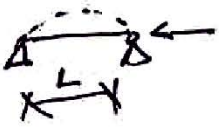
BD002
PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ

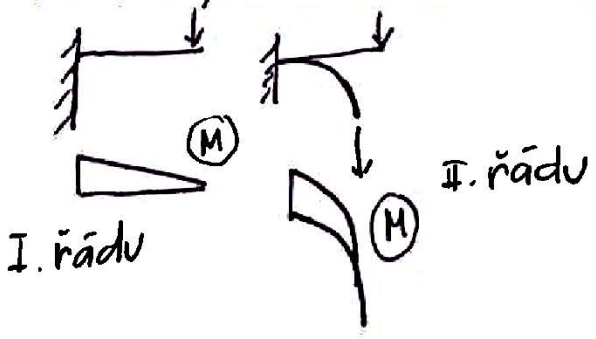
Zdeněk Kala

PRUŽNOST A PEVNOST

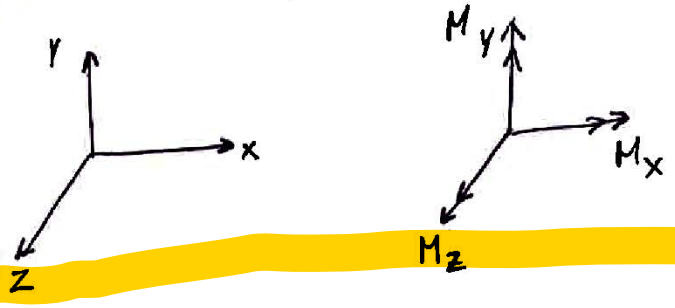
- napětí
- deformace
  - stabilita



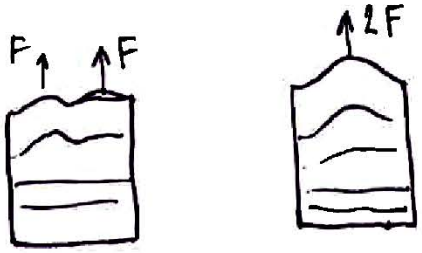
- pevnost - schopnost odporovat vnějším vlivům bez porušení
  - homobilní t. - stejné mechanické vlastnosti
  - izotropní t. - stejné mechan. vlastnosti ve všech směrech
  - malá a pružná deformace (nevnikají trvalé deformace)



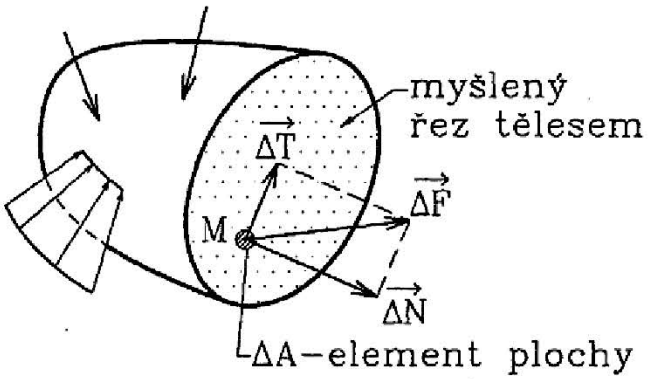
- vždy budeme předpokládat statické zatížení
- počáteční napjatost - předpokládáme 0



Saint Venantův princip lokálnosti



shodné deformace a napětí



$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

• normálové napětí

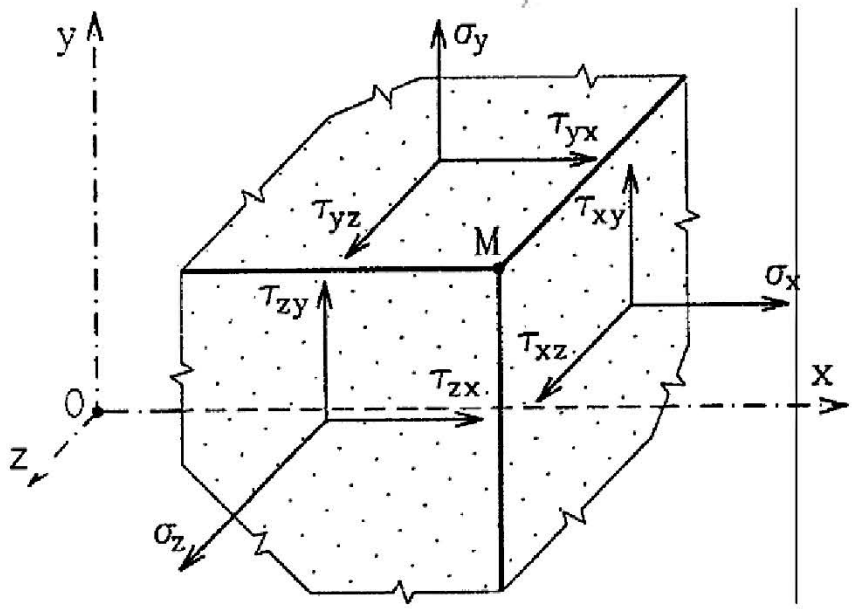
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad [N/m^2 = Pa]$$

• smykové napětí

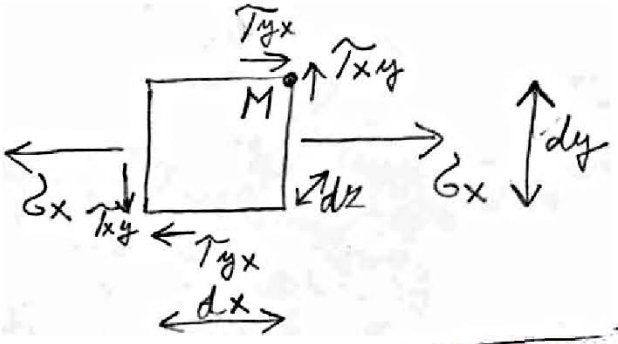
$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} \quad [Pa] \quad [MPa]$$

Vzor napjatosti

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Věta o vzájemnosti smyk napětí



$$\Sigma M_z = 0$$

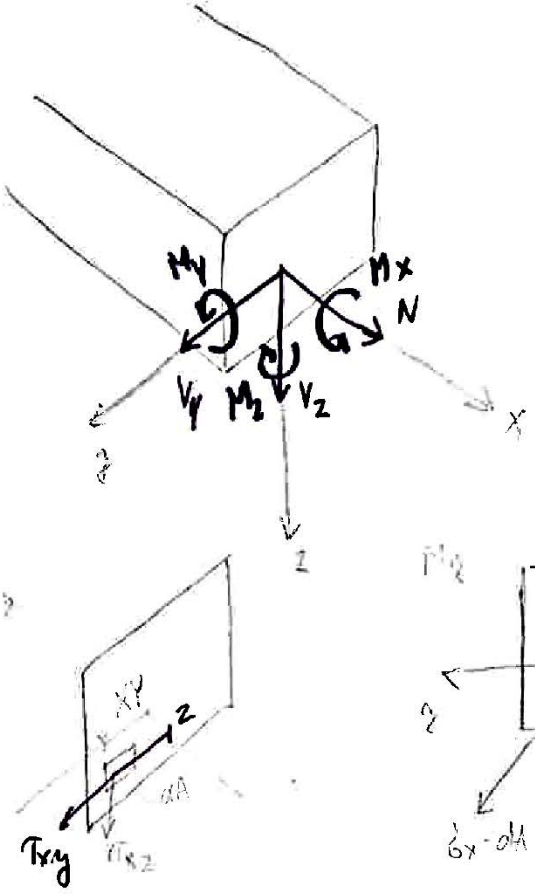
$$\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dy}{2} - \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dy}{2}$$

F_x F_x

$$\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot dx - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0$$

smyk síla

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$



$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA \qquad M_x = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z)\, dA$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA \qquad M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA \qquad M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

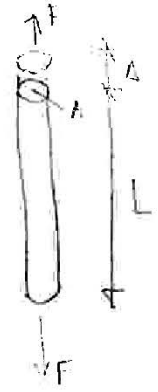
poměrné přetvoření

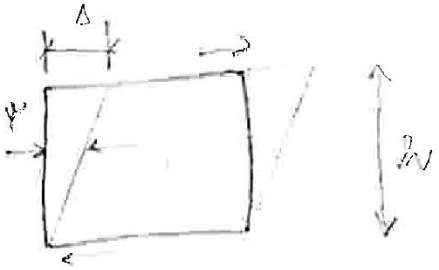
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l + \Delta l}$$

$$l + \Delta l \approx l$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

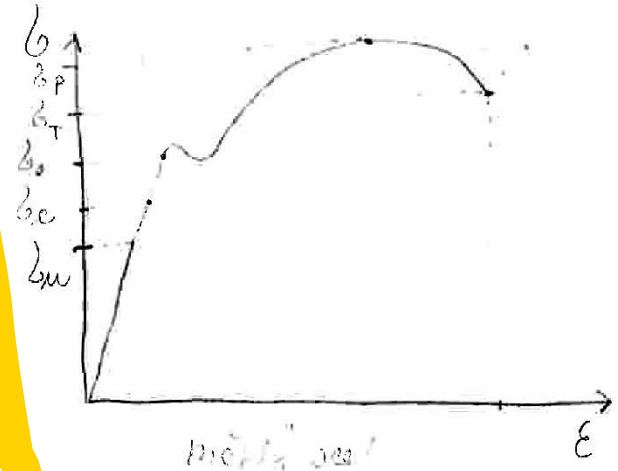




$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta}{h}$$

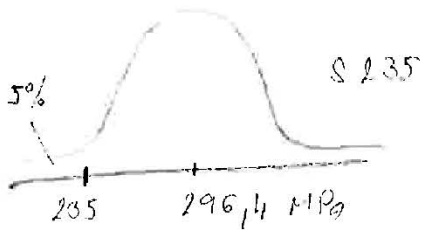
$$\gamma \approx \frac{\Delta}{h}$$

PRACOVNÍ DIAGRAM MATERIÁLU



mez kluzu f_y

S 235	f_y =	235 MPa
S 355	f_y =	355 MPa
S 420	f_y =	420 MPa

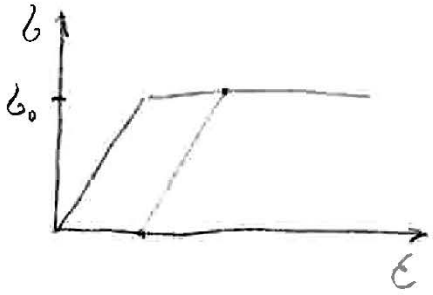


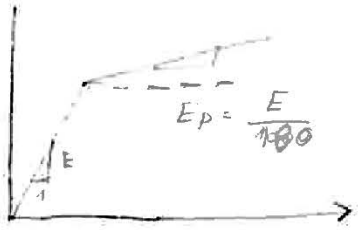
Hookův zákon (1676)

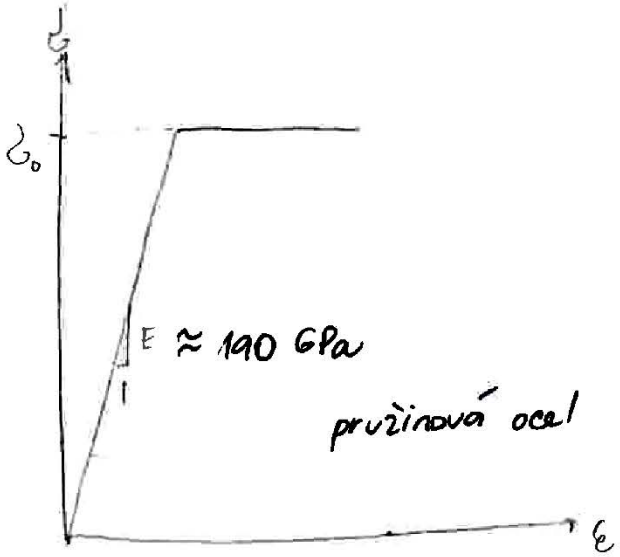
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

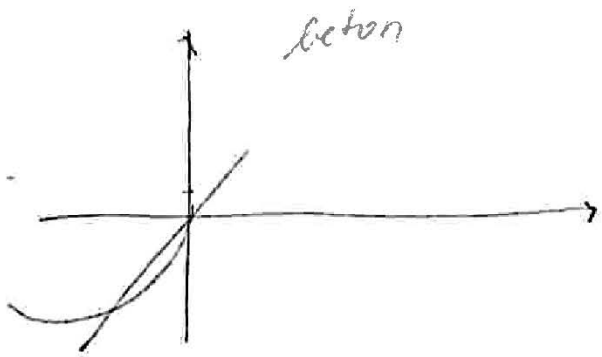
$$\tau = G \cdot \gamma$$

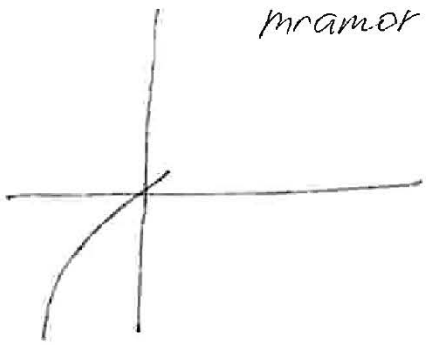
Idealizace

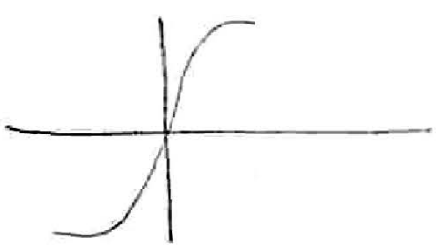


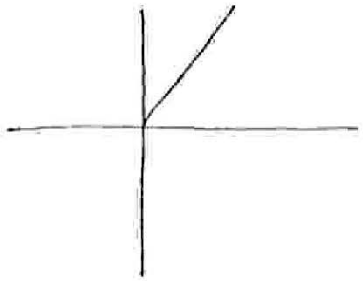






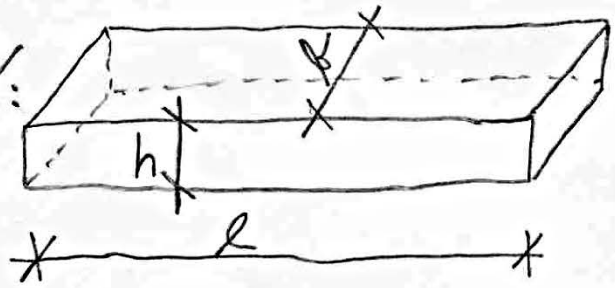






S 235 $E = 210\,GPa$

před deformací:

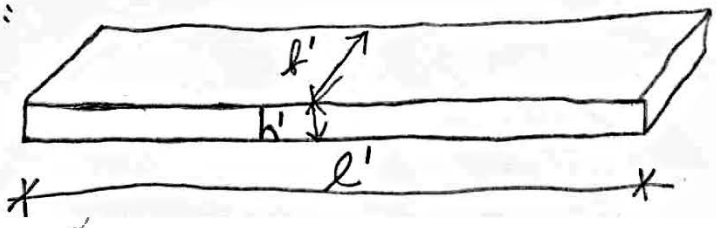


$l' > l \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l} = \frac{l'-l}{l}$

$b' < b \quad \varepsilon' = \frac{\Delta}{b} = \frac{b'-b}{b}$

$h' < h \quad \varepsilon' = \frac{\Delta}{h} = \frac{h'-h}{h}$

po deformaci tahem:



Poissonův součinitel: $\mu = \frac{-\varepsilon'}{\varepsilon}$

$0 \leq \mu \leq 0{,}5$

↑ korek ↑ pryž

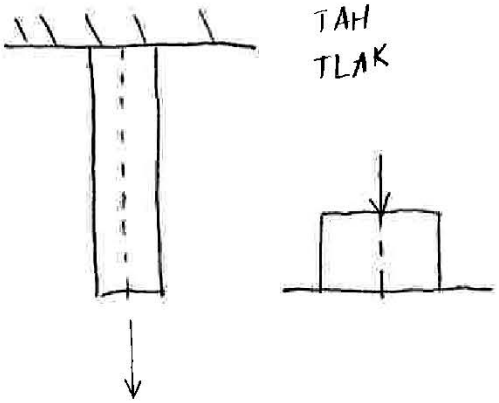
ocel $\mu = 0{,}3$

beton $\mu = 0{,}15 - 0{,}2$

pro izotropní látku

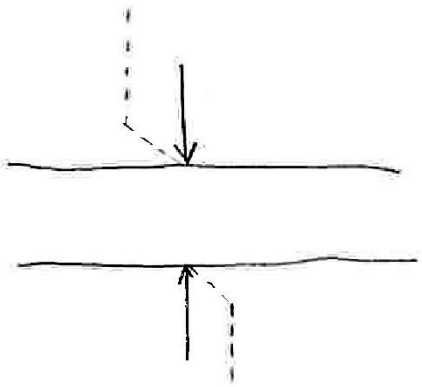
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

