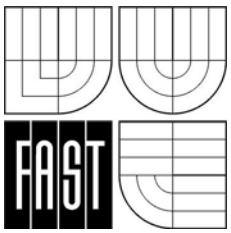
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Doc. Ing. ZDENĚK KALA, Ph.D.

PRUŽNOST A PEVNOST

MODUL BD05-MO2

ANALÝZA TENKOSTĚNNÝCH PRUTŮ



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

© … Doc. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D.

OBSAH

1 Úvod 5
1.1 Cíle 5
1.2 Požadované znalosti 5
1.3 Doba potřebná ke studiu 5
1.4 Klíčová slova 5
2 Úvodní pojmy 6
2.1 Tvar tenkostěnného prutu 6
2.2 Volné a vázané kroucení 7
2.2.1 Volné kroucení 7
2.2.2 Vázané kroucení 7
3 Řešení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu 9
3.1 Deformace prutu tenkostěnného otevřeného průřezu 9
3.2 Normálová napětí tenkostěnného otevřeného průřezu 16
3.3 Smyková napětí tenkostěnného otevřeného průřezu 22
3.3.1 Sekundární smyková napětí 22
3.3.2 Smyková napětí od volného kroucení 24
3.4 Diferenciální rovnice vázaného kroucení tenkostěnného otevřeného průřezu 30
4 Závěr 31
4.1 Shrnutí 31
4.2 Kontrolní otázky 31
5 Studijní prameny 31
5.1 Seznam použité literatury 31
5.2 Seznam doplňkové studijní literatury 31

1 Úvod

1.1 Cíle



Modul, který se chystáte studovat, obsahuje základní informace klasické teorie pružnosti tenkostěnných prutů otevřeného průřezu. Kapitoly modulu navazují na moduly BD02–MO1, BD02–MO1 a BD02–MO3. Cílem je shrnout obecná témata, která jsou součástí nauky o pružnosti, a poskytnout učební text studentům s kombinovanou formou studia stavební fakulty. Všem uživatelům budu vděčný za upozornění na případné chyby a opomenutí v textu.

31. srpna 2007

Autor

1.2 Požadované znalosti



Student by měl mít základní znalosti z teoretických předmětů (zejména matematiky a fyziky) ze střední školy, rozšířené o znalosti z teoretických předmětů prvního ročníku matematika I, matematika II, základy stavební mechaniky a základní znalosti z pružnosti a pevnosti.

1.3 Doba potřebná ke studiu



Celková optimální doba pro prostudování kapitoly 2 je, včetně zopakování základních pojmů, 1,5 hodiny. Studiu kapitoly 3 je třeba věnovat cca 16 hodin. Celková doba pro prostudování modulu tedy činí cca 17,5 hodin.

1.4 Klíčová slova



Tenkostěnný prut otevřeného průřezu, Vlasovovy hypotézy, napětí, deplanace, volné a vázané kroucení, výsečová souřadnice, bimoment, moment ohybového kroucení, střed smyku.

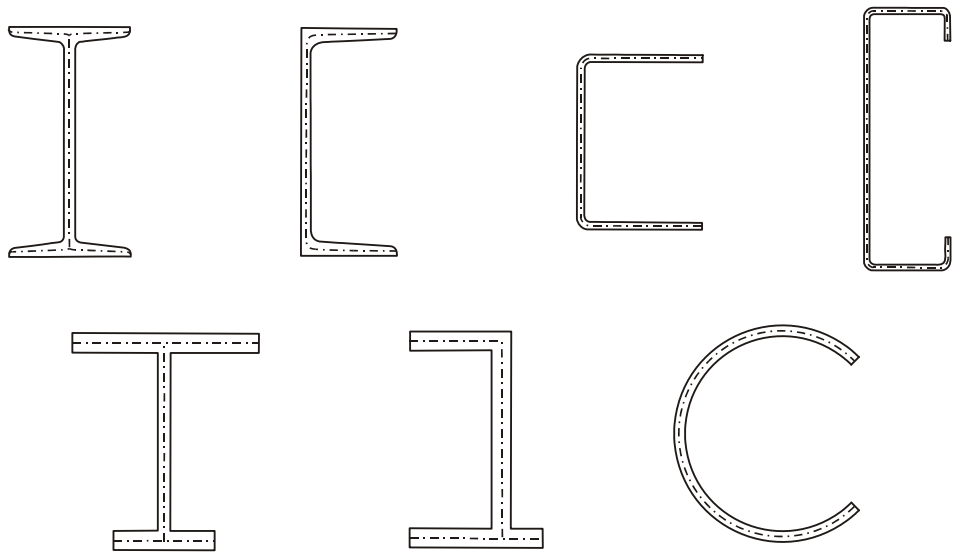
2 Úvodní pojmy

2.1 Tvar tenkostěnného prutu

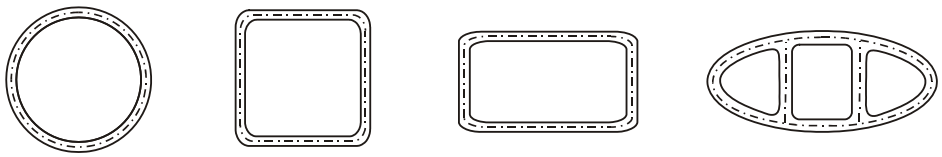
Prut se považuje za tenkostěnný, pokud je jeden z jeho příčných rozměrů (tloušťka příčného řezu) malý ve srovnání s rozměry obrysu příčného průřezu, které jsou zase malé ve srovnání s délkou prutu [1]. V praktických úlohách se obvykle předpokládá, že poměr tloušťky k rozměrům obrysu průřezu je u tenkostěnného prutu menší než 1:10, přičemž rozměry obrysu průřezu k délce prutu jsou rovněž menší než 1:10 [2].

Poznámka: Poměr 1:10 je pouze orientační.

Příčný průřez (profil) je otevřený, je-li jeho střednice neuzavřenou čarou; tvoří-li střednice jednu, nebo více uzavřených čar jedná se o průřez uzavřený. Body půlící tloušťku jednotlivých částí průřezu tvoří střednici průřezu. Ve výkladu se omezíme pouze na teorii prutů tenkostěnného otevřeného profilu, kterou v obecné formě vypracoval V. Z. Vlasov v roce 1962.



Obr. 1: Otevřené průřezy



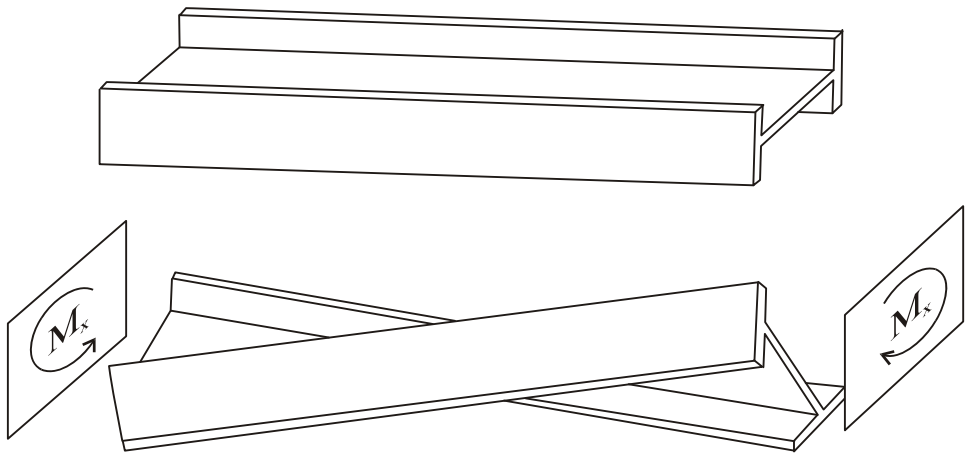
Obr. 2: Uzavřené průřezy

2.2 Volné a vázané kroucení

Analýza napjatosti a deformace tenkostěnných prutů je na rozdíl od namáhání prutů s masivními průřezy specifická tím, že při namáhaní kroucením nezůstávají průřezy rovinné, nýbrž mohou deplanovat (bortit se). U masivních průřezů obvykle není deplanace významná a proto ji zanedbáváme, ale u tenkostěnných průřezů, zejména otevřeného průřezu, ji musíme respektovat.

