071 \text{ MPa} \qquad (3.12)$$

4 Závěr



Modul, který jste prostudovali, obsahuje příklady demonstrující aplikaci teoretických vztahů uvedených v modulu [1]. Předpokládá se, že student ovládá výpočet napjatosti a přetvoření prutů s masivními průřezy, viz moduly BD02–MO1, BD02–MO1 a BD02–M03. Jelikož se jedná o velice širokou oblast, nebyla zmíněna problematika posouzení a návrhu tenkostěnných prutů, což bude obsahem odborných předmětech dalších semestrů bakalářského studia a studia magisterského.

4.1 Shrnutí

Cílem předloženého textu bylo shrnutí obecných témat, která jsou tradiční součástí nauky o pružnosti a poskytnout učební text studentům distančního studia stavební fakulty.

4.2 Kontrolní otázky

- Jak se postupuje při výpočtu středu smyku?
- Z čeho se skládá krouticí moment M_x?
- Jak se postupuje při výpočtu bimomentu?
- Jak se vypočte ohybově krouticí (deplanační) moment?

5 Studijní prameny

5.1 Seznam použité literatury



[1] KALA, Z. Pružnost a pevnost – modul BD05-M02, Analýza tenkostěnných prutů.

5.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[2] SERVÍT, R. *Pružnost a pevnost ve stavitelství*, SNTL, Praha, 1966.

[3] SERVÍT, R., DOLEŽALOVÁ, E., CRHA, M. *Teorie pružnosti a plasticity I*, SNTL,ALFA, 1981.

[4] ŠMIŘÁK, S. *Pružnost a plasticita pro distanční studium, Nakladatelství VUT Brno*: 1995.