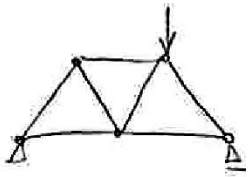
26.9.2017



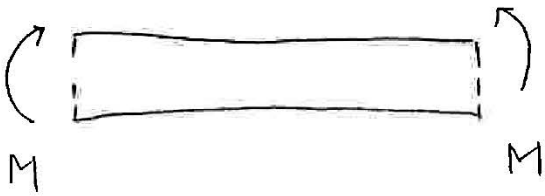
TAH
TLAK

PROSTÝ SMYK

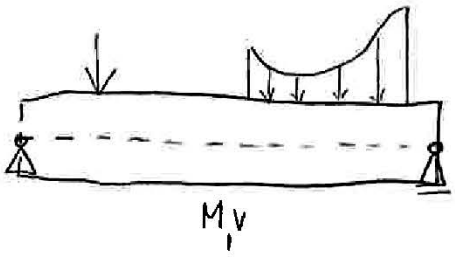




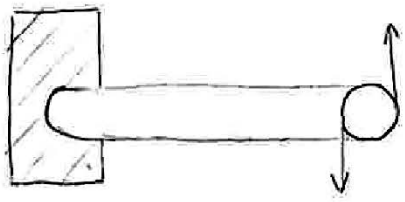
PROSTÝ OHYB

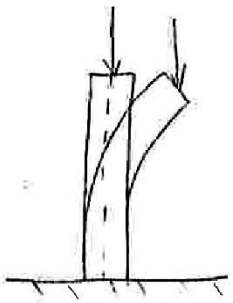


PŘÍČNÝ OHYB



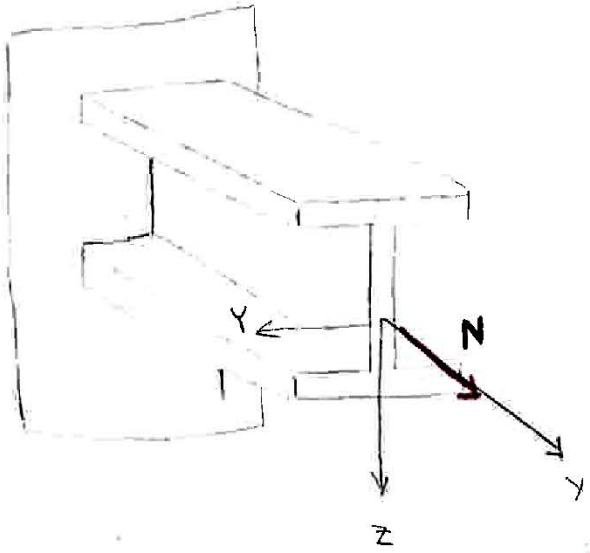
PROSTÉ KROUCENÍ





STABILITA
(VZPĚR)

PROSTÝ TAH A TLAK



$N \neq 0$

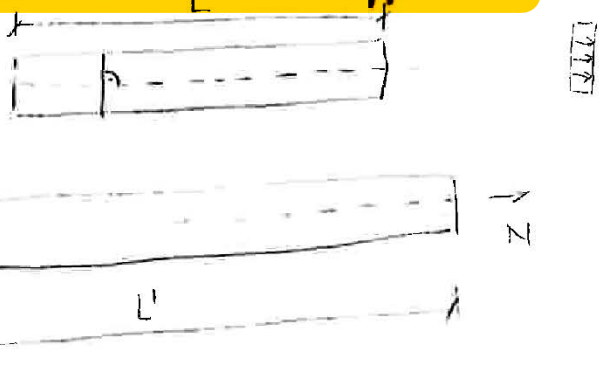
$V_y = V_z = 0$

$M_y = M_z = M_x = 0$

$N > 0$

$N < 0$

Bernoulliova hypotéza



$$\varepsilon = \frac{L' - L}{L} = \text{konst.} \rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon = \text{konst.}$$

- podélná vlákna na sebe netlačí

$\sigma_y = \sigma_z = 0$

$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0$

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA = \sigma_x \cdot \int_A dA = \sigma_x \cdot A$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = \sigma_x \cdot \int_A z\,dA = \sigma_x \cdot S_y = 0$$

statický moment setrvačnosti

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = \sigma_x \cdot \int \cdot \partial A = \sigma_x \cdot S_z \cdot 0$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{A}}$$

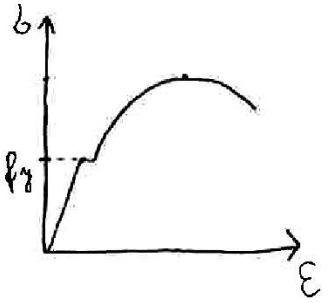
$p_a = \frac{N}{m^2}$; MPa, $\frac{kN}{mm^2}$

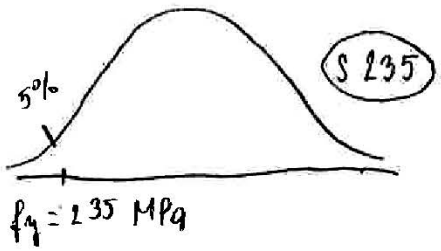
Při dimenzování prutů musí platit:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \leq R_d$$

R_d ... návrhová pevnost

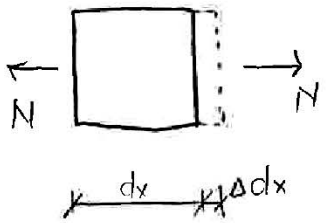
ocel $R_d = \frac{f_y}{\gamma_M} = \frac{235\ MPa}{1,0} = 235\ MPa$





$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$$

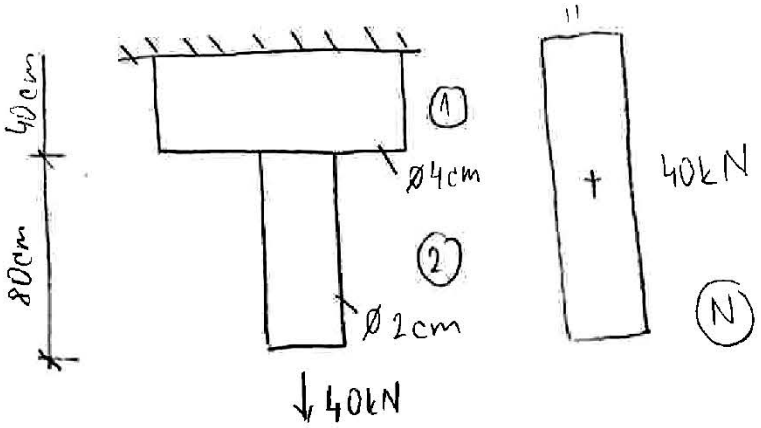
$$\Delta dx = \frac{N \cdot \Delta dx}{E \cdot A}$$



$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \varepsilon_x \cdot dx = \int_0^l \frac{N}{E \cdot A}\, dx = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

Př. Určete napětí v obou částech ocelového prutu a jeho celkové rozložení. OCEL $E = 210\ GPa$



$$^1\sigma_x = \frac{40 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,02^2} = 31,8 \cdot 10^6\ Pa = 31,8\ MPa$$

$$^2\sigma_x = \frac{40 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,01^2} = 127,3\ MPa$$

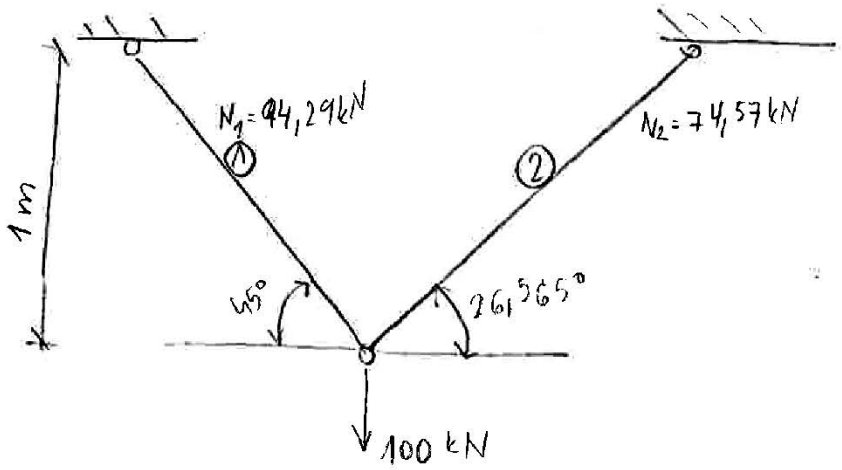
$$\Delta l_1 = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{210 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 0,02^2} = 0,0606\ mm$$

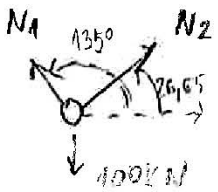
$$\Delta l_2 = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{210 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 0,01^2} = 0,48\ mm$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,0606 + 0,48 = 0,5406\ mm$$

Napětí první části 31,8 MP druhé 127,3 MPa a celkové protažení 0,5406 mm.

Navrhněte průřezy 1 a 2 z kruhové oceli, zjistěte protažení prutů a hodnotu posuvu konstrukce v místě působení síly

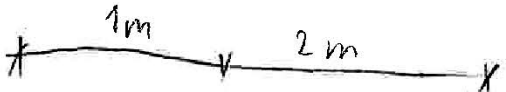




$\Sigma F_x = 0$

$N_1 \cdot \cos 135° + N_2 \cdot \cos 26,565° + 100 \cdot \cos 270° = 0$

$N_1 \cdot \sin 135° + N_2 \cdot \sin 26,565° + 100 \cdot \sin 270° = 0$



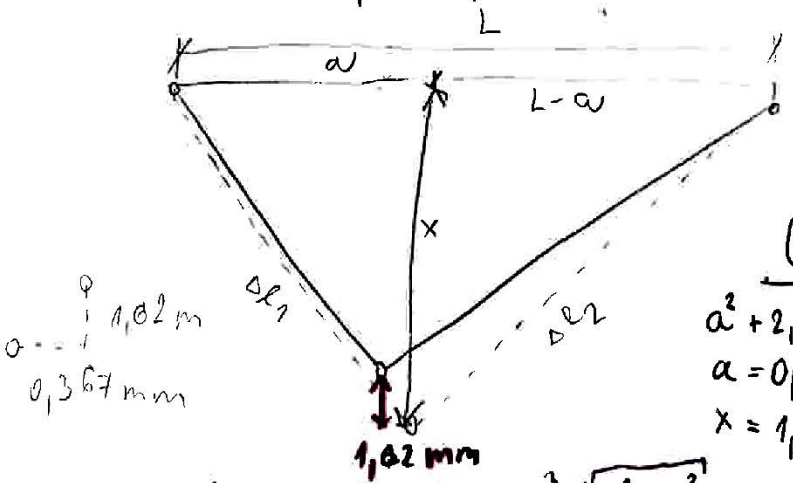
$R = 210 MPa$

$$A_1 \geq \frac{N_1}{R} = \frac{94,29 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 4,49 \cdot 10^{-4} m^2 \Rightarrow \varnothing 3 \; ; \; A_1 = 7,068 cm^2$$

$$A_2 \geq \frac{N_2}{R} = \frac{74,57 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 3,55 \cdot 10^{-4} m^2 \rightarrow \varnothing 3 \; ; \; A_2 = 7,008 cm^2$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{94,29 \cdot 10^3}{7,068 \cdot (0,01)^2 m^2} = 133,4 MPa$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{74,57 \cdot 10^3}{7,068 \cdot (0,01)^2} = 105,5 MPa$$



$$a^2 + x^2 = (l_1 + \Delta l_1)^2$$

$$(L-a)^2 + x^2 = (l_2 + \Delta l_2)^2$$

$$a^2 + x^2 = 1,4151^2$$

$$(3-a)^2 + x^2 = 2,23712^2$$

$$a^2 + 2,23712^2 - (3-a)^2 = 1,4151^2$$

$$a = 0,999633 m$$

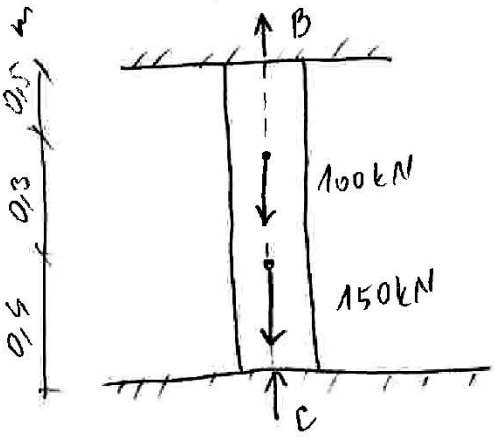
$$x = 1,00162 m$$

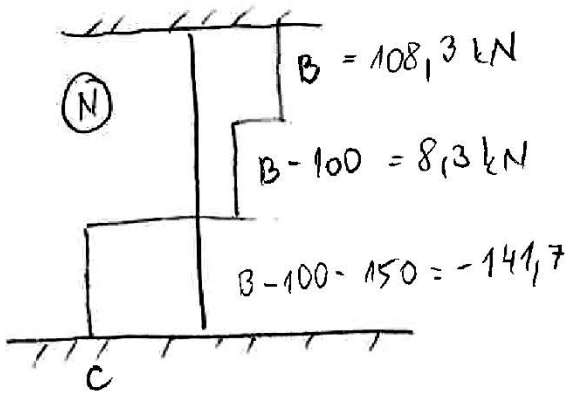
$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{94,29 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1^2+1^2}}{210 \cdot 10^9 \cdot 7,068 \cdot 10^{-4}} = 0,9 mm$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{74,57 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{1^2+2^2}}{210 \cdot 10^9 \cdot 7,068 \cdot 10^{-4}} = 1,12 mm$$

STATICKÝ NEURČITÝ TAH A TLAK

Prut s průřezovou plochou 10 cm² je vetknutý na obou koncích a je zatížený silami dle obrázku. Zjistěte napětí ve třech částech prutu.





1) $\Sigma F_x = 0 \qquad B - 100 - 150 + C = 0$

2) $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$

$$\frac{B \cdot 0{,}5}{E \cdot A} + \frac{(B - 100) \cdot 0{,}3}{E \cdot A} + \frac{(B \cdot 250) \cdot 0{,}4}{E \cdot A} = 0$$

$B = 108{,}3 \text{ kN}$

$C = 141{,}7 \text{ kN}$

$$\sigma_1 = \frac{108{,}3 \cdot 10^3}{0{,}001 \text{ m}^2} = 108{,}3 \text{ MPa}$$

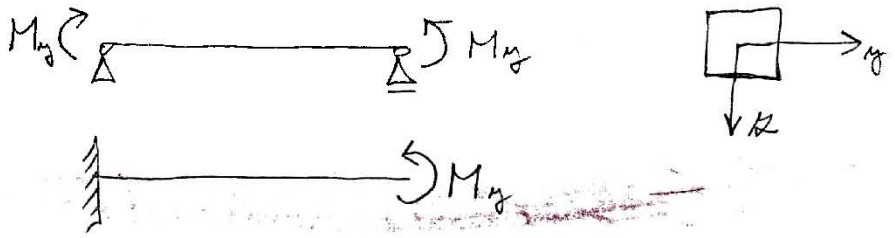
$$\sigma_2 = \frac{8{,}3 \cdot 10^3}{0{,}001 \text{ m}^2} = 8{,}3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \frac{-141{,}7 \cdot 10^3}{0{,}001 \text{ m}^2} = -141{,}7 \text{ MPa}$$

Napětí v ohýbaných nosnících

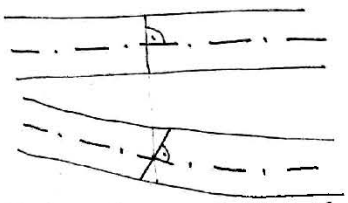
Rovinný ohyb - Vnější síly včetně reakcí leží v jedné z hlavních rovin. Hlavní roviny jsou ty, které procházejí osou prutu x a některou z hlavních os setrvačnosti průřezu (y nebo z). Zaměříme se zejména na průřezy dvojose symetrické.

Prostý ohyb - Působí pouze ohybový moment, posouvající síla je rovna nule.



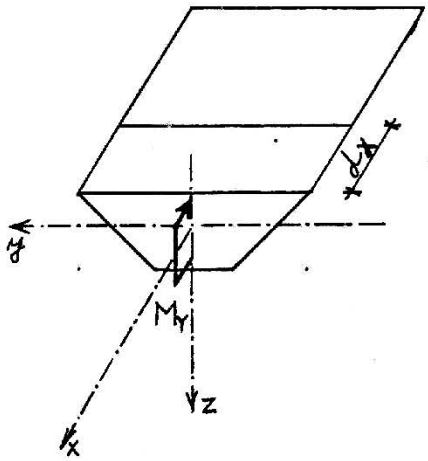
Základní předpoklady -

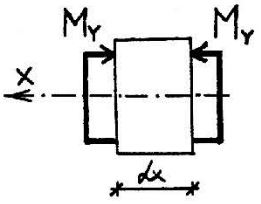
a) Bernoulliova hypotéza: Průřezy jsou rovinné a kolmé k ose prutu před deformací a rovinnými a kolmými k deformované ose.