2.2.1 Volné kroucení

Jsou-li přitom podmínky kroucení takové, že příčné průřezy mohou volně deplanovat, nevznikají v průřezech žádná normálová napětí. Takový druh kroucení nazýváme *volným kroucením*; v opačném případě vzniká *kroucení vázané*.



Obr. 3: Deplanace průřezu I

Typický příklad deformace prutu namáhaného volným kroucením je zobrazen na obr. 3. Na volných koncích prutu profilu I působí krouticí momenty M_x stejné velikosti, ale opačného smyslu. Krouticí moment M_x je jediným zatěžovacím účinkem, tj. jedná se o *prosté kroucení*.

Průřez se sice bortí, ale vzdálenost mezi body na konci a na začátku prutu ležícími na rovnoběžce s osou prutu zůstává stejná jako před deplanací; příruby zůstávají rovinné. V důsledku toho normálová napětí nevznikají. Smyková napětí jsou ve všech průřezech stejná a po průřezu se mění v závislosti na tloušťce stěny, kde napětí zjišťujeme.

2.2.2 Vázané kroucení

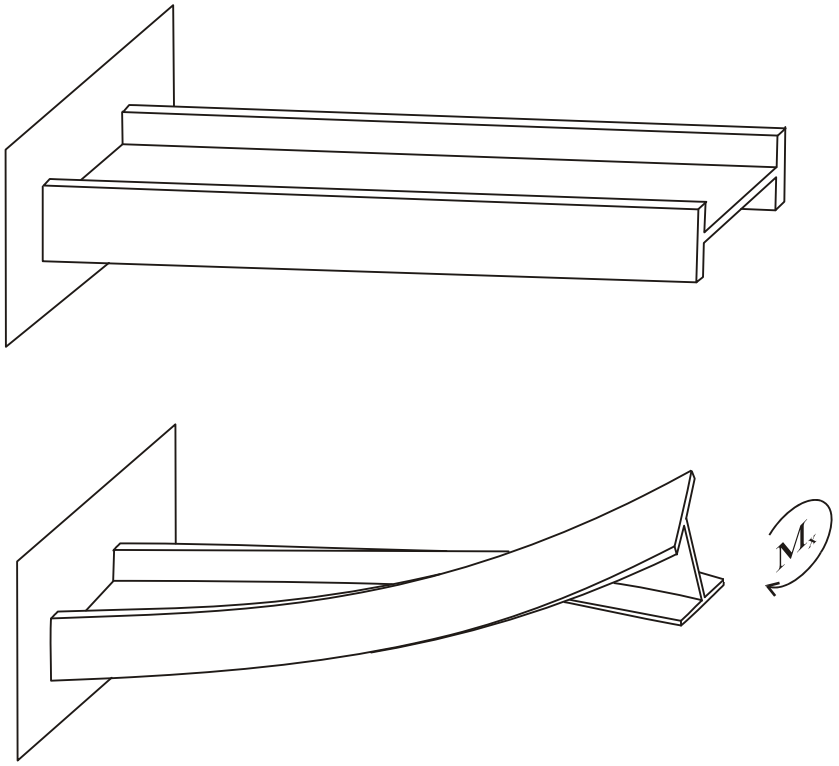
Volné kroucení se v praxi vyskytuje zřídka. Nejčastěji volnému kroucení brání tyto okolnosti:

a) Konstrukční uspořádání, např. způsob podepření (vetknutí konce prutu nebo jiné vazby bránící deplanaci).

b) Způsob zatížení prutu, např. změna krouticího momentu podél osy prutu.

c) Změna tvaru a rozměrů průřezu podél osy prutu.

Při vázaném (ohybovém) kroucení vznikají v důsledku omezené deplanace též normálová napětí. Uveďme jako příklad vázané kroucení prutu z obr. 3, u kterého vetknutím na levém konci zabráníme deplanaci, viz obr. 4.



Obr. 4: Vázané kroucení průřezu tvaru I

Vetknutý průřez zůstává rovinným a znemožňuje tak sousedním průřezů se volně bortit. Normálová napětí, která vznikají v důsledku zabránění deplanace, způsobí ohyb elementů prutu. Rozložení normálových napětí je v každém průřezu obecně různé a proto vzniknou v příčných i podélných řezech sekundární tečná napětí.

Kromě toho vznikají i primární smyková napětí vyvolaná volným kroucením. V průřezech tenkostěnného prutu vznikají při vázaném kroucení tyto druhy napětí:

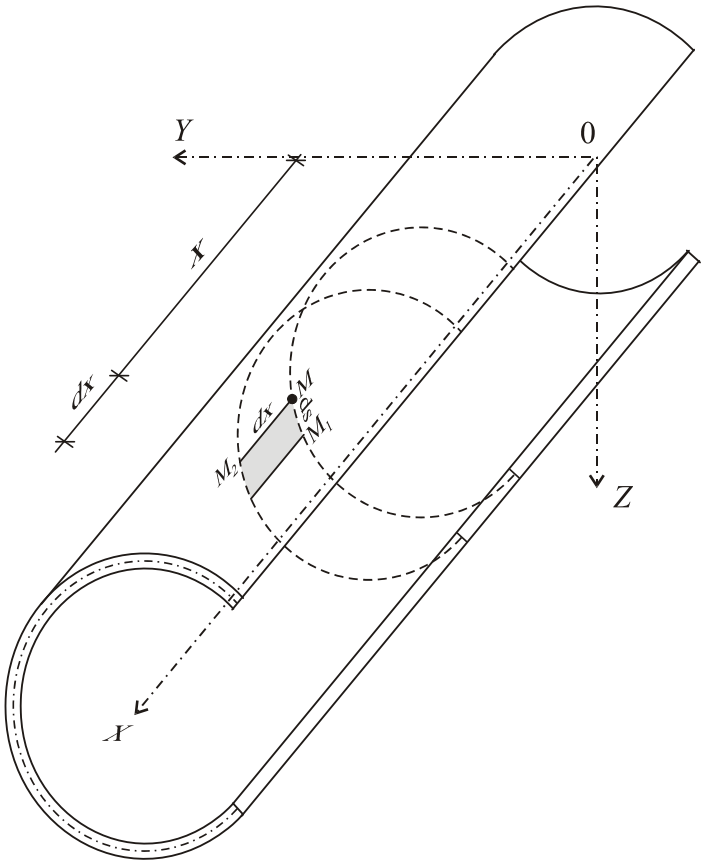
a) Smyková napětí volného kroucení
b) Normálová napětí vázaného kroucení
c) Smyková napětí vázaného kroucení

Ve výkladu se budeme zabývat výpočtem normálového napětí od tahu(tlaku), ohybu a kroucení a smykového napětí od kroucení a smyku za ohybu. Omezíme se přitom na přímé tenkostěnné pruty s konstantním průřezem bez imperfekcí.

3 Řešení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu

3.1 Deformace prutu tenkostěnného otevřeného průřezu

Uvažujme tenkostěnný prut otevřeného průřezu libovolného tvaru s počátkem kartézských souřadnic v těžišti průřezu, viz obr. 5. Osa *X* je rovnoběžná s osou prutu a osy *Y* a *Z* jsou hlavní osy setrvačnosti průřezu. Všechny rozměry průřezu budeme vztahovat ke *střednicové ploše*, která půlí tloušťku stěny průřezu, viz obr. 5. *Střednice průřezu* je tvořena průsečnicí střednicové plochy a rovinou příčného řezu průřezu.