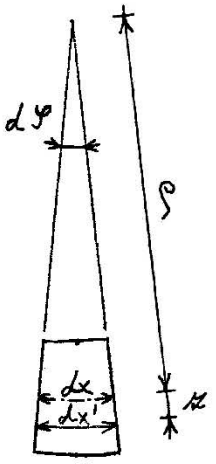
b) podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$





PŘED DEFORMACÍ



PO DEFORMACI

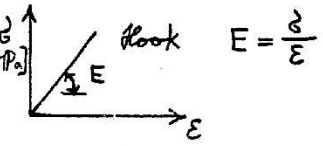
$$dx' = (\rho + z) \cdot d\varphi$$

- geometrické podmínky $\Delta dx = dx' - dx = (\rho + z) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi = z \cdot d\varphi$

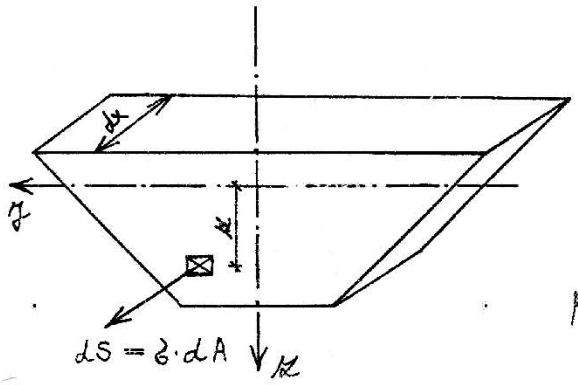
(1) $\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z\, d\varphi}{\rho\, d\varphi} = \frac{z}{\rho}$

- fyzikální podmínky

(2) $\sigma = E \cdot \varepsilon = \frac{E \cdot z}{\rho}$



$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$



- statické podmínky

$\Sigma M_Y = 0$

$$\int_z z \cdot dS - M_Y = 0$$

$$M_Y = \int_A z \cdot \sigma \cdot dA = \int_A \frac{E}{\rho} \cdot z^2\, dA$$

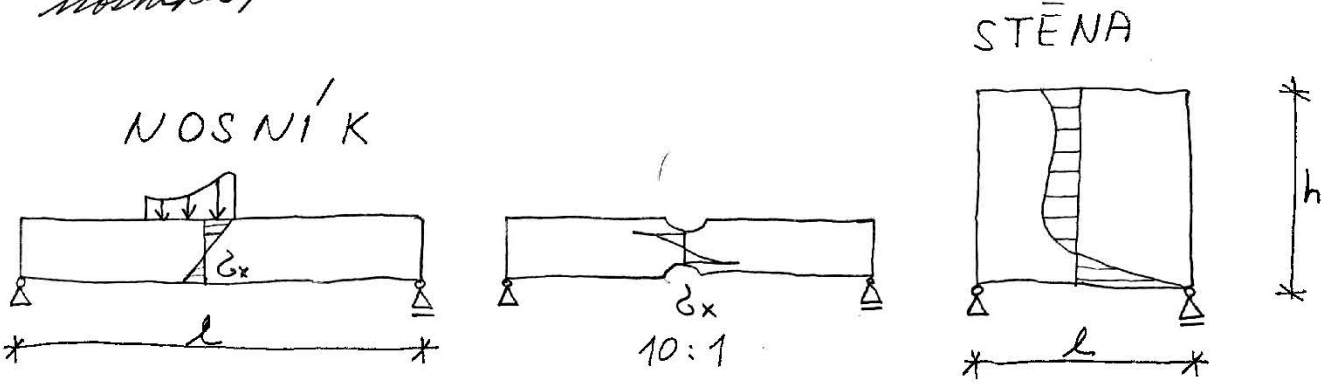
(3) $$M_Y = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A z^2\, dA = \frac{E}{\rho} \cdot I_Y$$

$$M_Y = \frac{1}{\rho} \cdot E I_Y = \frac{\varepsilon}{z} \cdot E I_Y = \frac{\sigma}{z} \cdot I_Y$$

(4) $$\boxed{\sigma = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z}$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_Y}{I_Y} \cdot z_{max} = \frac{M_Y}{W_{min}}$$

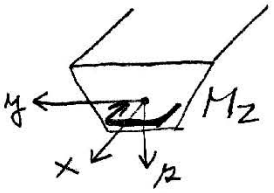
Normálová napětí v průřezu prokládají lineárně po výšce nosníku a extrémní hodnoty vznikají v krajních bodech (v krajních vláknech nosníku)



- Odvozené řešení platí pro případ prostého ohybu
- V případě rovinného ohybu, při němž kromě ohyb. momentů působí též po. síly mají přijaté předpoklady a z nich odvozené vztahy povahu přibližných vztahů.
- Smykové napětí vyvolaná posouvajícími silami způsobují zkosení a tím ztrátu rovinnosti průřezu (Bernoulliova hypotéza o zachování rovinnosti průřezu již přesně neplatí).

Analogicky pro ohyb v rovině xy

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

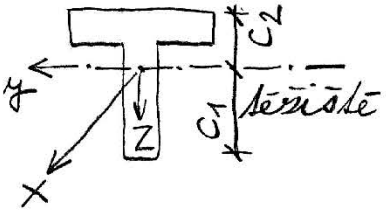


Znaménko $\ominus$ odpovídá přijaté znam. konvenci (klad. mom. M_z vyvolává takové napětí v bodech kde $y < 0$).

Návrh a posouzení ohýbaného nosníku v pružném oboru

Extrémní napětí vznikají v krajních bodech průřezu (rovina x, z).

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{I_y} \cdot c_1 \qquad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{I_y} \cdot (-c_2)$$



Označíme-li

$$W_{y1} = \frac{I_y}{c_1} \qquad W_{y2} = \left|\frac{I_y}{c_2}\right|$$

potom

$$\sigma_{x1} = \frac{M_y}{W_{y1}} \qquad \sigma_{x2} = \frac{M_y}{W_{y2}}$$

Veličinu W nazýváme <u>průřezový modul</u> $[m^3]$

- u dvouose symetrických průřezů $W_{y1} = W_{y2} = \frac{I_y}{\frac{h}{2}}$

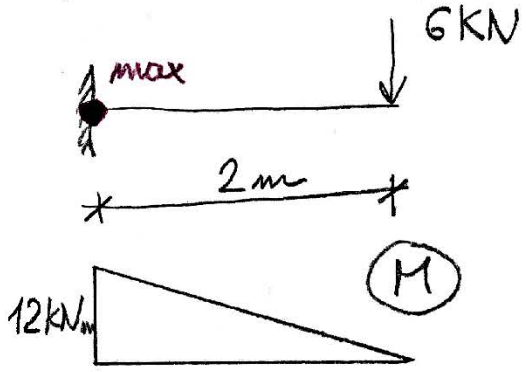
Obdélníkový průřez

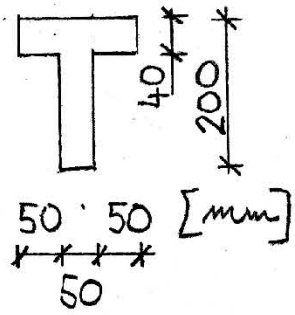
$$I_y = \frac{1}{12} b \cdot h^3 \qquad c_1 = c_2 = \frac{h}{2}$$

$$W_{y1} = W_{y2} = W_y = \frac{1}{6} b \cdot h^2$$

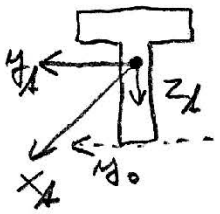
h ose z $\qquad W_z = \frac{1}{6} h \cdot b^2$

Příklad: Určete maximální absolutní normálové napětí u konzoly dle zadání.





Těžiště, počítáme k ose y_0

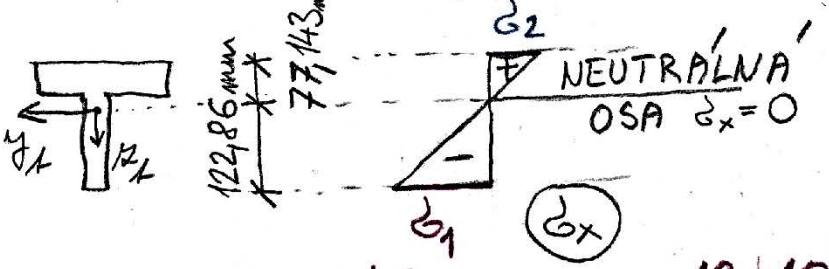


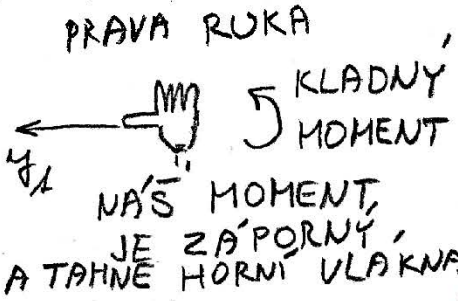
$$z_1 = \frac{S_{y_0}}{A} = \frac{150 \cdot 40 \cdot 180 + 160 \cdot 50 \cdot 80}{150 \cdot 40 + 160 \cdot 50} = 122{,}86\ mm$$

$$I_{y_1} = \frac{1}{12} \cdot 150 \cdot 40^3 + 150 \cdot 40 \cdot (180 - 122{,}86)^2 + \frac{1}{12} \cdot 50 \cdot 160^3 + 50 \cdot 160 \cdot (80 - 122{,}86)^2 =$$

$$= 52{,}152 \cdot 10^6\ mm^4 = 52{,}152 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

Normálové napětí ve střednici





$$\sigma_1 = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{max} = \frac{-12 \cdot 10^3}{52{,}152 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}12286 = -28{,}27 \cdot 10^6\ Pa$$

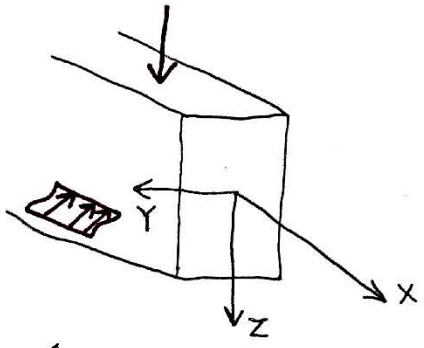
$$\sigma_2 = \frac{M_y}{I_y} \cdot z_{min} = \frac{-12 \cdot 10^3}{52{,}152 \cdot 10^{-6}} \cdot (-0{,}077143) = +17{,}75 \cdot 10^6\ Pa$$

$$\max \sigma_x = \max \{|\sigma_1|; |\sigma_2|\} = \max \{28{,}27\ MPa; 17{,}75\ MPa\} = \underline{28{,}27\ MPa}$$

Maximální absolutní normálové napětí na konzole je 28,27 MPa.

Složené případy namáhání prutu

- prostorový ohyb



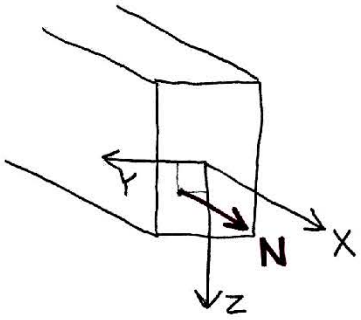
V_y; V_z

M_y; M_z

$N = 0$; $M_x = 0$

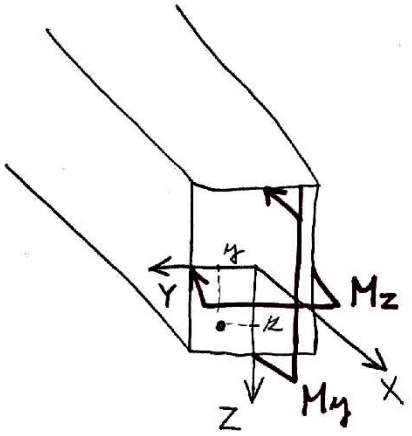
mění síly procházejí osou prutu

- mimostředný tah tlak



Prostorový ohyb

Působení leží v rovině, která prochází osou prutu, ale nemusí být hlavní rovinnou. Neutrální osa prochází těžištěm, nesplývá však s žádnou hlavní centrální osou. Je nutno vyšetřit sklon neutrálné osy.



$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

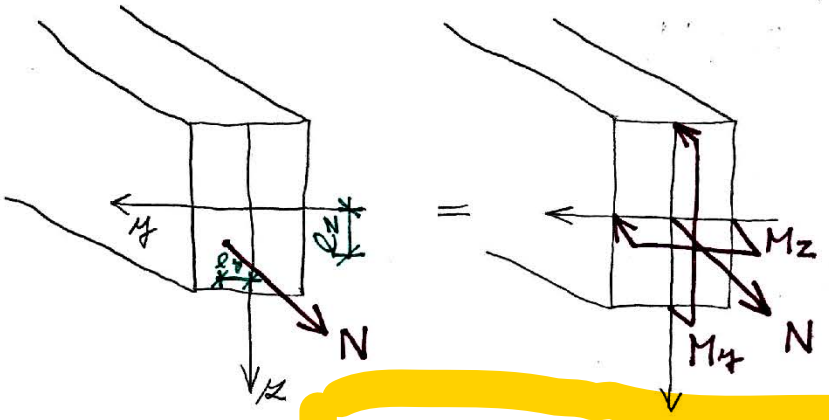
Kladné M_y; M_z vyvolávají v kladném kvadrantu y, z.

Pro neutrálnou osu musí platit

$$\frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y = 0$$

Mimostředný tah a tlak

Neutrálná osa neprochází těžištěm



$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y \qquad (1)$$

Vzorec je odvozený za predpokladu, že momenty M_y; M_z sú kladné. Momenty i súradnice bodu dosadzujeme rešpektujúc znamienka.

e_y; e_z sú súradnice bodu, kde pôsobí sila N. Tlak ⊖; ťah ⊕, y, z sú súradnice bodu, kde chceme vypočítať napätie. Všetko dosadzovať rešpektujúc znamienka.

$$M_y = N \cdot e_z \qquad M_z = -N \cdot e_y$$

Úpravou (1) je možné obdržať

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_z \cdot A}{I_y \cdot A} \cdot z - \frac{-N \cdot e_y \cdot A}{I_y \cdot A} \cdot y =$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_z}{i_y^2 \cdot A} z - \frac{-N\, e_y}{i_z^2 \cdot A} \cdot y =$$

$$= \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + \frac{e_y \cdot y}{i_z^2}\right)$$

kde $i_y^2 = \frac{I_y}{A}$; $i_z^2 = \frac{I_z}{A}$ sú vzťahy pre polomery zotrvačnosti

Rovnici neutrálné osy získáme, položíme-li normálové napětí rovno nule $\sigma_x = 0$.

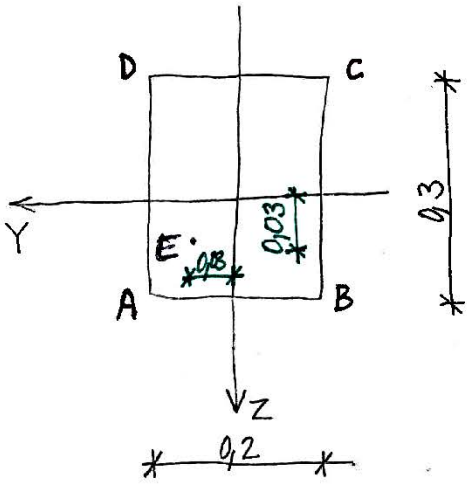
$$\frac{l_y \cdot y}{i_z^2} + \frac{l_z \cdot z}{i_y^2} + 1 = 0$$

Úsečky, které vytíná neutrálná osa na y, z

pro $z = 0 \Rightarrow y_n = -\frac{i_z^2}{l_y}$

$y = 0 \Rightarrow z_n = -\frac{i_y^2}{l_z}$

Příklad: Průřez $0{,}3 \times 0{,}2$ m je namáhán v bodě E tlakovou silou 100 kN. Najděte polohu neutrálné osy a určete napětí v krajních bodech.



$M_y = -100\,kN \cdot 0{,}03 = -3\,kNm$

$M_z = 100\,kN \cdot 0{,}03 = 3\,kNm$

$A = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}06\ m^2$

$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3^3 = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\ m^4$

$I_z = \frac{1}{12} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2^3 = 2{,}0 \cdot 10^{-4}\ m^4$

$$\sigma_x(y,z) = \frac{-100\,kN}{0{,}06} + \frac{-3\,kNm}{4{,}5 \cdot 10^{-4}} \cdot z - \frac{3\,kNm}{2 \cdot 10^{-4}} \cdot y$$

$$\sigma_x(y;z) = -1{,}66\bar{6} \cdot 10^6 - 6{,}66\bar{6} \cdot 10^6 \cdot z - 15 \cdot 10^6\, y$$

$$^A\sigma_x(0{,}1;\,0{,}15) = -1{,}66 \cdot 10^6 - 6{,}66\bar{6} \cdot 10^6 \cdot 0{,}15 - 15 \cdot 10^6 \cdot 0{,}1 =$$
$$= -4{,}16\bar{6}\ MPa$$

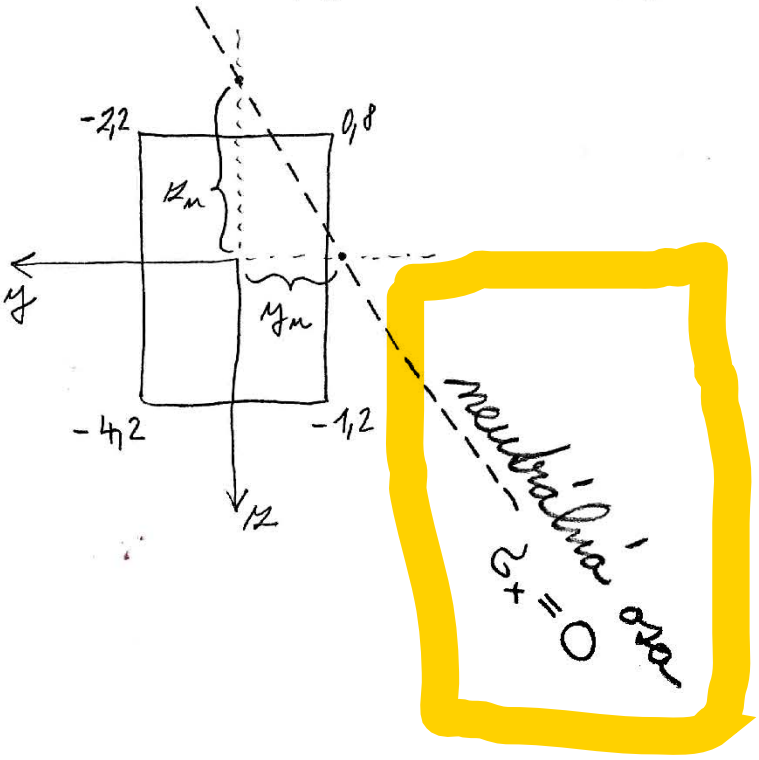
$^B\sigma_x(-0{,}1;\,0{,}15) = -1{,}16\bar{6}\ MPa$

$^C\sigma_x(-0{,}1;\,-0{,}15) = 0{,}83\bar{3}\ MPa$

$^D\sigma_x(0{,}1;\,-0{,}15) = -2{,}16\bar{6}\ MPa$

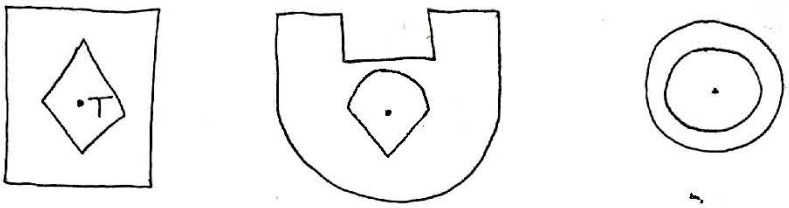
$$y_m = -\frac{i_z^2}{l_y} = -\frac{I_z/A}{l_y} = \frac{-2\cdot10^{-4}/0{,}06}{0{,}03} = -0{,}11$$

$$z_m = -\frac{i_y^2}{l_z} = -\frac{I_y/A}{l_z} = -\frac{45\cdot10^{-4}/0{,}06}{0{,}03} = -0{,}25$$



Jádro průřezu

Jádro průřezu je určitá oblast v okolí těžiště průřezu, v níž musí působit výslednice vnitřních sil, aby v celém průřezu vznikla normálová napětí téhož znaménka. Jádro průřezu je určeno svým obrysem tzv. jádrovou čárou.



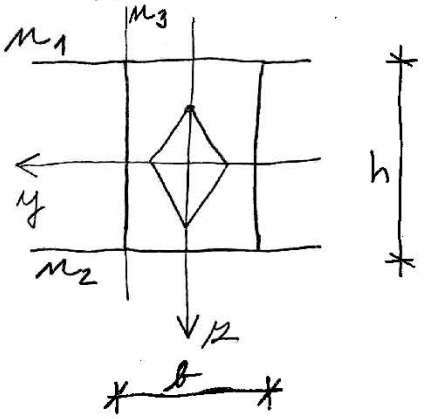
Jádrovou čáru získáme tak, že klademe neutrálnou osu postupně do všech tečných poloh k obrysu průřezu, při nichž ji nepřetíná.

Hledáme působiště síly

$$e_{yj} = -\frac{i_z^2}{y_{nj}}$$

$$e_{zj} = -\frac{i_y^2}{z_{nj}}$$

Příklad: Stanovte jádro obdélníkového průřezu



$$A = b \cdot h$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \qquad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{1}{12} h^2$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot h \cdot b^3 \qquad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{12} \cdot b^2$$

n_1: $y_{n1} = \infty$; $z_{n1} = -h/2$

$$e_{y1} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0$$

$$e_{z1} = -\frac{\frac{1}{12} h^2}{-h/2} = \frac{h}{6}$$

n_2: $y_{n2} = \infty$; $z_{n2} = h/2$

$$e_{y2} = 0$$

$$e_{z2} = -\frac{\frac{1}{12} h^2}{h/2} = -\frac{h}{6}$$

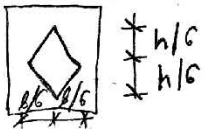
n_3: $y_{n3} = b/2$ $z_{n3} = \infty$

$$e_{y3} = -\frac{\frac{1}{12} b^2}{b/2} = -\frac{b}{6}$$

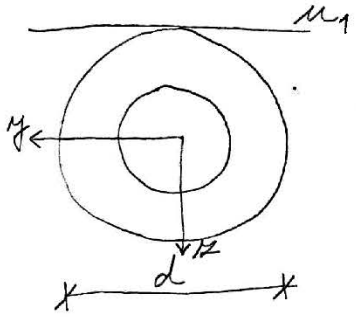
$$e_{z3} = 0$$

n_4: $y_{n4} = -b/2$ $z_{n4} = \infty$

$$e_{y4} = \frac{b}{6}$$



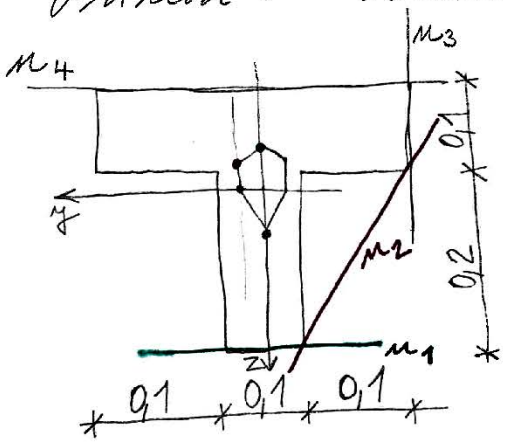
Příklad: Jádro plného kruhového průřezu



$$i_y^2 = i_z^2 = \frac{d^2}{16} \qquad I_y = I_z = \frac{1}{64}\pi d^4 \qquad A = \frac{\pi d^2}{4}$$

$$y_1 = \infty \qquad z_1 = -\frac{d}{2} \Rightarrow e_z = -\frac{d^2/16}{-d/2} = \frac{d}{8}$$

Příklad: Určete jádro průřezu



$$A = 0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}05\ m^2$$

$$z_t = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}25 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1}{0{,}1 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}1} = 0{,}19\ m$$

$$I_y = \frac{1}{12} 0{,}3 \cdot 0{,}1^3 + 0{,}3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}06^2 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2^3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}09^2 = 3{,}617 \cdot 10^{-4}\ m^4$$

$$I_z = \frac{1}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3^3 + \frac{1}{12} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1^3 = 2{,}41\overline{6} \cdot 10^{-4}\ m^4$$

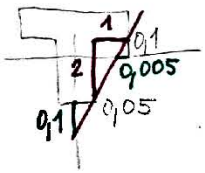
$$i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{3{,}617 \cdot 10^{-4}}{0{,}05} = 7{,}234 \cdot 10^{-3}\ m^2$$

$$i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{2{,}41\overline{6} \cdot 10^{-4}}{0{,}05} = 0{,}00483\overline{3}\ m^2$$

u_1: $y_{u1} = \infty$ $\qquad z_{u1} = 0{,}19\ m$

$$e_{y1} = -\frac{i_z^2}{y_{u1}} = 0 \qquad e_{z1} = -\frac{i_y^2}{z_{u1}} = -\frac{7{,}234 \cdot 10^{-3}}{0{,}19} = -0{,}038067\ m$$

u_2: $y_{u2} = -0{,}15 + 0{,}005 = -0{,}145$ $\qquad z_{u2} = 0{,}29$



$$e_{y2} = -\frac{i_z^2}{y_{u2}} = -\frac{0{,}00483\overline{3}}{-0{,}145} = 0{,}03\overline{3} \qquad e_{z2} = -\frac{i_y^2}{z_{u2}} = -\frac{7{,}234 \cdot 10^{-3}}{0{,}29} = -0{,}0249\ m$$

u_3: $y_{u3} = -0{,}15\ m$ $\qquad z_{u3} = \infty$

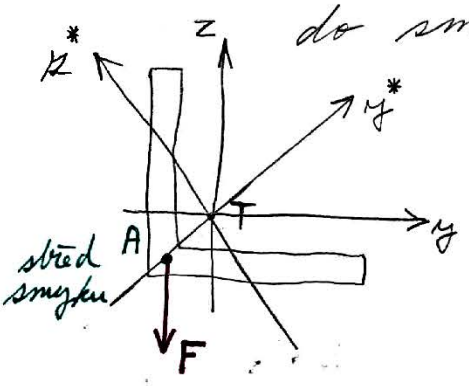
$$e_{y3} = -\frac{i_z^2}{y_{u3}} = \frac{-0{,}00483\overline{3}}{-0{,}15} = 0{,}032\overline{2}\ m \qquad e_{z3} = 0$$

u_4: $y_{u4} = \infty$ $\qquad z_{u4} = 0{,}11\ m$

$$e_{y4} = 0 \qquad e_{z4} = -\frac{i_y^2}{z_{u4}} = -\frac{7{,}234 \cdot 10^{-3}}{0{,}11} = 0{,}06576\ m$$

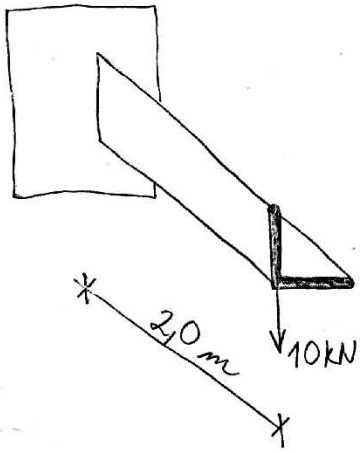
Šikmý ohyb

Zatížení leží v jedné společné rovině, která prochází osou prutu, ale není hlavní rovinou. Ohybová čára je rovinnou křivkou, neleží však v rovině zatížení, nýbrž v rovině kolmé k neutrální ose. Dokud nerozkládáme zatížení do směrů hl. os $y^*; z^*$ je možno σ_x určit dle:

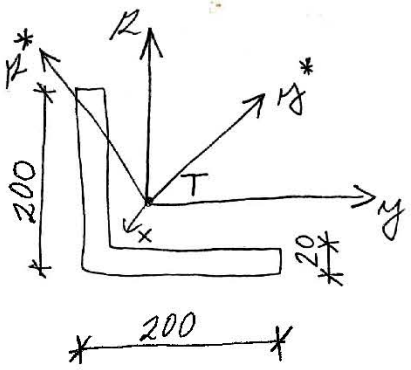


$$\sigma_x = -\frac{M_z I_y + M_y \cdot D_{yz}}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_z D_{yz} + M_y \cdot I_z}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} \cdot z$$

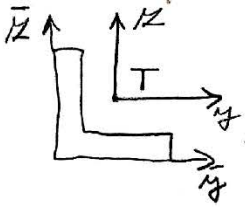
Příklad: Stanovte rozložení normálového napětí na konzole se sekknutí u nerovnoramenného úhelníku L 200 × 200 × 20



Řešení: Síla P prochází středem smyku, neleží však v žádné hlavní rovině. Jde tedy o šikmý ohyb. Rovina zatížení je od hlavních centrálních os odklopena o úhel 45°.



$$M_y = 20\,kNm$$



$$\bar{z}_1 = \frac{200 \cdot 20 \cdot 10 + 180 \cdot 20 \cdot (180/2 + 20)}{200 \cdot 20 + 180 \cdot 20} = 57{,}37 \text{ mm}$$

$$\bar{y}_1 = \bar{z}_1$$

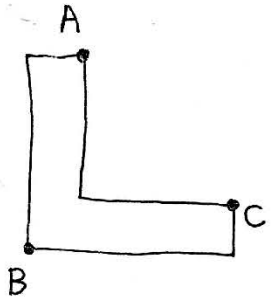
$$I_y = \frac{1}{12} 200 \cdot 20^3 + 200 \cdot 20 \cdot (57{,}37 - 10)^2 +$$
$$+ \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 180^3 + 20 \cdot 180 \cdot \left(200 - \frac{180}{2} - 57{,}37\right)^2 =$$
$$= 28{,}8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = 28{,}8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_z = I_y$$

Dyz určíme ze Steinerovy věty, protože Dyz k hlavním těžištním osám nulový.

$$Dyz = 200 \cdot 20 \cdot (200/2 - 57{,}37) \cdot (10 - 57{,}37) +$$
$$+ 180 \cdot 20 \cdot (10 - 57{,}37) \cdot (180/2 + 20 - 57{,}37) =$$
$$= -17{,}053 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 = -1{,}7053 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$\sigma_x = \frac{-20 \text{ kNm} \cdot -17{,}053 \cdot 10^{-6}}{(28{,}8 \cdot 10^{-6})^2 - (-17{,}053 \cdot 10^{-6})^2} y +$$
$$+ \frac{20 \text{ kNm} \cdot 28{,}8 \cdot 10^{-6}}{-\!/\!-} \cdot z =$$
$$= -633{,}2 \cdot 10^6 \cdot y + 1069{,}4 \cdot 10^6 \cdot z \text{ [Pa]}$$



$${}^A\sigma_x(-0{,}03737;\ 0{,}1426) = \underline{\underline{128{,}8 \text{ MPa}}} < 235 \text{ MPa}$$
VYHOVUJE

$${}^B\sigma_x(-0{,}05737;\ -0{,}05737) = -97{,}68 \text{ MPa}$$

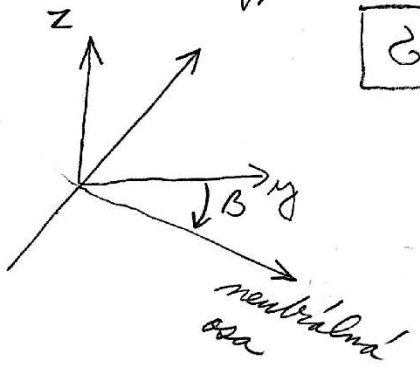
$${}^C\sigma_x = (0{,}1426;\ -0{,}03737) = 50{,}34 \text{ MPa}$$

Výpočet sklonu neutrální osy

$$\boxed{\sigma_x = 0}$$

$$\frac{z}{y} = \frac{-633{,}2}{1069{,}4} = \arctan(\beta)$$

$$\beta = -30{,}63°$$



K úplnému zjištění normálového napětí je třeba určit funkci $\varphi(x)$, přičemž v (3.28) se uplatní její derivace Θ'. Označíme-li příspěvek normálového napětí vázaného kroucení v (3.28) jako:

$$\sigma_{x\omega} = -E\Theta'\omega = -E\varphi''\omega \tag{3.47}$$

Pokud rovnici (3.47) vynásobíme hodnotou ω a integrujeme ji po průřezové ploše, tak obdržíme:

$$\int_A \sigma_{x\omega}\omega \, dA = -E\varphi'' \int_A \omega^2 dA \tag{3.48}$$

Výraz na levé straně má statický význam a jmenuje se *ohybově krouticí bimoment B* [N m^{-2} m^2]. Integrál na pravé straně je další geometrická charakteristika průřezu, která se jmenuje výsečový moment setrvačnosti I_ω [m^6]. Rovnici (3.47) je pak možno zapsat ve tvaru:

$$B = -E\varphi'' I_\omega \tag{3.49a}$$

odtud

$$-E\varphi'' = -E\Theta' = \frac{B}{I_\omega} \tag{3.49b}$$

Dosazením (3.49b) do (3.46) obdržíme vzorec pro normálové napětí σ_x ve tvaru:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{B}{I_\omega}\omega + \frac{M_y I_z + M_z D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2} z - \frac{M_z I_y + M_y D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2} y \tag{3.50}$$



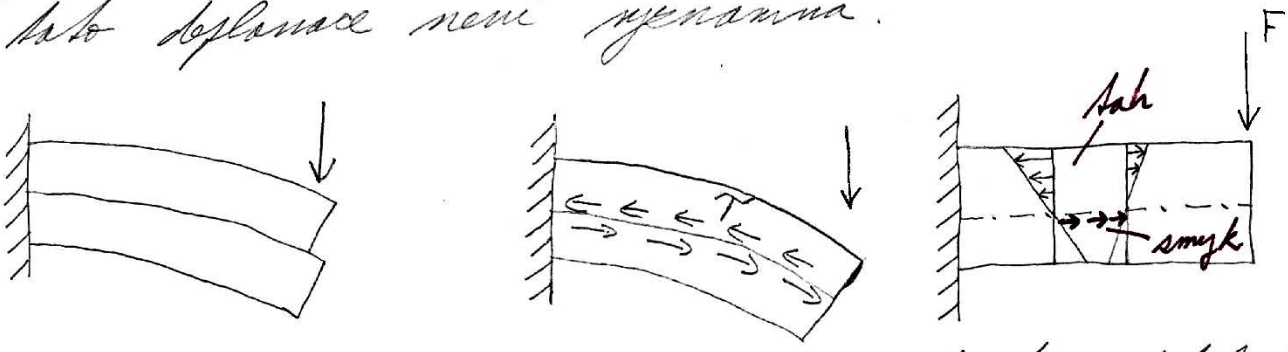
Vztah (3.50) je rozšířením obdobného výrazu odvozeného pro masivní pruty o člen obsahující vliv bimomentu. Budou-li osy souřadnic hlavními centrálními osami setrvačnosti průřezu, vztah (3.50) se dále zjednoduší:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{B}{I_\omega}\omega + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \tag{3.51}$$



Smyková (tečná) napětí při ohybu (masivní průřez)

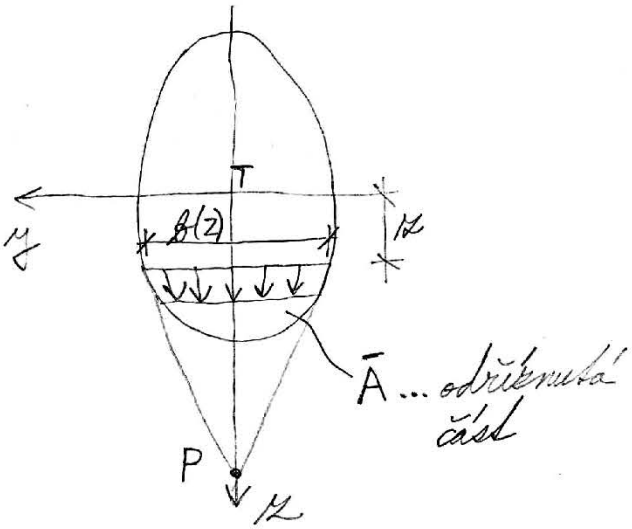
Tečná napětí při ohybu se mimo rovinu průřezu vyskytují, takže hypotéza o rovinnosti průřezů přesně neplatí. Pro dlouhý a poddajný prut tato deformace není významná.