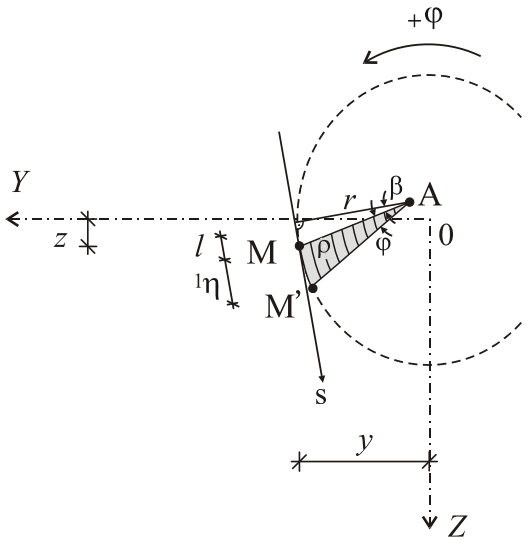


Obr. 5: Souřadný systém a geometrie tenkostěnného profilu

V. Z. Vlasov zavedl tyto zjednodušující předpoklady o deformaci tenkostěnného otevřeného profilu:

1) Kolmý průmět deformovaného průřezu do původní roviny se rozměry ani tvarem nemění, pouze se pootočí.
2) Pravoúhlé prvky střednicové plochy zůstanou pravoúhlými i po deplanaci, tj. jejich úhlová deformace γ_{xs} je nulová.

Z prvního předpokladu vyplývá, že průřezy se ve své rovině přemisťují jako tuhé celky.



Obr. 6: Pootočení bodu M kolem pevného bodu A

V důsledku působení krouticího momentu se průřez pootočí kolem jistého pevného bodu A (středu otáčení). Libovolný bod M(y, z) střednice průřezu x = konst. opíše při tuhém pootočení profilu z M do M' o úhel φ oblouk, jehož průmět do směru tečny střednice s v bodě M označíme ${}^1\eta$, viz obr. 6.

$$ {}^1\eta = r \cdot \varphi \tag{3.1} $$

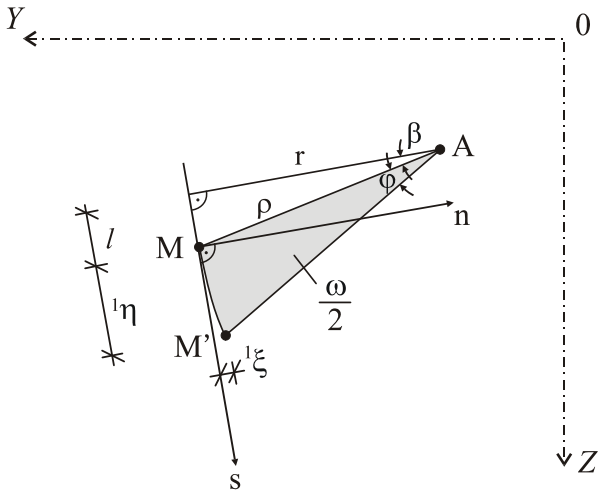
kde r je vzdálenost mezi tečnou a bodem A, φ je úhel pootočení průřezu. Tento úhel je funkcí x, jelikož má v různých průřezech různou hodnotu.

Další složkou přemístění bodu M kolmou na směr s je ${}^1\xi$, viz obr. 7.

$$ {}^1\xi = l \cdot \varphi \tag{3.2} $$

kde l je vzdálenost mezi průnikem tečny a její kolmicí k bodu A a bodem M.

Při obecném zatížení prutu budou na uvažovaný průřez kromě krouticího momentu působit také ohybové momenty M_y, M_z, posouvající síly V_y, V_z a normálová síla N_x. Vlivem ohybových momentů a normálové síly se bod M (kromě přemístění po oblouku) ještě posune.
Složky přemístění ${}^1\eta$, ${}^1\xi$ a ${}^2\eta$, ${}^2\xi$ jsou kladné ve smyslu kladných s, n.

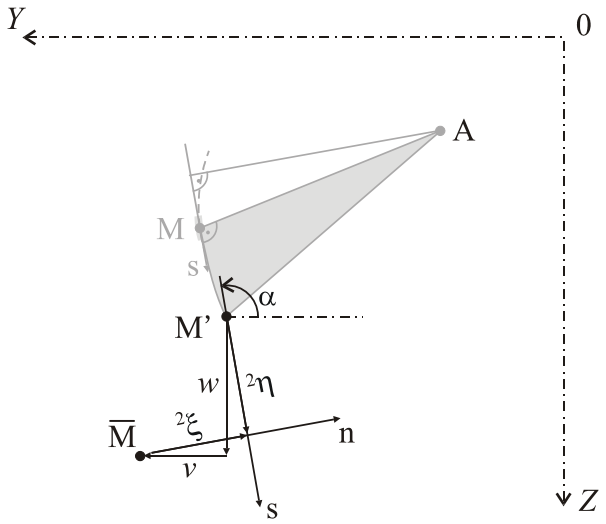


Obr. 7: Pravoúhlé složky přemístění pootočení bodu M

V souladu s obr. 7 a v návaznosti na (3.1), (3.2) dostáváme:

$$^{1}\eta = r \cdot \varphi = \varphi \cdot \rho \cdot \cos\beta \tag{3.3}$$

$$^{1}\xi = l \cdot \varphi = \varphi \cdot \rho \cdot \sin\beta \tag{3.4}$$



Obr. 8: Pravoúhlé složky přemístění translace bodu M

Přemístění $^{2}\eta$, $^{2}\xi$ ve směru střednice průřezu *s* a normály *n* bodu M' do bodu $\overline{\mathrm{M}}$ v důsledku translace *w*, *v* je zobrazeno na obr. 8.

$$^{2}\eta = w \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha \tag{3.5}$$

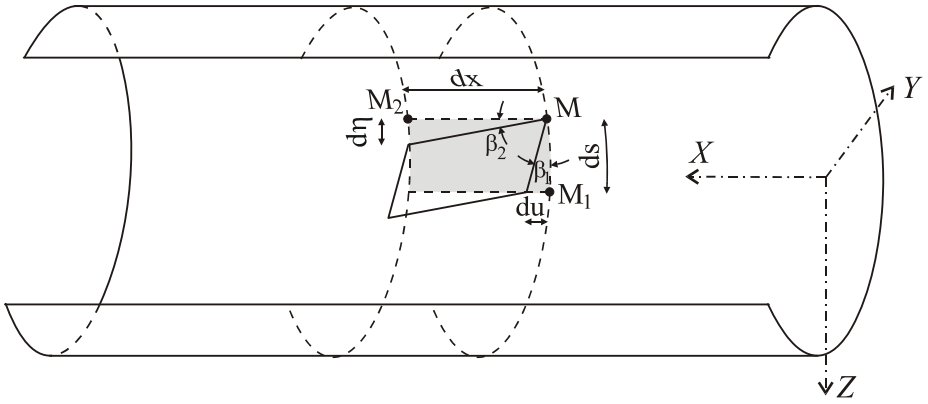
$$^{2}\xi = w \cdot \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha \tag{3.6}$$

Celkové přemístění η, ξ lze odvodit superponováním účinků rotace a účinků translace.

$$\eta = {}^{1}\eta + {}^{2}\eta = r \cdot \varphi + w \cdot \sin\alpha + v \cdot \cos\alpha \tag{3.7}$$

$$\xi = {}^{1}\xi + {}^{2}\xi = l \cdot \varphi + w \cdot \cos\alpha - v \cdot \sin\alpha \tag{3.8}$$

Deplanaci průřezu určuje posun u ve směru osy X. Uvažujme elementární obdélník o stranách *dx* a *ds*, který vyjmeme ze střednicové plochy v okolí bodu M, viz obr. 5. Posuv bodu M_1 ve směru osy *X* se liší od posunu bodu M v témže směru o hodnotu *du* a obdobně posun M_2 ve směru tangenty k obrysu v bodu M se liší od posunu bodu M v témže směru o hodnotu $\mathrm{d}\eta$.