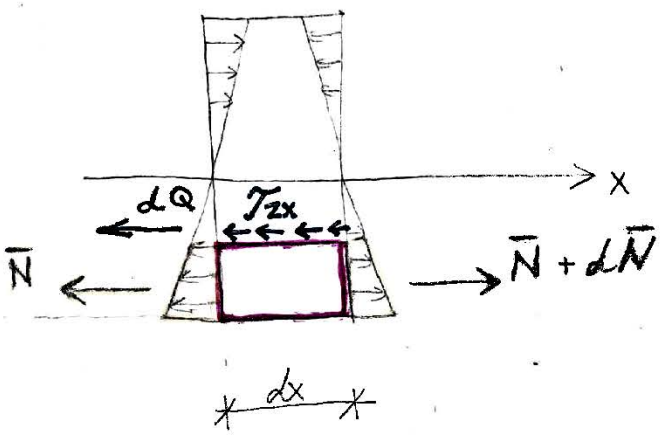


Vodorovná tečná napětí zabezpečují kompatibilní deformaci všech částí průřezu při jeho ohybu. Příčinné souvislosti vzniku smyku za ohybu se opírá o tzv. ~~Grashofovy předpoklady~~:

Smyková napětí na přímce $z = konst$ (rovnoběžka s neutrální osou) mají tyto vlastnosti:

- svislá složka napětí je po šířce průřezu konstantní
- jejich výslednice rotují směrují do společného bodu na ose symetrie, určeného průsečíkem tečen k obrysu průřezu





Na odříznutou část působí:

$$\bar{N} = \int_A \sigma_x \, dA = \frac{M_y}{I_y} \int_A z \, dA = \frac{M_y}{I_y} \cdot S_y$$ ← statický moment odříznuté části

$$d\bar{N} = \frac{d\bar{N}}{dx} dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{M_y}{I_y} \cdot S_y\right) dx = \frac{dM_y}{dx} \frac{S_y}{I_y} dx =$$

$$= V_z \frac{S_y}{I_y} dx$$

$$dQ = \tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx$$

Jurčlová podmínka rovnováhy:

$$-dQ - \bar{N} + \bar{N} + d\bar{N} = 0$$

$$dQ = d\bar{N}$$

$$\tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y} \cdot dx$$

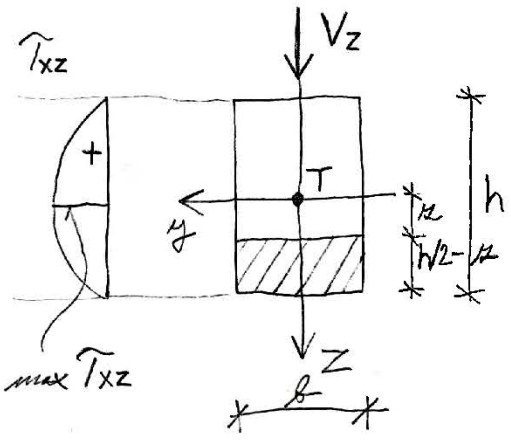
z podmínky rovnováhy $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Grashofův vzorec

$$\boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y}{b \cdot I_y}}$$

$b = b(z)$

Příklad: Obdélníkový průřez



$$S_y = b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \left(z + \frac{h/2 - z}{2}\right) =$$

$$= \frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4z^2)$$

$$I_y = \frac{1}{2} b h^3$$

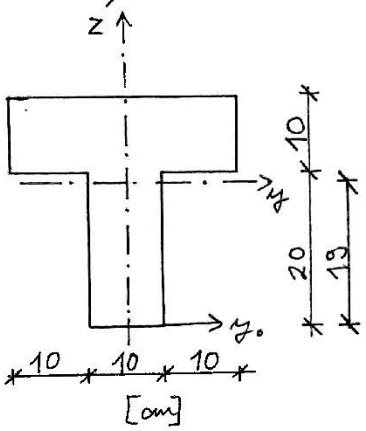
$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot \left[\frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4z^2)\right]}{b \cdot \frac{1}{2} b h^3}$$

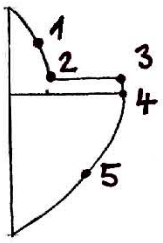
$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$

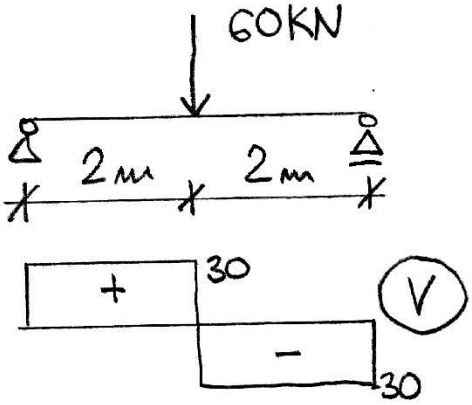
$\max \tau_{xz}$ pro $z = 0$

$$\max \tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{V_z}{A}$$

Příklad: Určete průběh smykových napětí po výšce průřezu T znázorněného na obrázku, působí-li posouvající síla $Q = 30\ kN$







- *výpočet těžiště*

$$z_t = \frac{10 \cdot 30 \cdot 25 + 10 \cdot 20 \cdot 10}{10 \cdot 30 + 10 \cdot 20} = 19\ cm$$

- *moment setrvačnosti*

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 10^3 + 6^2 \cdot 30 \cdot 10 + \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3 + 9^2 \cdot 10 \cdot 20 = 36166{,}667\ cm^4 = 3{,}616\bar{6} \cdot 10^{-4}\ m^4$$

$$S_2 = 9 \cdot 1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}06 = 1{,}8 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

$$\tau_2 = \frac{T \cdot S_y}{I_y \cdot b} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\bar{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3} = \underline{0{,}498\ MPa}$$

$$\tau_3 = \frac{\text{—}''\text{—}}{\text{—}''\text{—}\ \ 0{,}1} = \underline{1{,}493\ MPa}$$

$$S_4 = 0{,}19 \cdot 0{,}1 \cdot \frac{0{,}19}{2} = 1{,}805 \cdot 10^{-3}$$

$$\tau_4 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}805 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\bar{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1} = \underline{1{,}497\ MPa}$$

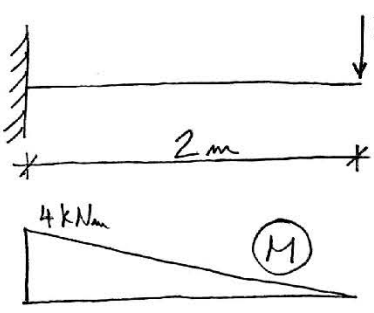
$$S_1 = 0{,}05 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}3 - 0{,}05 - 0{,}19) = 1{,}275 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

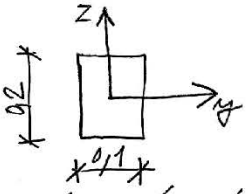
$$\tau_1 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0{,}9 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\bar{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3} = 0{,}353\ MPa$$

$$S_5 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}14 = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^3$$

$$\tau_5 = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\bar{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1} = 1{,}16\ MPa$$

Příklad: Vypočtěte maximální tečné napětí u konzoly obdélníkového průřezu



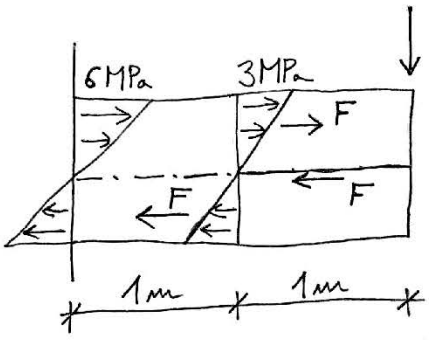


$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}2^3 = 6{,}66\bar{6} \cdot 10^{-5}\ m^4$$

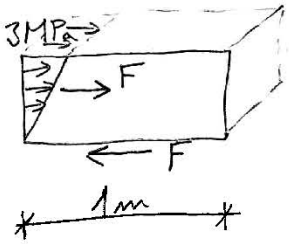
Na úsečce délky 1m od volného okraje konzoly dojde k nárůstu ohybového momentu z nuly na hodnotu 2kNm.

Normálové napětí na okraji -

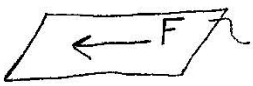
$$\sigma_x = \frac{2\,kNm}{6{,}66\bar{6} \cdot 10^{-5}} \cdot 0{,}1 = 3\,MPa$$



odříkneme horní část pruhu



$$F = 3\,MPa \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1/2 = 15\,kN$$



$$A_s = 1m \cdot 0{,}1m$$

$$\tau = \frac{F}{A_s} = \frac{15\,kN}{1 \cdot 0{,}1} = \underline{0{,}15\,MPa}$$

Řešení z výpočtového vzorce:

$$\tau = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

$$S = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 5 \cdot 10^{-4}\ m^3$$

$$I_y = 6{,}\bar{6} \cdot 10^{-5}\ m^4$$

$$b = 0{,}1$$

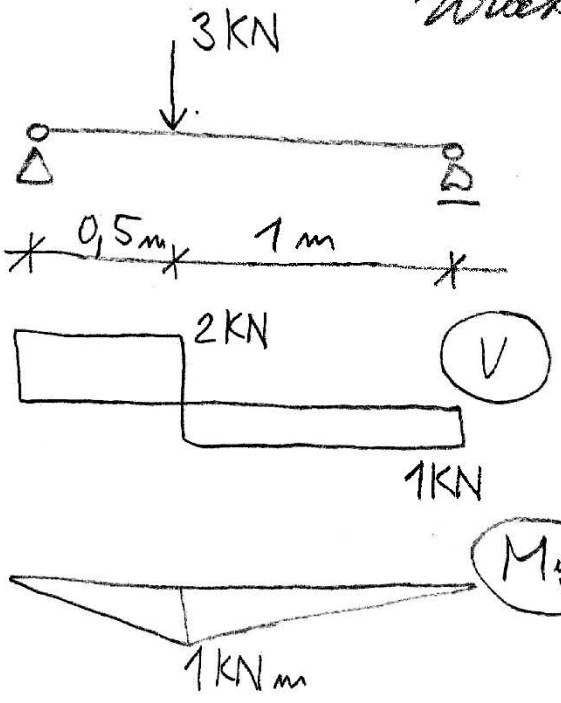
$$\tau = \frac{2\,kN \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{6{,}\bar{6} \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}1} = \underline{0{,}15\,MPa}$$

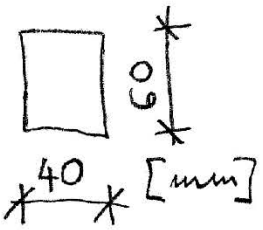
Pro prokluzový výpočet používáme obecný vztah:

$$\tau = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}$$

?

Úloha max $\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2}$



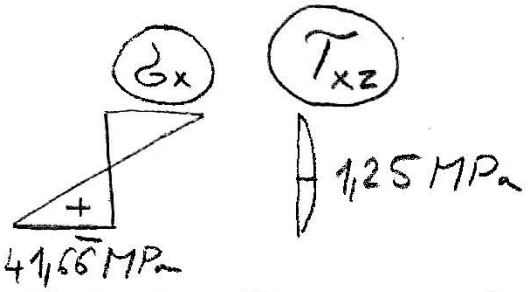


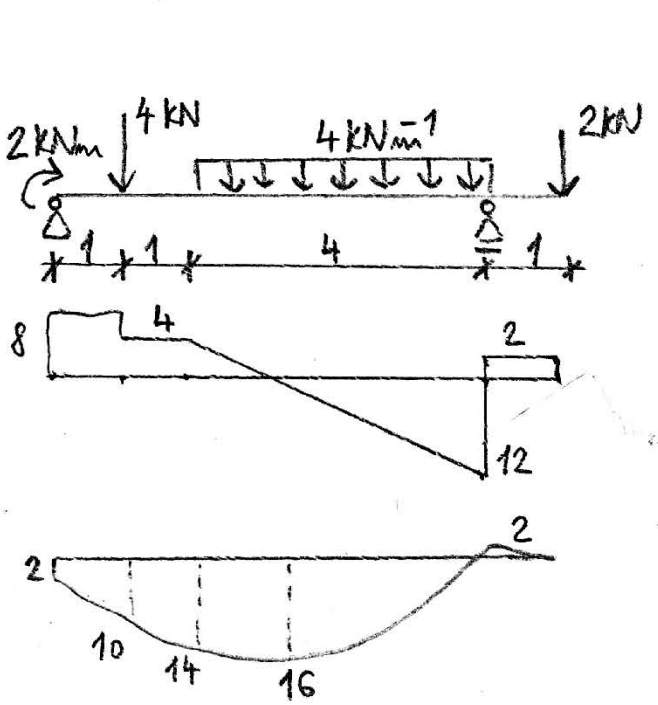
$I_y = 0{,}72 \cdot 10^{-6}\ m^4$

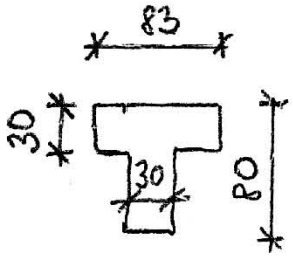
$\max S_y = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 18 \cdot 10^{-6}\ m^3$

$$\sigma_x = \frac{1 \cdot 10^3}{0{,}72 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}03 = 41{,}66\ MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 18 \cdot 10^{-6}}{0{,}72 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}04} = 1{,}25\ MPa$$







$z_1 = 49{,}9624\ (30{,}03758)$ 50

$S_0 = 199{,}35 \cdot 10^{-6}$ $200 \cdot 10^{-6}$

$I_0 = 1{,}99699 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{-6}$

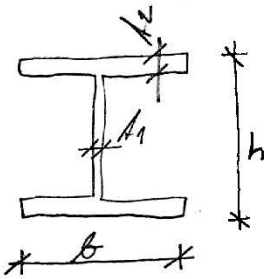
$$\sigma_x = \frac{16 \cdot 10^3}{1{,}99699 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}04996 = 400{,}3\ MPa$$

$$\tau_{xz} = \frac{12 \cdot 10^3 \cdot 199{,}35 \cdot 10^{-6}}{1{,}99699 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}01} = 7{,}5\ MPa$$

7KNm

c)

Smyková napětí v tenkostenných nosnících - střed smyku

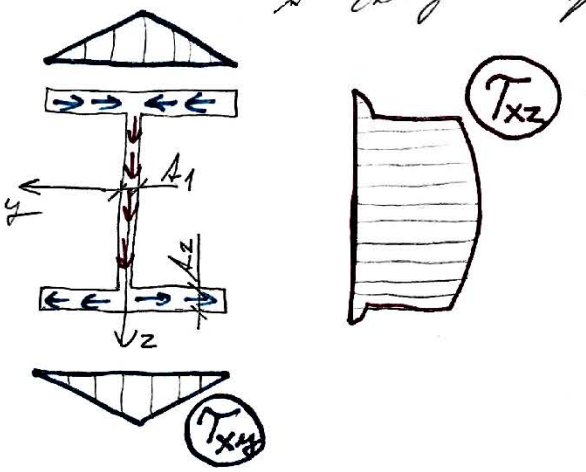


$t_1; t_2 \ll b; h$ často 1:10

Typy tenkostenných průřezů
a) otevřeného průřezu I, [, T
b) uzavřeného průřezu ○, □, apod.

Nosníky s otevřeným průřezem

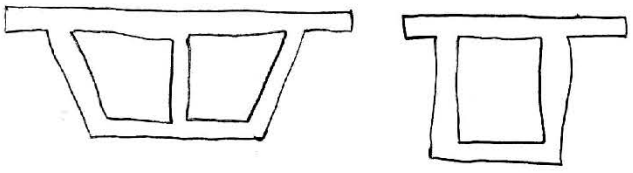
Předpoklady:
a) smyková napětí jsou konstantní v řezu kolmo k dělicí stěně
b) smyková napětí jsou rozmístěná s obrysem průřezu



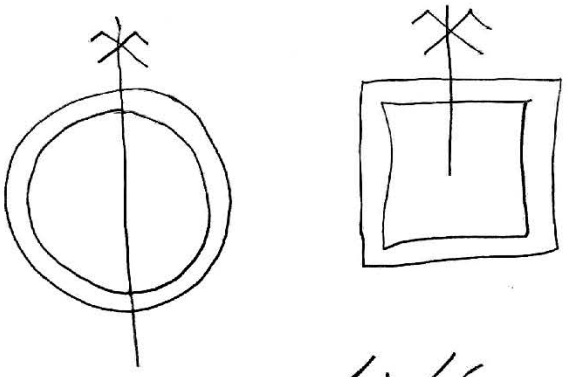
$$\tau_x = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t}$$

τ_x ... v rovině kolmé k ose x
- svislá část τ_{xz}
- vodorovná část τ_{xy}

Tenkostěnné nosníky uzavřeného průřezu



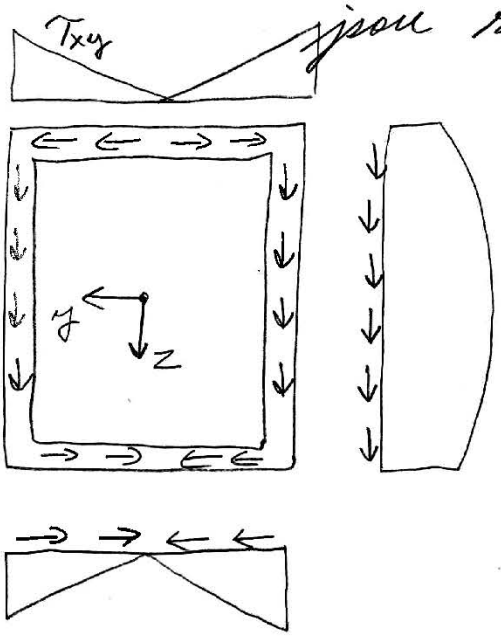
nesymetrické



symetrické

Výpočet smykových napětí je obdobný stat. neurčitou úlohu

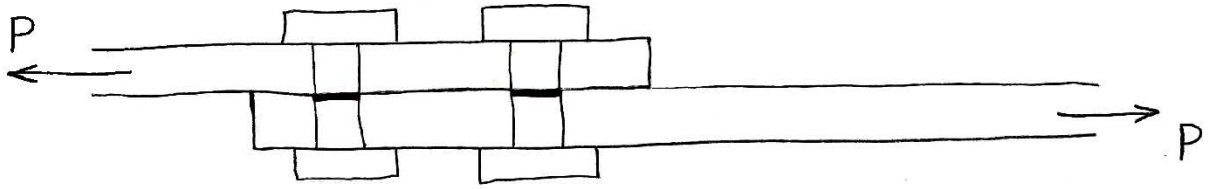
Výjimka - je dvojosmětové nosníky s rovinou symetrie, zatížené v této rovině. Smyková napětí na rovině symetrie jsou rovna nule.



Napětí T_x jako u nosníku otevřeného

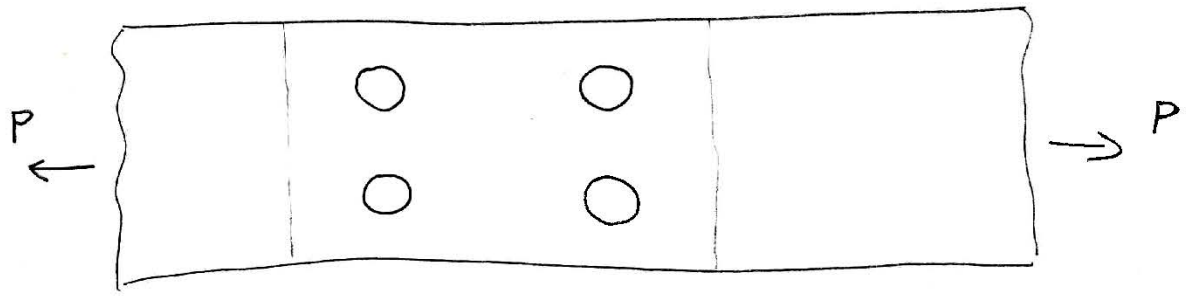
Prostý smyk

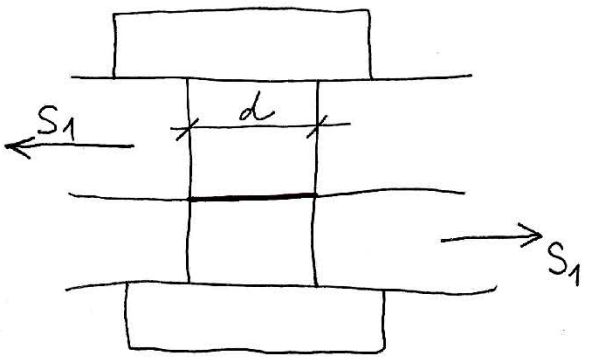
O prostém smyku hovoříme tehdy, je-li možné v uvažovaném bodě položit tři vzájemně kolmé roviny tak, že v nich nepůsobí žádná složka normálového napětí, nýbrž jen napětí smyková.
Nevznikají podélné deformace nýbrž jen zkosení.
Příklad: nýty, šrouby, svary, spojení dřev



síla působící na jeden šroub

$$S_1 = \frac{P}{n}$$ ← počet šroubů ve spoji

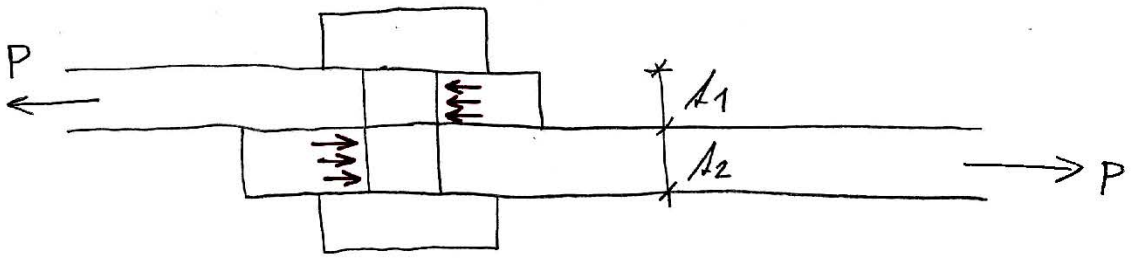


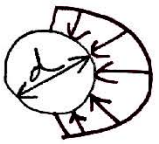


$$\tau = \frac{S_1}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq R_s \ldots$$ návrhová pevnost ve smyku (ze zkoušek)

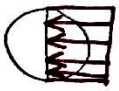
$$\tau = \frac{P}{n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq R_s$$

Otlačení šroubu





⇒ v praxi se vyskytuje i napětí



$$\sigma_{otl} = \frac{S_1}{d \cdot t_1} \leq R_{otl}$$

Dle ČSN 731401, 1998 se <u>únavnost v otlačení</u> počítá

$$F_{b,Rd} = \frac{2{,}5 \cdot \alpha \cdot f_u \cdot d \cdot t}{\gamma_{MB}}$$

pro S235 je $f_u = 360\,MPa$

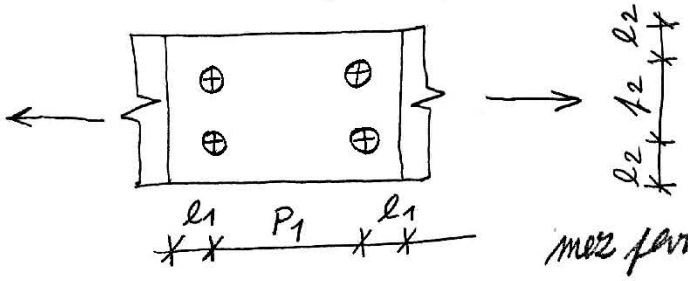
kde α je nejmenší hodnota z výrazů

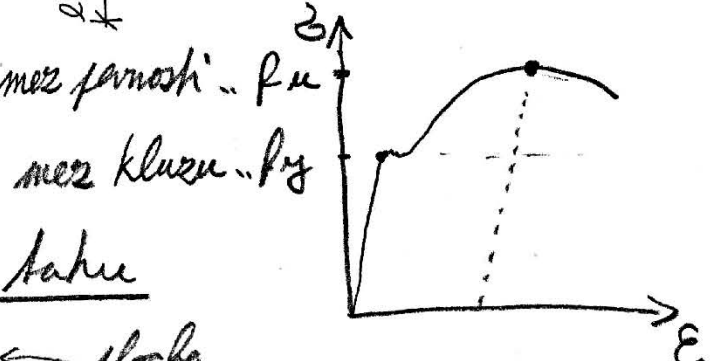
$$\alpha = \min\left\{ \frac{e_1}{3d_0};\ \frac{p_1}{3d_0} - \frac{1}{4};\ f_{uB}/f_u;\ 1{,}0 \right\}$$

d_0 ↑ díry

mez pevnosti profilu

mez pevnosti šroubu





Únavnost šroubu v tahu

$$F_{t,Rd} = \frac{0{,}9 \cdot f_{uB} \cdot A_s}{\gamma_{MB}}$$

A_s ← plocha jádra šroubu

$\gamma_{MB} \geq 1{,}45$

Výpočet únosnosti šroubu ve střihu dle normy

- vyjdeme ze vztahu pro srovnávací napětí

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_u \quad \ldots \text{mez pevnosti}$$

$$\tau \leq \frac{f_u}{\sqrt{3}} \doteq 0{,}6 \cdot f_u$$

pak únosnost šroubu ve střihu

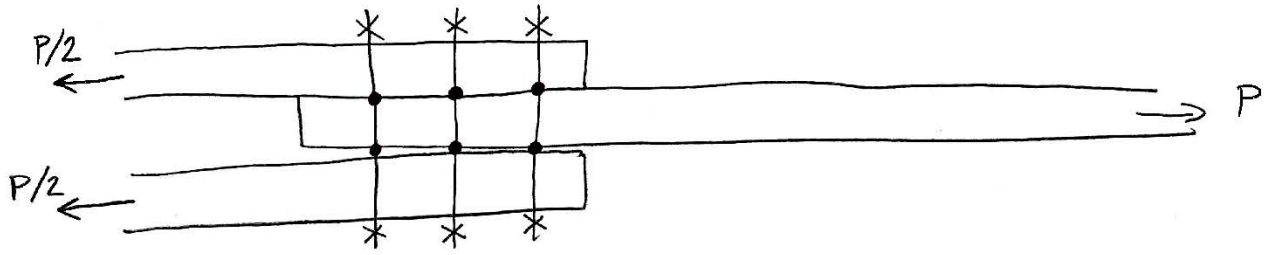
$$F_{v,Rd} \leq \frac{0{,}6 \cdot f_{ub} \cdot A}{\gamma_{MB}}$$

γ_{MB} ... dílčí součinitel spolehlivosti šroubového spoje $\gamma_{MB} = 1{,}45$

f_{ub} ... pevnostní třída šroubu

	f_{yB}	f_{uB}
4.6		400
5.6		500
8.8		800
10.9.		1000

Dostřižné šrouby



$$\tau = \frac{P}{n \cdot s \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq R_s$$

n ... počet střihů

$$V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot R_s \cdot \text{[illegible]} \cdot s \quad \ldots \text{únosnost jednoho šroubu}$$

$$n \geq \frac{P}{V_1} \quad \ldots \text{počet šroubů ve spoji}$$

v tabulce 7.2. Pro mezilehlé hodnoty $1,2\ d_0 < e_2 < 1,5\ d_0$, nebo $2,4\ d_0 < p_2 < 3,0\ d_0$ se únosnost v otlačení určí lineární interpolací.

Tabulka 7.2 - Návrhové únosnosti šroubových spojů

Únosnost ve střihu pro jednu střihovou rovinu šroubu:

- když rovina střihu prochází závitem šroubu:

a) pro pevnostní třídy 4.6, 5.6 a 8.8:

$$F_{v,Rd} = \frac{0,6 f_{ub} A_s}{\gamma_{Mb}}; \qquad (7.2)$$

b) pro pevnostní třídu 10.9:

$$F_{v,Rd} = \frac{0,5 f_{ub} A_s}{\gamma_{Mb}}; \qquad (7.3)$$

- když rovina střihu prochází přes plný dřík šroubu:

$$F_{v,Rd} = \frac{0,6 f_{ub} A}{\gamma_{Mb}}. \qquad (7.4)$$

Únosnost v otlačení spojovaného prvku nebo šroubu:

$$F_{b,Rd} = \frac{2,5 \alpha\ f_u d t}{\gamma_{Mb}}, \qquad (7.5)$$

kde α je nejmenší hodnota z výrazů:

$$\frac{e_1}{3d_0};\ \frac{p_1}{3d_0} - \frac{1}{4};\ \frac{f_{ub}}{f_u};\ 1,0\ .$$

Únosnost v tahu jednoho šroubu:

$$F_{t,Rd} = \frac{0,9 f_{ub} A_s}{\gamma_{Mb}}. \qquad (7.6)$$

Ve vzorcích (7.2) až (7.6) je:

A - plná průřezová plocha dříku šroubu;
A_s - plocha jádra šroubu podle tabulky 7.4;
d - průměr šroubu;
d_0 - průměr díry;
f_{ub} - mez pevnosti šroubu;
f_u - mez pevnosti posuzovaného prvku;
t - tloušťka posuzovaného prvku.

Definice roztečí p a koncových vzdáleností e je na obrázku 7.1.

7.3.5 Návrhová únosnost nýtových spojů

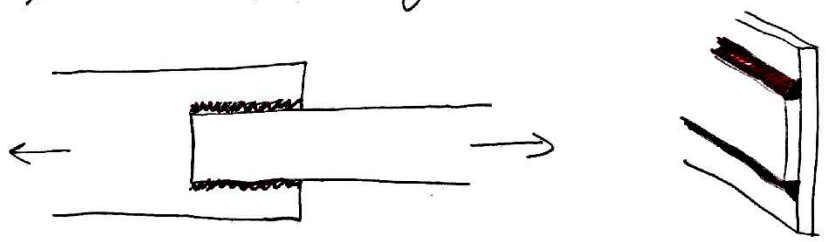
7.3.5.1 Pro nýtované konstrukce se používají nýty podle 4.8.4. Návrhové únosnosti nýtových spojů se počítají podle vzorců uvedených v tabulce 7.3. Přitom dílčí součinitel spolehlivosti nýtového spoje $\gamma_{Mr} = 1,45$.

7.3.5.2 Pro extrémně malé příčné vzdálenosti nýtů je nutné jejich návrhové únosnosti v otlačení $F_{b,Rd}$ redukovat analogicky jako u šroubů podle 7.3.4.5.

7.3.5.3 Nýtové spoje mají být navrženy tak, aby přenášely jen zatížení smykem. Při současném namáhání smykem a tahem musí být splněny podmínky $F_{v,Sd} \le F_{b,Rd}$, $F_{t,Sf} \le F_{t,Rd}$ a podmínka (7.7). Jednostřižné přeplátované spoje plochých nevyztužených prvků s jedním nýtem nejsou pro nosné spoje přípustné.

Svarové spoje

- tavné svary

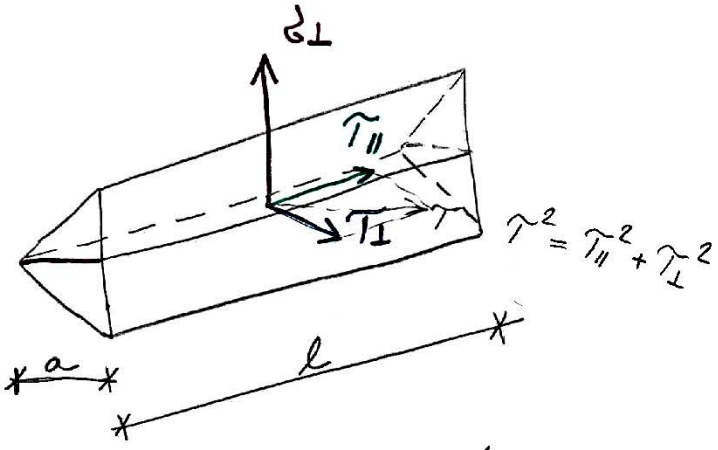


Dle ČSN 731401 musí svar vyhovět současně dvěma podmínkám

$$\sqrt{\sigma_\perp^2 + 3\tau_\perp^2 + 3\tau_\parallel^2} \le \frac{f_u}{\beta_w \cdot \gamma_{Mw}} \qquad \left(\sqrt{\sigma^2+3\tau^2} \le R_d\right)$$

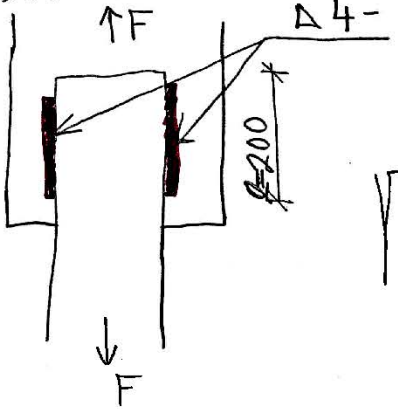
$$\sigma_\perp^2 \le \frac{f_u}{\gamma_{Mw}}$$

pro ocel S235 je $f_u = 360$ MPa
$\beta_w = 0{,}8$
$\gamma_{Mw} = 1{,}5$
tedy $\frac{f_u}{\beta_w \cdot \gamma_{Mw}} = 300$ MPa



Předpokládá se porušení v rovině skříně na ploše $a \cdot l$.