Obr. 9: Pravoúhlé složky přemístění translace bodu M

Úhlová deformace v bodu M pak je:

$$\gamma_{xs} = \tan\beta_1 + \tan\beta_2 = \frac{du}{ds} + \frac{d\eta}{dx} \tag{3.9}$$

Protože $du = ds \cdot \partial u / \partial s$, $d\eta = dx \cdot \partial \eta / \partial x$, lze vztah (3.9) zapsat jako

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3.10}$$

Podle druhého zjednodušujícího předpokladu Vlasovovy hypotézy předpokládáme pro otevřené tenkostěnné průřezy $\gamma_{xs} = 0$, tj.:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \tag{3.11}$$

Hledaný posun u obdržíme parciální integrací rovnice (3.11) po obrysu profilu s:

$$u(x) = u_0(x) - \int_0^s ds \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{3.12}$$

kde $u_0(x)$ je posun ve směru osy X toho bodu M_0 příčného řezu, od kterého integrujeme proti směru chodu hodinových ručiček. Dále vyjádříme $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ pomocí rovnice (3.7).

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dw}{dx} \cdot \sin\alpha + \frac{dv}{dx} \cdot \cos\alpha \tag{3.13}$$

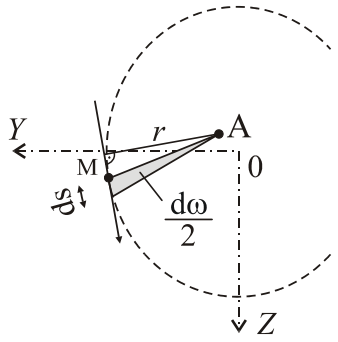
Z obr. 8 je patrno, že $\frac{dy}{ds} = \cos\alpha$, $\frac{dz}{ds} = \sin\alpha$, tj. vztah (3.13) lze zapsat ve tvaru:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = r \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} \tag{3.14}$$

Dále označíme dvojnásobnou hodnotu plošky elementární výseče $r \cdot ds$ jako elementární výsečovou souřadnici $d\omega$:

$$\frac{d\omega}{2} = \frac{1}{2} r \cdot ds \tag{3.15}$$

Výsečová souřadnice ω se určí z (3.15) křivkovým integrálem z M_0 do M (určením počátku výsečových souřadnic M_0 bude odvozeno v dalších odstavcích kapitoly).



Obr. 10: Elementární výsečová plocha bodu M

Z (3.14) a (3.15) lze zapsat (3.16):

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{d\omega}{ds} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} \tag{3.16}$$

Pokud pravou stranu rovnice (3.16) dosadíme do (3.12) obdržíme (3.17).

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0(x) - \int_0^s \left(\frac{d\omega}{ds} \cdot \frac{d\varphi}{dx} + \frac{dw}{dx} \cdot \frac{dz}{ds} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dy}{ds} \right) ds = \\ &= u_0(x) - \left(\frac{d\varphi}{dx} \int_0^s d\omega + \frac{dw}{dx} \int_0^s dz + \frac{dv}{dx} \int_0^s dy \right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Úpravou (3.17) obdržíme vztah (3.18).

$$u(x) = u_0(x) - \frac{d\varphi}{dx} \omega(s) - \frac{dw}{dx} z - \frac{dv}{dx} y \tag{3.18}$$

kde $\omega(s)$ je tzv. výsečová souřadnice.

- První člen $u_0(x)$ v rovnici (3.18) představuje vliv prostého tahu (nebo tlaku).
- Druhý člen přestavuje deplanaci průřezu. Protože $\frac{d\varphi}{dx}$ je pro daný průřez konstantní, je deplanace úměrná hodnotě $\omega(s) = \int_0^s d\omega = \int_0^s r \cdot ds$, tedy i velikosti plochy výseče, kterou opsal průvodič r s centrem v A od hlavního nulového bodu M_0 (tj. od bodu, pro který $\omega_{M_0} = 0$) až po bod M.
- Třetí člen představuje rovinné přetvoření od prostého ohybu kolem osy Y.
- Čtvrtý člen představuje rovinné přetvoření od prostého ohybu kolem osy Z.



Poznámka: Bod A je tzv. pól výsečových souřadnic, který je středem kroucení a jehož určení spolu s určením počátku výsečových souřadnic M_0 bude odvozeno v dalších odstavcích kapitoly.

Pokud v rovnici (3.18) použijeme tzv. relativní úhel zkroucení

$$\Theta = \frac{d\varphi}{dx} \tag{3.19}$$

tak ji lze zapsat ve tvaru:

$$u(x) = u_0(x) - \Theta\omega(s) - w'z - v'y \tag{3.20}$$

První geometrická podmínka $\gamma_{xs} = 0$, ze které jsem při odvození vycházeli byla zapsána ve tvaru (3.11). Z Vlasovových předpokladů lze dále zapsat geometrické podmínky:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.21}$$

$$\varepsilon_s = 0 \tag{3.22}$$

Pokud do (3.21) dosadíme z (3.20) obdržíme vztah pro poměrné podélné přetvoření ve tvaru (3.23):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u_0' - \Theta'\omega(s) - w''z - v''y \tag{3.23}$$



3.2 Normálová napětí tenkostěnného otevřeného průřezu

Při odvození vztahu pro určení normálového napětí budeme vycházet z fyzikálních rovnic:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{E}\left(\sigma_s - \mu\sigma_x\right) \tag{3.24}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_s\right) \tag{3.25}$$

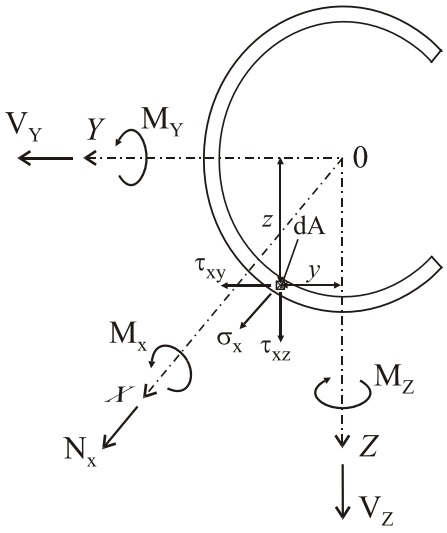
Z (3.24), (3.25) a (3.22) lze zapsat

$$\sigma_s = \mu\sigma_x \tag{3.26}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\varepsilon_x \tag{3.27}$$

kde μ je Poissonův součinitel. Zanedbáme-li v (3.27) μ^2 oproti 1, lze po dosazení (3.23) do (3.27) zapsat ve tvaru:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(u_0' - \Theta'\omega(s) - w''z - v''y\right) \tag{3.28}$$