Příklad: Určete únosnost svarového spoje Δ4.



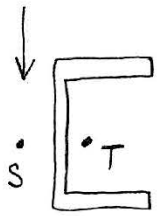
$$\tau_\parallel = \frac{F/2}{a \cdot l}$$

$a = 4$ mm
$l = 200$ mm

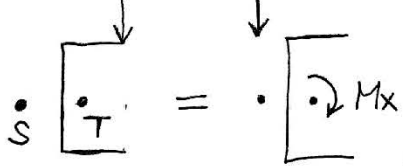
$$\sqrt{3 \cdot \left(\frac{F/2}{0{,}004 \cdot 0{,}2}\right)^2} \le 300 \text{ MPa}$$

$$F = \frac{2 \cdot 300\text{MPa} \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}2}{\sqrt{3}} = 277 \text{ kN}$$

Střed smyku

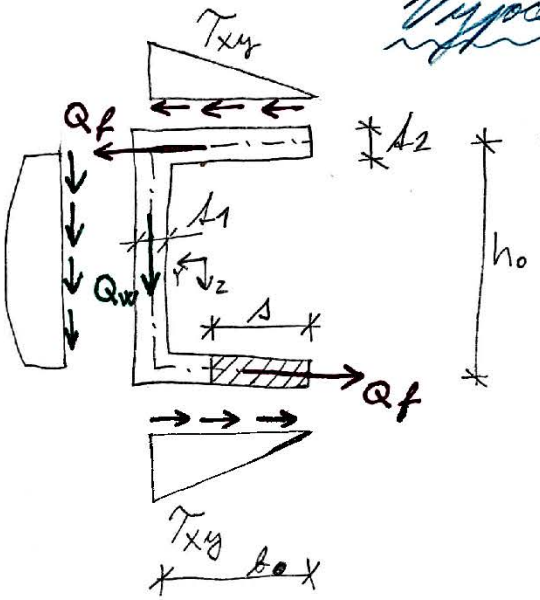


Pokud nemá být prut kroucen, musí výslednice vnějších sil procházet středem smyku!
V opačném případě je průřez ještě navíc namáhán kroucením.



V dvojnásobně symetrickém průřezu je střed smyku totožný s těžištěm průřezu. Průřez s jednou osou symetrie má střed smyku na této ose, ale není totožný s těžištěm průřezu.

Výpočet středu smyku



- statický moment odděleného části pásnice

$$S_y = A_2 \cdot s \cdot \frac{h_0}{2}$$

- napětí v pásnici

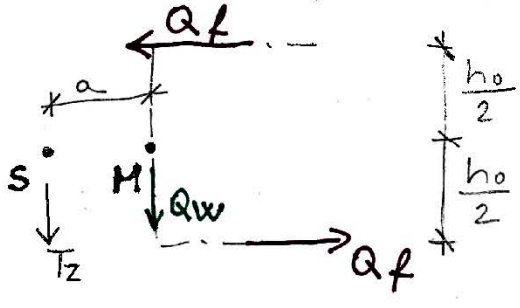
$$\tau_{xy} = \frac{T_z \cdot S_y}{I_y \cdot A_2} = \frac{T_z \cdot h_0}{2 \cdot I_y} \cdot s$$

- síla Q_f

$$Q_f = \int_0^{b_0} \tau_{xy} \cdot A_2 \, ds = \frac{T_z \cdot h_0}{2 I_y} \cdot A_2 \cdot \int_0^{b_0} s \, ds =$$

$$= \frac{T_z \cdot h_0}{2 I_y} \cdot A_2 \cdot \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{b_0} = \frac{T_z \cdot A_2 \cdot b_0^2 \cdot h_0}{4 I_y}$$

- Ze silové podmínky $\Sigma F_z = 0$ musí platit $Q_w = T_z$
- Momentová podmínka k bodu S. $\Sigma M_x = 0$. Hledáme takovou polohu vnější síly T_y tak, aby $\Sigma M_x = 0$.

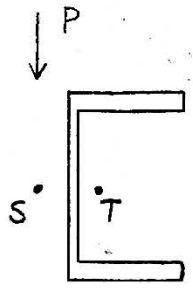


$$Q_w \cdot a = Q_f \cdot h_0$$

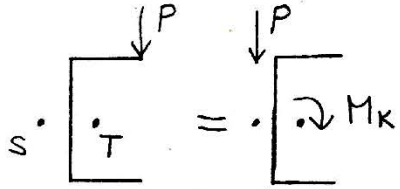
$$a = \frac{Q_f \cdot h_0}{T_z} = \frac{A_2 \cdot b_0^2 \cdot h_0^2}{4 I_y}$$

$$\boxed{a = \frac{A_2 \cdot b_0^2 \cdot h_0^2}{4 I_y}}$$

Střed smyku

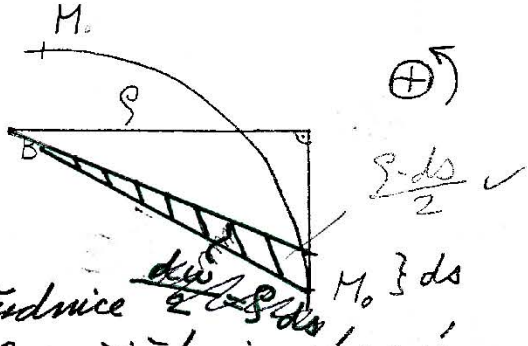


Pokud síla P prochází středem smyku je průřez namáhán pouze ohybem. V opačném případě je průřez ještě navíc namáhán kroucením



V dvojnásobně symetrickém průřezu je střed smyku totožný s těžištěm průřezu. Průřez s jednou osou symetrie má střed smyku na této ose, ale není totožný s těžištěm průřezu

Výpočet středu smyku

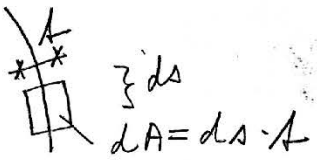


Výsečová souřadnice bodu M je rovna dvojnásobku plochy výseče, kterou opíše průvodič ρ, pohybuje-li se z počátku M_0 proti chodu hodinových ručiček do bodu M. Výsečová souřadnice vytvořená ze smyslu chodu hodinových ručiček je záporná.

(1) $\omega = \int_{M_0}^{M} \rho \, ds$ dvojnásobek plochy výseče (M_0, M, S)

Výsečový moment setrvačnosti

$$I_\omega = \int_A \omega^2 \, dA \qquad [m^6]$$



Výsečový statický moment

$$S_\omega = \int_A \omega \, dA \qquad [m^4]$$

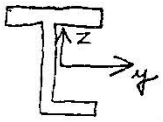
Výsečové deviační momenty

$$I_{\omega y} = \int_A \omega \cdot z \, dA \qquad [m^5]$$

(2)

$$I_{\omega z} = \int_A \omega \cdot y \, dA \qquad [m^5]$$

Jestliže y, z jsou těžišťové osy pak



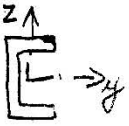
$$y_{cs} = \frac{I_{y\omega_B} I_z - I_{z\omega_B} D_{yz}}{I_y I_z - D_{yz}^2} + y_b = \alpha_y + y_b$$

$$z_{cs} = \frac{I_{y\omega_B} D_{yz} - I_{z\omega_B} I_y}{I_y I_z - D_{yz}^2} + z_b = \alpha_z + z_b$$

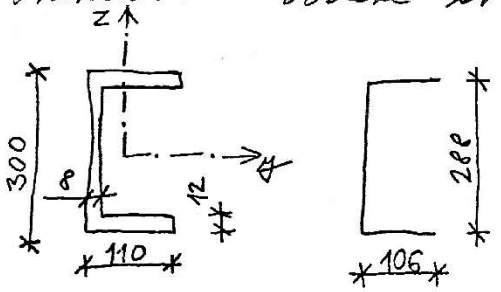
y_b, z_b ... souřadnice pomocného bodu B, od kterého integrujeme a odměřujeme souřadnice středu smyku

D_{yz} ... deviační moment

V případě, že osy y, z jsou hlavní centrální osy setrvačnosti ($D_{yz} = 0$) je možno střed smyku určit takto: $\alpha_y = \frac{I_{y\omega_B}}{I_y}$ $\alpha_z = -\frac{I_{z\omega_B}}{I_z}$



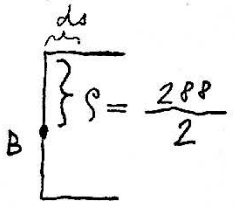
Příklad 1: Určete střed smyku u profilu U



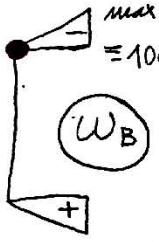
$$I_y = 2\cdot\left(\frac{1}{12}\cdot 110\cdot 12^3 + 144^2\cdot 12\cdot 110\right) + \frac{1}{12}\cdot 8\cdot 276^3 = 6{,}879\cdot 10^7\ mm^4$$

$$A = 2\cdot 12\cdot 110 + 8\cdot 276 = 4848\ mm^2$$

Podle vztahu (1) určíme průběh výsečové souřadnice ω od zvoleného počátku B.

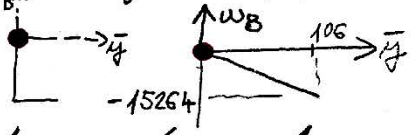


$\int_B^{106} \rho\, ds = \frac{288}{2}$ na posici B je ρ = konst.

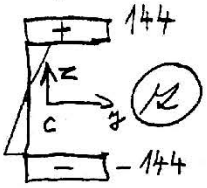


$\omega_{11} = \int_0^{106} 144 = 144\cdot 106$

Hledané pomocný souř. systém $\bar{y}$, ω_B



Ve vztahu 2 budeme potřebovat integrovat součin funkce ω s funkcí z. Proto si vyneseme průběh z po střednici průřezu.



$$I_{y\omega_B} = \int \omega_B \cdot z\, dA = 2\cdot \int_{138}^{150}\left[\int_0^{106} -144\cdot\bar{y}\cdot 144\cdot d\bar{y}\right] dz =$$

$$= 2\cdot\int_{138}^{150}\left[\frac{-144\cdot\bar{y}^2\cdot 144}{2}\right]_0^{106} dz = -\int_{138}^{150} 232{,}989\cdot 10^6\, dz =$$

$$= -232{,}989\cdot 10^6\,[150-138] = -2{,}796\cdot 10^9\ mm^5$$

$$\alpha_y = \frac{I_{y\omega_B}}{I_y} = \frac{-2{,}796\cdot 10^9\ mm^5}{6{,}879\cdot 10^7\ mm^4} = -40{,}645\ mm$$

$$a = \frac{12\cdot 106^2\cdot 288^2}{4\cdot 6{,}879E7} = 40{,}6436\ mm$$

Kroucení prutů kruhového a mezikruhového průřezu

- prosté kroucení; kroutící (kroutný) moment $M_x = M_x$
- rotačně symetrický průřez – kruhový, mezikruhový

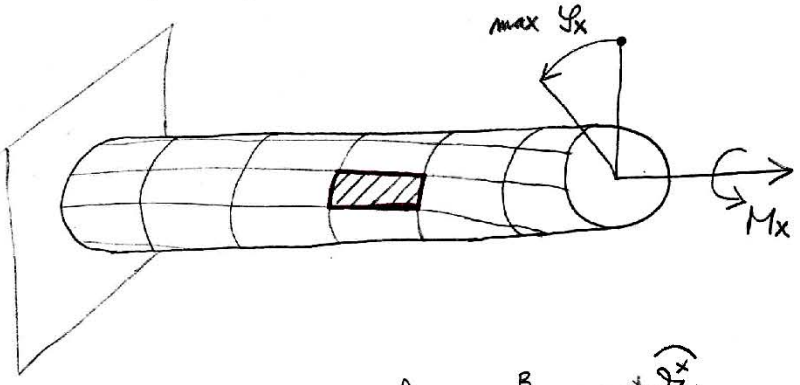
Předpoklady:

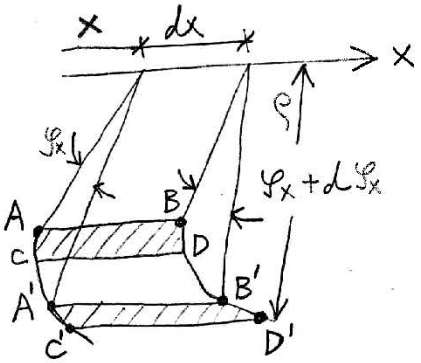
a) osa prutu zůstane i po deformaci přímá

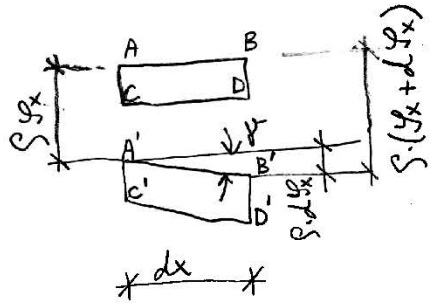
b) průřezy zůstanou rovinnými i po deformaci a vzájemně se nezdálí

c) jednotlivé průřezy se otáčejí jako tuhé celky

Z předpokladů plyne $\varepsilon_x = 0$, $\sigma_x = 0$.

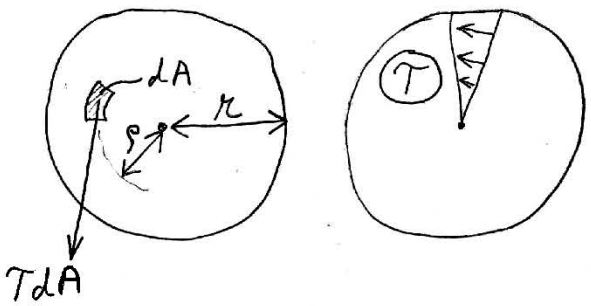






(1) $\gamma = \dfrac{\rho\, d\varphi_x}{dx} = \rho \cdot \Theta$ kde $\Theta = \dfrac{d\varphi_x}{dx}$

(2) $\tau = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \Theta$ … smyk. křivka … roste lin. s rostoucí ρ



(1) $M_x = \int_A \rho \cdot \tau \cdot dA = \int_A \rho \cdot (G\Theta\rho)\, dA =$

$= G \cdot \Theta \int_A \rho^2 dA = G \cdot \Theta \cdot I_p$

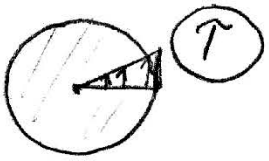
$I_p = I_y + I_z$

Z (3) $\quad \Theta = \frac{d\varphi_x}{dx} = \frac{M_K}{G I_t}$ (4) I_t... moment tuhosti v prostém kroucení $[m^4]$

pro kruh je $I_t \equiv I_p = \frac{\pi}{2} r^4$

Dosazením (4) do (2)

(5) $$\tau = \frac{M_K}{I_t} \cdot s$$



(6) $$\tau_{max} = \frac{M_K}{I_t} \cdot r$$

Pootočení φ_x lze získat integrací rovnice (4)

$$\varphi_x = \int \Theta \, dx = \int \frac{M_K}{G I_t} dx$$

Integrační konstantu lze získat z podmínky, že prut má v místě uložení nulové natočení. Např. pro $x = 0$; $\varphi_x = 0$ je $c_1 = 0$ a pak

$$\varphi_x = \frac{M_K}{G I_t} \cdot x$$

Přírůstek pootočení po délce prutu je lineární

Vzájemné pootočení průřezů ($x = a$; $x = b$)

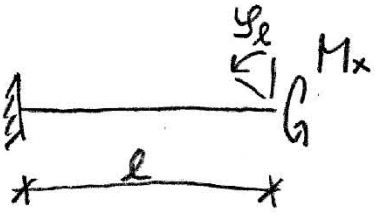
$$\varphi_{b-a} = \int_a^b \frac{M_K}{G I_t} dx = \frac{M_K}{G I_t} \cdot l$$

Pro prut z několika úseků pro M_{Ki}, I_{ti} G_{Ki} jak platí.

$$\varphi_l = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{Ki} l_i}{G_i I_{ti}}$$

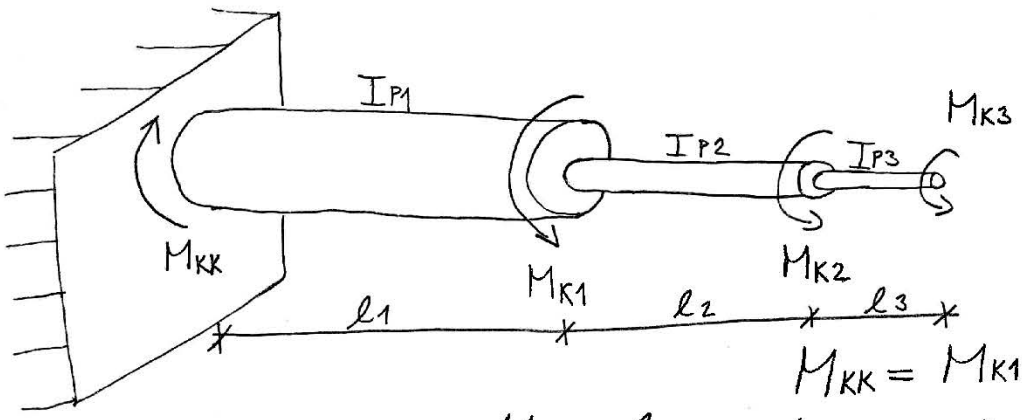
n ... počet úseků
l_i ... délka úseku

Příklad:



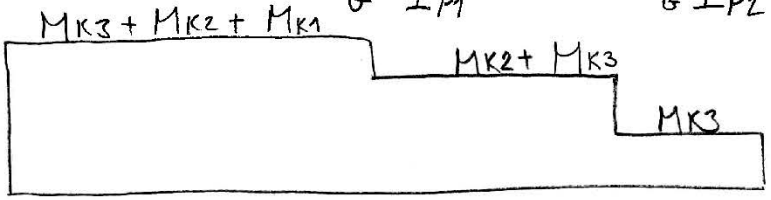
$$\varphi_l = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot I_t}$$

Příklad:

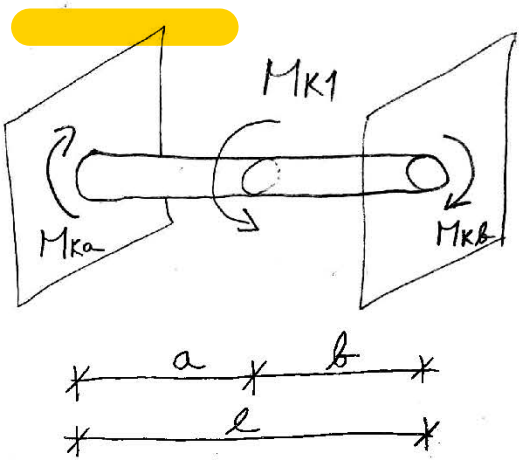


$$M_{KK} = M_{K1} + M_{K2} + M_{K3}$$

$$\varphi = \frac{M_{KK} \cdot l_1}{G\, I_{P1}} + \frac{(M_{K3} + M_{K2}) \cdot l_2}{G\, I_{P2}} + \frac{M_{K3} \cdot l_3}{G\, I_{P3}}$$



Příklad: Určete hodnoty M_{Ka}, M_{Kb}.