Obr. 11: Vnitřní síly a napětí působící na průřezu

Nechť na příčný řez působí obecná síla (nahrazující navazující část prutu) o složkách N_x, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z. Kladné působené těchto složek je znázorněno na obr. 11. Hodnoty složek N_x, V_y, V_z, M_x, M_y, M_z se určí z podmínek rovnováhy:

$$\sum X = 0 \qquad \int_A \sigma_x dA = N_x \tag{3.29a}$$

$$\sum Y = 0 \qquad \int_A \tau_{xy} dA = V_y \tag{3.29b}$$

$$\sum Z = 0 \qquad \int_A \tau_{xz} dA = V_z \tag{3.29c}$$

$$\sum M_x = 0 \qquad \int_A \left(\tau_{xz} y - \tau_{xy} z\right) dA = M_x \tag{3.29d}$$

$$\sum M_y = 0 \qquad \int_A \sigma_x z \, dA = M_y \tag{3.29e}$$

$$\sum M_z = 0 \qquad \int_A \sigma_x y \, dA = -M_z \tag{3.29f}$$

Normálová napětí σ_x se podílí na složkách N_x, M_y, M_z ve vztazích (3.29a), (3.29e) a (3.29f). Dosazením (3.28) do (3.29a), (3.29e) a (3.29f) obdržíme:

$$N_x = E\left(u_0' \int_A dA - \Theta' \int_A \omega(s) dA - w'' \int_A z \, dA - v'' \int_A y \, dA\right) \tag{3.30a}$$

$$-M_z = E\left(u_0' \int_A y dA - \Theta' \int_A y\omega(s) dA - w'' \int_A yz \, dA - v'' \int_A y^2 \, dA\right) \tag{3.30b}$$

$$M_y = E\left(u_0' \int_A z dA - \Theta' \int_A z\omega(s) dA - w'' \int_A z^2 \, dA - v'' \int_A yz \, dA\right) \tag{3.30c}$$

V rovnicích (3.30) je devět různých integrálů definujících geometrické charakteristiky průřezu:

Průřezová plocha:

$$A = \int_A dA \qquad [\mathrm{m}^2] \tag{3.31}$$

Statické momenty průřezové plochy k osám Y, Z:

$$S_y = \int_A z \, dA \quad , \qquad S_z = \int_A y \, dA \qquad [\mathrm{m}^3] \tag{3.32}$$

Momenty setrvačnosti:

$$I_y = \int_A z^2 \, dA \quad , \qquad I_z = \int_A y^2 \, dA \qquad [\mathrm{m}^4] \qquad (3.33)$$

Deviační moment:

$$D_{yz} = \int_A yz \, dA \qquad [\mathrm{m}^4] \qquad (3.34)$$

Výsečový statický moment:

$$S_\omega = \int_A \omega(s) \, dA \qquad [\mathrm{m}^4] \qquad (3.35)$$

Výsečové deviační momenty:

$$I_{\omega y} = \int_A z\omega(s) dA \, , \qquad I_{\omega z} = \int_A y\omega(s) dA \qquad [\mathrm{m}^5] \qquad (3.36)$$

Jelikož byly osy setrvačnosti zavedeny jako centrální, tak platí, že $S_y = S_z = 0$. Podmínky rovnováhy (3.30) se podstatně zjednoduší, pokud:

$$I_{\omega y} = 0 \, , \qquad I_{\omega z} = 0 \qquad (3.37a)$$

$$S_\omega = 0 \qquad (3.37b)$$

Rovnice (3.37a) jsou automaticky splněny, pokud je střed otáčení A totožný s tzv. středem smyku $\mathrm{A} \equiv \mathrm{S}$.



Střed smyku je takový bod v průřezu prutu, jímž musí procházet vektor posouvajících sil, aby prut byl pouze ohýbán.

Pevný střed otáčení $\mathrm{A} \equiv \mathrm{S}$ se nazývá hlavním pólem pro vytvářený výsečové plochy, přičemž jeho umístění ve středu smyku vyplývá z rozkladu přemístění tuhého průřezu na posuny v, w a pootočení φ kolem A, které jsme odvodili v kapitole 3.1.

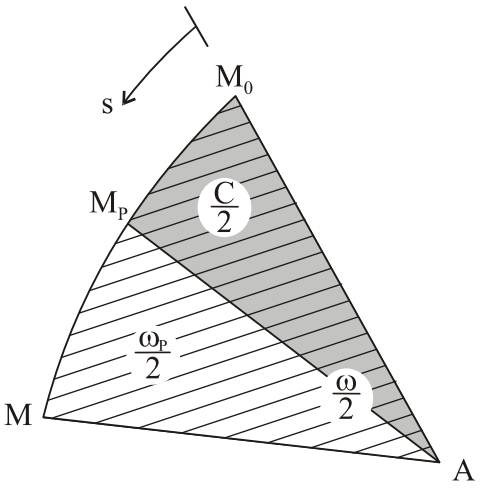
Při předchozím odvozování jsme střed otáčení A zvolili libovolně souřadnicemi y_A, z_A. Pro pól výsečových souřadnic A totožný se středem smyku S, je možno s přihlédnutím k (3.37a) zapsat:

$$y_S - y_A = \frac{I_{\omega y}}{I_y} \tag{3.38a}$$

$$z_S - z_A = -\frac{I_{\omega z}}{I_z} \tag{3.38b}$$

Dále budeme požadovat, aby byla splněna podmínka (3.37b). Z této podmínky určíme počátek výsečových souřadnic tzv. *nulový bod* M_0.

Označme ω *jako výsečovou souřadnici uvažovanou od bodu* M_0 a ω_P jako výsečovou souřadnici uvažovanou od bodu M_P, viz obr. 12.



Obr. 12: Určení nulového bodu M_0

Rozdíl $\omega - \omega_P$ je pro každý bod obrysu M konstantní, tj.:

$$\omega - \omega_P = C \tag{3.39}$$

S přihlédnutím k (3.15) lze (3.39) zapsat přehledněji ve tvaru:

$$\int_{M_0}^{M} r\, ds - \int_{M_P}^{M} r\, ds = \int_{M_0}^{M_P} r\, ds \tag{3.40}$$

Dosadíme-li (3.39) do (3.37b) obdržíme:

$$S_\omega = \int_A \omega\, dA = \int_A \omega_P\, dA + C\int_A dA = 0 \tag{3.41}$$

Hledanou konstantu C vypočteme z (3.41) ve tvaru:

$$C = \frac{-\int_A \omega_P \, dA}{A} \tag{3.42}$$

$$\omega = \omega_P + C = \omega_P - \frac{\int_A \omega_P \, dA}{A} = \omega_P - \frac{S_{\omega_P}}{A} \tag{3.43}$$

V návaznosti na (3.37) lze rovnice (3.30) zjednodušit do tvaru

$$N_x = E\, u_0' \int_A dA = EAu_0' \tag{3.44a}$$

$$-M_z = E\left(-w'' \int_A yz \, dA - v'' \int_A y^2 \, dA \right) = -Ew'' D_{yz} - Ev'' I_z \tag{3.44b}$$

$$M_y = E\left(-w'' \int_A z^2 \, dA - v'' \int_A yz \, dA \right) = -Ew'' I_z - Ev'' D_{yz} \tag{3.44c}$$

K tomu, abychom mohli dosadit do rovnice pro normálové napětí (3.28) je třeba řešení (3.44b) a (3.44c) vyjádřit druhé derivace posunů:

$$v'' = \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{E\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)} \tag{3.45a}$$

$$w'' = -\frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{E\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)} \tag{3.45b}$$

Dosadíme-li do rovnice pro normálové napětí (3.28) ze vztahů (3.44a), (3.45a) a (3.45b) obdržíme:

$$\begin{aligned} \sigma_x = E\varepsilon_x = E\left(u_0' - \Theta'\omega(s) - w'' z - v'' y\right) = \\ \frac{N_x}{A} - E\Theta'\omega + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{E\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)} z - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{E\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)} y \end{aligned} \tag{3.46}$$

K úplnému zjištění normálového napětí je třeba určit funkci $\varphi(x)$, přičemž v (3.28) se uplatní její derivace Θ'. Označíme-li příspěvek normálového napětí vázaného kroucení v (3.28) jako:

$$\sigma_{x\omega} = -E\Theta'\omega = -E\varphi''\omega \tag{3.47}$$

Pokud rovnici (3.47) vynásobíme hodnotou ω a integrujeme ji po průřezové ploše, tak obdržíme:

$$\int_A \sigma_{x\omega}\omega \, dA = -E\varphi'' \int_A \omega^2 dA \tag{3.48}$$

Výraz na levé straně má statický význam a jmenuje se *ohybově krouticí bimoment B* [N m^{-2} m^2]. Integrál na pravé straně je další geometrická charakteristika průřezu, která se jmenuje výsečový moment setrvačnosti I_ω [m^6]. Rovnici (3.47) je pak možno zapsat ve tvaru:

$$B = -E\varphi'' I_\omega \tag{3.49a}$$

odtud

$$-E\varphi'' = -E\Theta' = \frac{B}{I_\omega} \tag{3.49b}$$

Dosazením (3.49b) do (3.46) obdržíme vzorec pro normálové napětí σ_x ve tvaru:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{B}{I_\omega}\omega + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2} y \tag{3.50}$$



Vztah (3.50) je rozšířením obdobného výrazu odvozeného pro masivní pruty o člen obsahující vliv bimomentu. Budou-li osy souřadnic hlavními centrálními osami setrvačnosti průřezu, vztah (3.50) se dále zjednoduší:

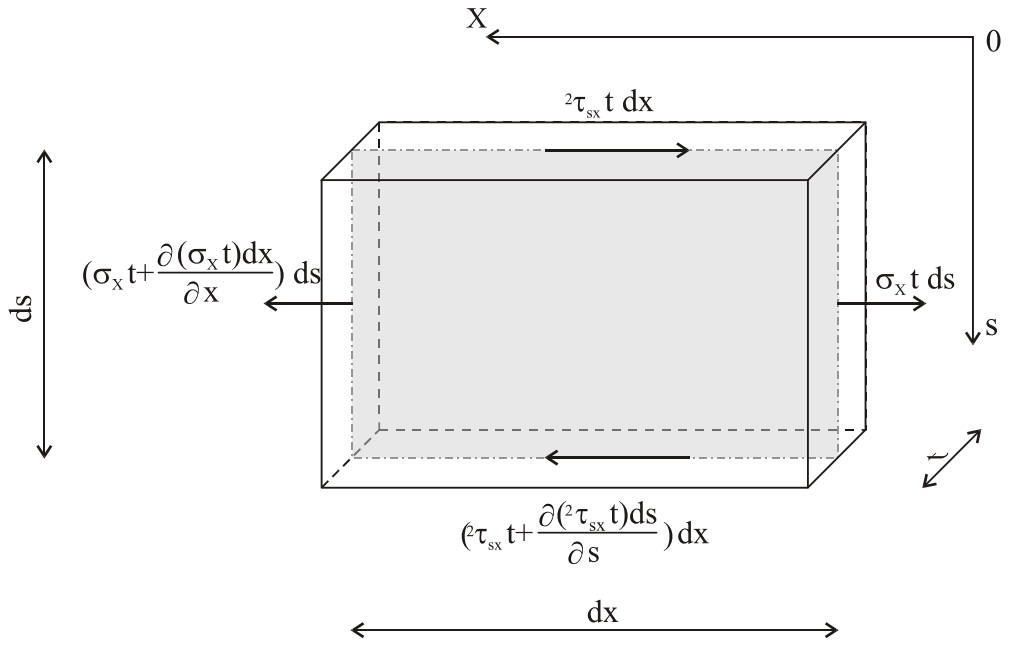
$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{B}{I_\omega}\omega + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \tag{3.51}$$



3.3 Smyková napětí tenkostěnného otevřeného průřezu

3.3.1 Sekundární smyková napětí

V prvním kroku odvodíme výpočtový vztah pro smyková napětí ${}^{2}\tau_{sx}$, jejichž existence je vázána na normálová napětí. Uvažujme elementární prvek o hranách *dx*, *ds* a konstantní tloušťce *t*.



Obr. 13: Silové působení na elementární prvek tenkostěnného profilu

Rovnice rovnováhy podle obr. 13 má tvar:

$$\left(\sigma_x + dx\,\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)t\;ds - \sigma_x\;t\;ds + \left({}^{2}\tau_{sx} + ds\,\frac{\partial\left({}^{2}\tau_{sx}\right)}{\partial s}\right)t\;dx - {}^{2}\tau_{sx}t\;dx = 0 \tag{3.52}$$

Úpravou vztahu (3.52) obdržíme vztah (3.53) mezi smykovým tokem a normálovým napětím:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\left({}^{2}\tau_{sx}\right)}{\partial s} = 0 \tag{3.53}$$

Integrací (3.53) po obvodu střednice průřezu obdržíme výraz pro sekundární smykové napětí ${}^2\tau_{sx}$:

$$ {}^2\tau_{sx} = -\int_0^s \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} ds + f(x) \tag{3.54} $$

Pokud na povrchu prutu nepůsobí smykové napětí tak f(x)=0. Do rovnice (3.54) dosadíme za σ_x pravou stranu rovnice (3.50):

$$ {}^2\tau_{sx} = -\frac{B'}{I_\omega}\int_0^s \omega\, ds - \frac{M_y' I_z + M_z' D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2}\int_0^s z\, ds + \frac{M_z' I_y + M_y' D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2}\int_0^s y\, ds \tag{3.55} $$

Předpokládáme, že zatížení ve směru osy X je konstantní, tj. $N' = 0$. Podle Schwedlerovy věty platí, že:

$$ M_y' = V_z, \qquad -M_z' = V_y \tag{3.56} $$

Pokud označíme $dA = t\, ds$ lze s přihlédnutím k (3.56) rovnici (3.55) zapsat jako:

$$ {}^2\tau_{sx} = -\frac{B'}{I_\omega\ t}\int_0^s \omega\, dA + \frac{-V_z I_z + V_y D_{yz}}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)t}\int_0^s z\, dA + \frac{-V_y I_y + V_z D_{yz}}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)t}\int_0^s y\, dA \tag{3.57} $$

Ve vztahu (3.57) značí první integrál výsečový statický moment $\overline{S}_\omega$ neúplné průřezové plochy:

$$ \overline{S}_\omega = \int_0^s \omega\, dA = \int_0^s \omega\, t\, ds \tag{3.58} $$

Druhý a třetí integrál značí statické momenty $\overline{S}_y$, $\overline{S}_z$ neúplné průřezové plochy, přičemž hodnoty $\overline{S}_y$, $\overline{S}_z$ jsou vždy kladné:

$$ \overline{S}_z = \left|\int_0^s y\, dA\right| = \left|\int_0^s y\, t\, ds\right| \tag{3.59a} $$

$$ \overline{S}_y = \left|\int_0^s z\, dA\right| = \left|\int_0^s z\, t\, ds\right| \tag{3.59b} $$

Ve vztahu (3.57) vystupuje nová silová veličina B', která se nazývá *ohybově krouticí moment* M_ω, někdy též deplanačním moment:

$$\frac{dB}{dx} = M_\omega \tag{3.60}$$

Při integraci (3.57) podél obvodu vyňaté části průřezu je třeba integrační cestu volit s ohledem na větu o ekvivalenci smykových napětí. S uvážením (3.58), (3.59) a (3.60) lze pak rovnici (3.57) zapsat ve tvaru:

$${}^2\tau_{sx} = M_\omega \frac{\overline{S}_\omega}{I_\omega\ t} - \frac{-V_z I_z + V_y D_{yz}}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)t}\overline{S}_y - \frac{-V_y I_y + V_z D_{yz}}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)t}\overline{S}_z \tag{3.61}$$

Další úpravou rovnice (3.61) obdržíme:

$${}^2\tau_{sx} = M_\omega \frac{\overline{S}_\omega}{I_\omega\ t} + V_y \frac{I_y \overline{S}_z - D_{yz}\overline{S}_y}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)t} + V_z \frac{I_z \overline{S}_y - D_{yz}\overline{S}_z}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)t} \tag{3.62}$$

Smyková napětí ${}^2\tau_{sx}$ se podél tloušťky průřezu rozdělují rovnoměrně.

3.3.2 Smyková napětí od volného kroucení

Při volném kroucení krouticím momentem M_k vznikají smyková napětí, která označme jako *primární smyková napětí* ${}^1\tau_{yx}$ a ${}^1\tau_{zx}$. Kroutící moment M_k lze s uvážením věty o vzájemnosti smykového napětí zapsat dle (3.29d) ve tvaru:

$$M_k = \int_A \left(y\tau_{zx} - z\tau_{yx}\right) dA \tag{3.63}$$

Dosadíme-li do (3.63) z fyzikálních rovnic $\tau_{zx} = G\,\gamma_{zx}$, $\tau_{yx} = G\,\gamma_{yx}$ obdržíme

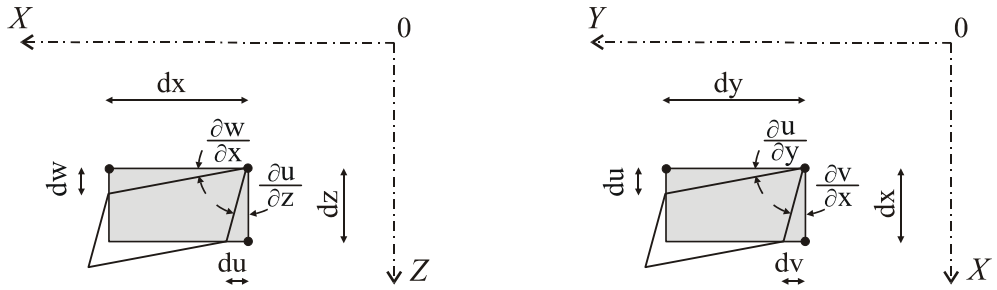
$$M_k = G\int_A \left(y\gamma_{zx} - z\gamma_{yx}\right) dA \tag{3.64}$$

Úhlové deformace γ_{zx}, γ_{yx} je možno obdobně jako v (3.10) vyjádřit vztahy (3.65a), (3.65b):

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{3.65a}$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.65b}$$

Dílčí složky úhlových deformací γ_{zx}, γ_{yx} jsou zobrazeny na obr. 14:



Obr. 14: Úhlové deformace v rovině X–Z a X–Y

Jelikož předpokládáme, že se průřez pootočí jako tuhý celek, je možno přírůstek posunů vyjádřit vztahy:

$$v = -\Theta\, x\, (z - z_s) \tag{3.66a}$$

$$w = \Theta\, x\, (y - y_s) \tag{3.66b}$$

$$u = \Theta\, \Phi(y, z) \tag{3.66c}$$

kde y_s, z_s, jsou souřadnice středu smyku a funkce $\Phi(y, z)$ je tzv. deplanační funkce, kterou je třeba určit řešením rovnice:

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \tag{3.67}$$

Odvození a detailnější vysvětlení (3.67) je uvedeno např. v [2]. Numerické (obecné) řešení (3.67) metodou sítí, viz např. [4].

Dosadíme-li (3.66) do (3.65) dostáváme:

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \Theta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(y - y_s \right) \right) \tag{3.68a}$$

$$\gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \Theta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(z - z_s \right) \right) \tag{3.68b}$$

Dosazením (3.68) do (3.64) dostáváme

$$M_k = G\int_A \left(y\gamma_{zx} - z\gamma_{yx} \right) dA = G\Theta\int_A \left(y\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(y - y_s \right) \right) - z\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \left(z - z_s \right) \right) \right) dA =$$

$$G\Theta\int_A \left(y^2 + z^2 + y\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - y_s \right) - z\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z_s \right) \right) dA = G\Theta I_k \tag{3.69}$$

kde

$$GI_k = G\int_A \left(y^2 + z^2 + y\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} - y_s \right) - z\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + z_s \right) \right) dA \tag{3.70}$$

je tuhost průřezu v prostém kroucení závislá na tvaru průřezu. Vztah (3.69) lze stručně zapsat ve tvaru:

$$M_k = G\Theta I_k \tag{3.71}$$

Řešením (3.71) při zadaném M_k je Θ, přičemž napětí se stanoví řešením (3.68) a z fyzikálních rovnic $\tau_{zx} = G\,\gamma_{zx}$, $\tau_{yx} = G\,\gamma_{yx}$.

Při praktickém řešení smykového napětí od volného kroucení jsou u tenkostěnných otevřených průřezů dominantní napětí ve směru střednice průřezu. Při jejich výpočtu se vychází ze silového řešení vztahu krouticího momentu M_k a smykového napětí ${}^1\tau_{sx}$ u průřezu ve tvaru tenkého obdélníku.

Primární smykové napětí ${}^1\tau_{sx}$ od volného kroucení průřezu ve tvaru tenkého obdélníku je dáno vztahem:

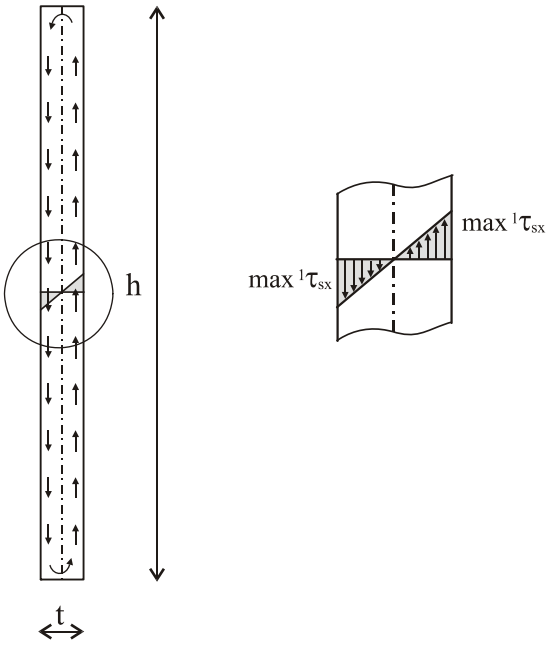
$$ {}^1\tau_{sx} = 2\frac{M_k}{I_t} n \tag{3.72} $$

kde M_k je krouticí moment odpovídající volnému kroucení,

n souřadnice měřená ve směru normály ke střednici (obr. 7),

I_t moment tuhosti průřezu v kroucení (někdy se označuje též jako moment setrvačnosti v v prostém kroucení nebo průřezový modul tuhosti v prostém kroucení).

Napětí vypočtené dle (3.72) je extrémní v polovině délky tenkého obdélníku při povrhu $n = t/2$, viz obr. 15.



Obr. 15: Volné kroucení tenkého obdélníku

U prutů otevřeného průřezu vycházíme z předpokladu, že se průřez skládá z tenkých obdélníků. Výpočtový vztah (3.72) lze aplikovat i na profily, které jsou složené z úzkých obdélníků nebo mají zakřivenou střednici. Moment tuhosti průřezu v kroucení se pak určí podle vztahu:

$$ I_t = \alpha \frac{1}{3} \sum t_i^3 \; h_i \tag{3.73} $$

kde h_i je délka střednice ve směru delší strany obdélníkové části. V případě, že je střednice zakřivená je h_i délka rozvinuté střednice.

α je korekční součinitel závislý na tvaru průřezu, který se určuje s ohledem na tvar a zaoblení ostrých rohů. Pro válcované průřezy se korekční koeficient zavádí dle výsledků experimentálních zkoušek:

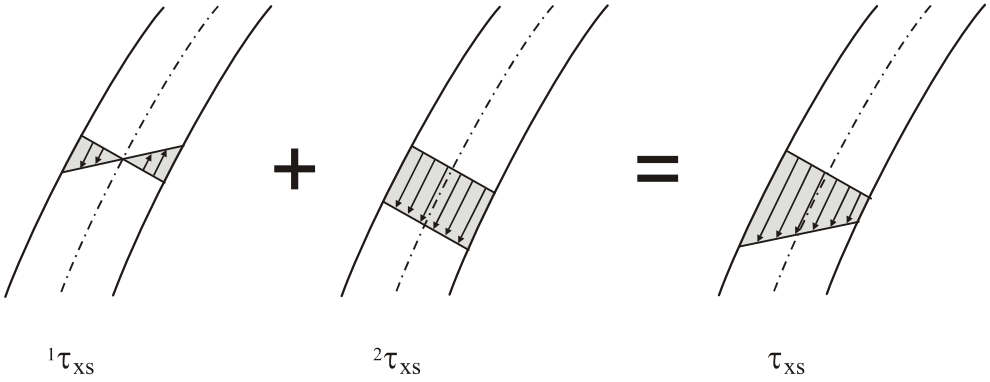
Tab. 3.1: Korekční koeficient

Korekční koeficient α	Průřez
1,00	Úhelník
1,12	⊏ průřez
1,31	I průřez
1,5	Svařovaný I průřez s výztuhami přivařenými k pásnicím a stojině
1,4	Svařovaný T průřez s trojúhelníkovými výztuhami
0,5	Nýtovaný I průřez, pásy z přírub úhelníků a z pásnic

Celkový krouticí moment M_x působící na průřez se tedy skládá z části M_ω, která odpovídá vázanému kroucení a z části M_k, která odpovídá volnému kroucení:

$$M_x = M_k + M_\omega \tag{3.74}$$

Moment M_k, který odpovídá volnému kroucení, vyvozuje v průřezu smykové napětí ${}^1\tau_{sx}$, které se po tloušťce průřezu mění lineárně, přičemž nulovou hodnotu má ve střednici průřezu. Ohybově krouticím momentem M_ω, který odpovídá vázanému kroucení, vyvozuje v průřezu smykové napětí ${}^2\tau_{sx}$, které je po tloušťce průřezu konstantní. Výsledné smykové napětí je pak dáno součtem ${}^1\tau_{sx}$ a ${}^2\tau_{sx}$, viz obr 16.



Obr. 16: Smykové napětí od volného a vázaného kroucení

Výsledný výpočtový vztah pro celkové smykové napětí je dán součtem $^{1}\tau_{sx}$ a $^{2}\tau_{sx}$:

$$\tau_{sx} = {}^{1}\tau_{sx} + {}^{2}\tau_{sx} = \\ = \frac{M_k}{I_t} n + \frac{1}{t}\left(M_\omega \frac{\overline{S}_\omega}{I_\omega} + V_y \frac{I_y \overline{S}_z - D_{yz} \overline{S}_y}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)} + V_z \frac{I_z \overline{S}_y - D_{yz} \overline{S}_z}{\left(I_y I_z - D_{yz}^2\right)} \right) \quad (3.75)$$

Budou-li osy souřadnic hlavními centrálními osami setrvačnosti průřezu, vztah (3.75) se dále zjednoduší:

$$\tau_{sx} = \frac{M_k}{I_t} n + \frac{1}{t}\left(M_\omega \frac{\overline{S}_\omega}{I_\omega} + V_y \frac{\overline{S}_z}{I_z} + V_z \frac{\overline{S}_y}{I_y} \right) \quad (3.76)$$

Napjatost tenkostěnného otevřeného průřezu se obecně vyšetřuje řešením funkci $\varphi(x)$, což je předmětem kapitoly 3.4.

3.4 Diferenciální rovnice vázaného kroucení tenkostěnného otevřeného průřezu

Pro řešení normálového napětí (3.50) a smykového napětí (3.75) je třeba (kromě jiného) určit hodnotu bimomentu B, hodnotu ohybově krouticího momentu M_ω (derivaci bimomentu) a momentu volného kroucení M_k. Všechny tyto veličiny závisí dle (3.49) a (3.60) na funkci Θ, tj.

$$B = -EI_\omega \Theta' \tag{3.77a}$$

$$M_\omega = \frac{dB}{dx} - = -EI_\omega \Theta'' \tag{3.77b}$$

$$M_k = GI_t \Theta \tag{3.77c}$$

Rovnici (3.74) zapíšeme s pomocí (3.77 ve tvaru:

$$M_x = M_k + M_\omega = G\, I_t\, \Theta - E\, I_\omega\, \Theta'' \tag{3.78}$$

Diferenciální rovnici je účelné zapsat ve tvaru:

$$\Theta'' - k^2\, \Theta = -\frac{k^2}{GI_t} M_x \tag{3.79}$$

kde je pro formální zjednodušení poměr tuhostí nahrazen konstantou:

$$k^2 = \frac{GI_t}{EI_\omega} \tag{3.80}$$

Řešení (3.79) se skládá z řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení úplné rovnice:

$$\Theta = C_1 \sinh(kx) + C_2 \cosh(kx) - \frac{k}{GI_t} \int_0^x M_x(\xi) \sinh\left(k(x-\xi)\right) d\xi \tag{3.81}$$

kde ξ je vnitřní proměnná v intervalu $\langle 0; x \rangle$. Konstanty C_1 a C_2 se určí z okrajových podmínek.

4 Závěr



Modul, který jste prostudovali, obsahuje informace o základních případech namáhání tenkostěnných prutů otevřených průřezů. Jelikož se jedná o velice širokou oblast, nebyla zmíněna problematika tenkostěnných prutů uzavřených průřezů a stabilitní problémy (boulení, vzpěr) tenkostěnných prutů, tj. použité předpoklady charakterizují tzv. klasickou lineární teorii pružnosti.
Výše uvedená problematika byla pojata obecně, bez vazby na konkrétní typy stavebních konstrukcí. Konkrétně bude tato problematika rozvedena v odborných předmětech dalších semestrů bakalářského studia a ve studiu magisterském.

4.1 Shrnutí

Cílem předloženého textu bylo shrnutí obecných témat, která jsou tradiční součástí nauky o pružnosti a poskytnout učební text studentům distančního studia stavební fakulty.

4.2 Kontrolní otázky

- Jaký je rozdíl mezi volným a vázaným kroucením?
- Co je to deplanace průřezu?
- Jaké jsou Vlasovovy zjednodušující předpoklady o deformaci tenkostěnného otevřeného profilu?
- Co to je střed smyku a jak se postupuje při jeho výpočtu?
- Co to je bimoment a jak se postupuje při jeho výpočtu?
- Co to je ohybově krouticí (deplanační) moment a jak se postupuje při jeho výpočtu?

5 Studijní prameny

5.1 Seznam použité literatury

[1] SERVÍT, R. *Pružnost a pevnost ve stavitelství*, SNTL, Praha, 1966.

[2] SERVÍT, R., DOLEŽALOVÁ, E., CRHA, M. *Teorie pružnosti a plasticity I*, SNTL,ALFA, 1981.



[3] ŠMIŘÁK, S. *Pružnost a plasticita pro distanční studium, Nakladatelství VUT Brno*: 1995.

5.2 Seznam doplňkové studijní literatury



[4] CRHA, M., ŠMIŘÁK, S., DOČKAL, P. PRUŽNOST A PLASTICITA I, SKRIPTUM, BRNO, VUT, 1993.



[5] KALA, Z. Příklad použití metody Monte Carlo při řešení Dirichletovy úlohy parciální diferenciální rovnice vázaného kroucení, In *Sborník příspěvků z III. ročníku celostátní konference Spolehlivost konstrukcí téma Cesty k uplatnění posudku bezpečnosti, provozuschopnosti a trvanlivosti konstrukcí v normativních předpisech a v projekční praxi*, 2002, Ostrava: Dům techniky, s.85–88, ISBN 80–02–02–01489–8.

[6] VLASOV, V.Z. Tonkostennyje uprugije steržni, Gosstrojizdat 1959, Moskva, (Český překlad Praha, SNTL 1962).