Řešení: Úhel pootočení musí být v levé i pravé straně stejný

$$(1)\quad \varphi = \int_0^a \frac{M_{Ka}}{G I_P}\, dx = \int_a^b \frac{M_{Kb}}{G I_P}\, dx$$

$$(2)\quad M_{Ka} + M_{Kb} = M_{K1}$$

$$2(1)\quad \frac{M_{Ka} \cdot a}{G I_P} = \frac{M_{Kb} \cdot b}{G I_P}$$

$$M_{Ka} = M_{Kb} \cdot \frac{b}{a}$$

$$M_{Ka} \cdot a = (M_{K1} - M_{Ka}) \cdot b$$

$$M_{Ka} \cdot (a+b) = M_{K1} \cdot b$$

$$M_{Ka} = M_{K1} \cdot \frac{b}{l}$$

$$\boxed{M_{Ka} = M_{K1} \cdot \frac{b}{l}}$$

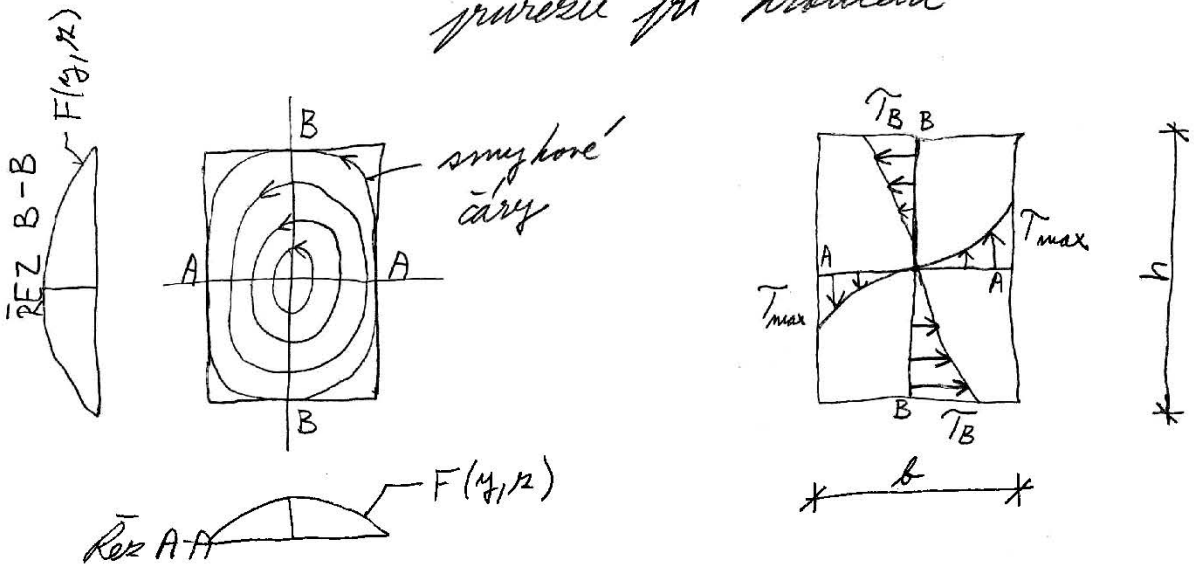
$$\boxed{M_{Kb} = M_{K1} \cdot \frac{a}{l}}$$



$$I_P = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$W_K = \frac{\pi \cdot D^3}{16}$$

Smyková napětí v průřezu oddělitelného při kroucení



Maximální smykové napětí lze určit pomocí průřezového modulu v kroucení W_k [m³; mm³]

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_k}$$

W_k je obdoba průřezového modulu v ohybu

Pro obdélníkový průřez platí:

$$I_k = \alpha b^3 h$$

$$W_k = \beta b^2 h$$

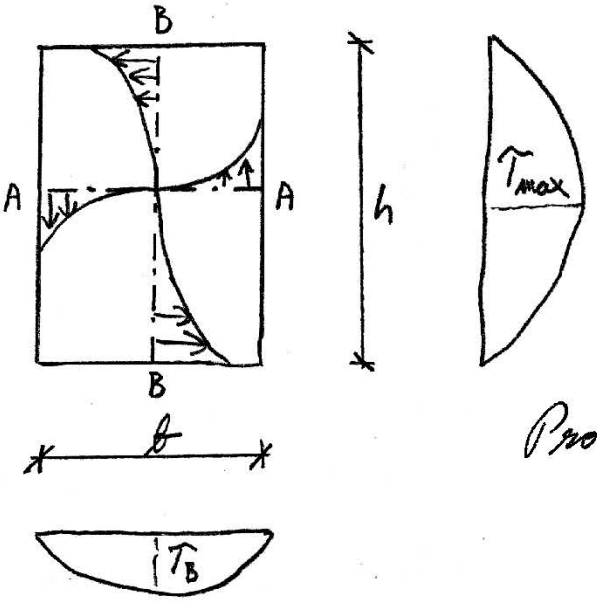
α, β jsou bezrozměrné součinitelé z nějž následují podrobnější analýzy

Pro obdélníkový průřez lze moment tuhosti I_k aproximovat vzorcem.

$$I_k \doteq \frac{1}{3}\left[1 - 0{,}63\,\frac{b}{h}\left(1 - \frac{b^4}{12h^4}\right)\right] b^3 h$$

Pro $h \gg b$ lze různou uvažovat $\doteq 1$

Kroucení prutů mosiného průřezu



$$\tau_{max} = \frac{M_x}{I_t} \cdot \ell = \frac{M_x}{W_t}$$

W_t ... průřezový modul v kroucení $[m^3]$

Pro  $I_t = \alpha \cdot b^3 \cdot h$ $[m^4]$

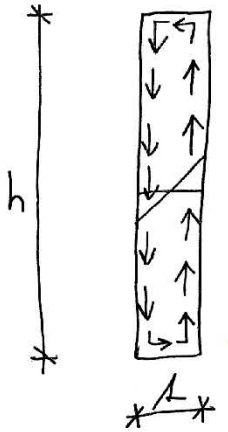
$W_t = \beta \cdot b^2 \cdot h$ $[m^3]$

α, β ... bezrozměrné součinitele

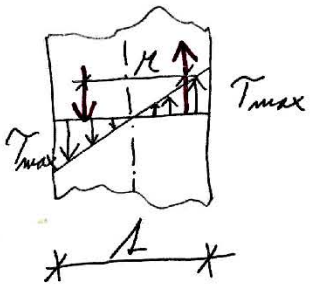
h/b	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
α	0,1406	0,154	0,166	0,177	0,187	0,196	0,204	0,211
β	0,208	0,214	0,219	0,223	0,227	0,231	0,234	0,237

h/b	1,8	1,9	2,0	2,5	3	5	10	∞
α	0,217	0,223	0,229	0,249	0,263	0,291	0,312	0,333
β	0,240	0,243	0,246	0,258	0,267	0,292	0,312	0,333

Kroucení tenkostěnných prutů otevřeného průřezu



$\Lambda \ll h$



Pro $\Lambda/h = 0$ jak plaší

$$I_\Lambda = \frac{1}{3}\Lambda^3 h$$

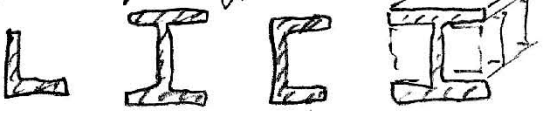
$$W_\Lambda = \frac{I_\Lambda}{\Lambda} = \frac{1}{3}\Lambda^2 h$$

Pro průřez složený z obdélníků platí:

$$I_\Lambda = \eta \sum_{i=1}^{n} I_{\Lambda i} = \frac{\eta}{3} \sum \Lambda_i^3 \cdot h_i$$

[dle]

η je korekční faktor, který vyjadřuje vliv sdružení Λ/h apod.



Průřez	η
Hranolník	1,00
Válcovaný I profil	1,20
Válcovaný U profil	1,12
Svařovaný I př. s výstuhami	1,5
Svař. T s výstuhami	1,4

Z experimentu:

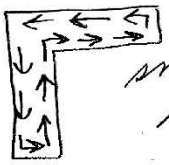
$$I_\Lambda = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot \vartheta_l}$$ ← měříme

$$\frac{M_L}{3} \sum \Lambda_i^3 \cdot h_i = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot \vartheta_l}$$

M_L ← výstup

(A) U otevřených svazkových průřezů L_i T_i + lze deplanaci zanedbat a vystačit pouze smykové napětí od prostého kroucení:

$$\tau_\Lambda = \frac{M_K}{I_\Lambda} \cdot \Lambda$$



M_K ... vnější kroutící moment

I_Λ ... moment tuhosti v prostém kroucení

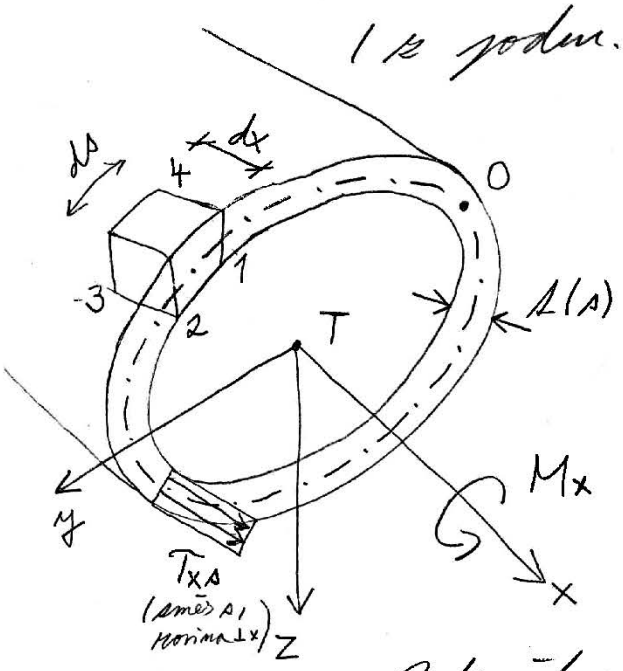
Λ ... vzdálenost průřezu v posuzovaném místě

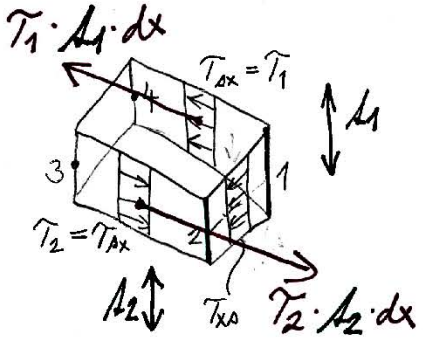
Kroucení tenkostěnných prutů uzavřeného průřezu

V kroucených tenk. prutech uzavřeného průřezu vzniká oblíčně rozložení smyk. napětí než u průřezů otevřených.

Předpoklady:

- tloušťka t je relativně malá, potom lze přibližně předpokládat, že smyková napětí jsou konstantní podél celé tloušťky
- směr napětí musí být tečný nebo obvyklé
- přibližně se směru tečny ke střednici průřezu
- Výslednice smyk. napětí Q [N/m] v libovolném řezu napříč tloušťkou průřezu je konstantní podél celé uzavřené střednicové křivky průřezu (z podm. rovnováhy)



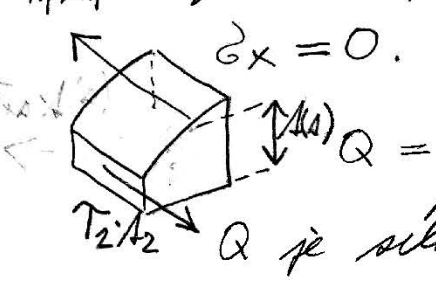


Podle věty o vzájemnosti smykových napětí:

$$\tau_{sx} = \tau_{xs}$$

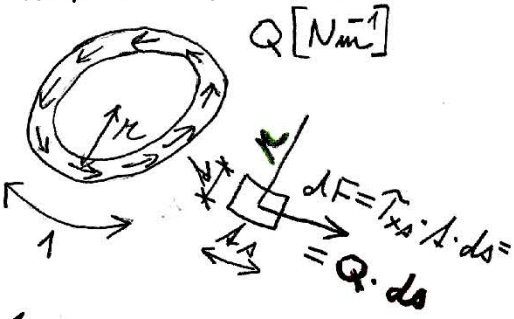
$$\Sigma F_x = 0: \quad \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx = \tau_1 \cdot t_1 \cdot dx \; (= \underbrace{Q \cdot ds}_{\text{konst.}})$$

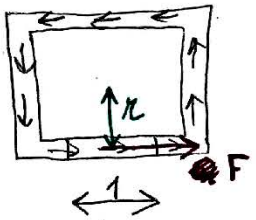
Ze silové podmínky rovnováhy plyne, že v průřezu je konstantní smykový tok, neboť $\sigma_x = 0$. Po obvodu průřezu musí platit, že



$$Q = \tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau_{xs}(s) \cdot t(s) = \text{konst.}$$

Q je síla na jednotku obvodu





Integrací po průřezu získáme kroutící moment M_x

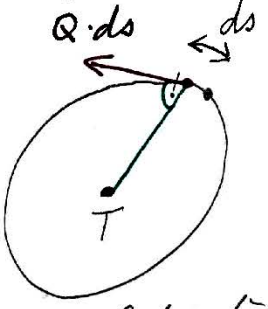
$$M_x = \oint dM_x = \oint dF \cdot r = \oint Q \cdot r \cdot ds = Q \cdot \int r\,ds = Q \cdot 2A_K = \tau_{xs} \cdot t \cdot 2 \cdot A_K$$

$[m]$, $[N]$

r ... délka kolmice spuštěné z střediště průřezu k tečně

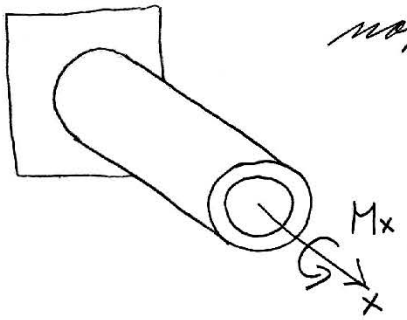
A_K ... plocha ohraničená střednicí průřezu

$$M_x = \tau_{xs} \cdot t \cdot 2A_K$$



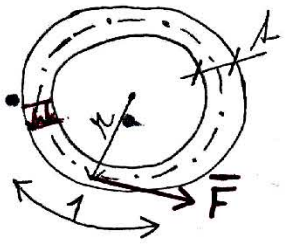
$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{2 \cdot A_K \cdot t}$$

Příklad: Odvoďte vztah pro výpočet smykového napětí tenkostěnného průřezu.



$\bar{M}$ ... moment na jednotkovou délku obvodu

$$\bar{M} = \frac{M_x}{2\pi r}$$

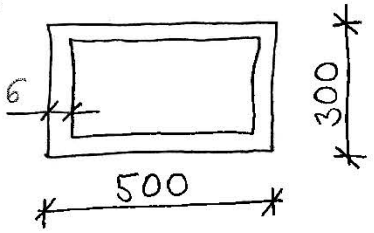


$$\bar{F} = \frac{\bar{M}}{r} = \frac{M_x}{2\pi r^2}$$

$$\tau_{xs} = \frac{\bar{F}}{1 \cdot t} = \frac{M_x}{2\pi r^2 \cdot t} = \frac{M_x}{2 A_K \cdot t}$$

Příklad: Vypočtěte napětí od prostého kroucení

a)

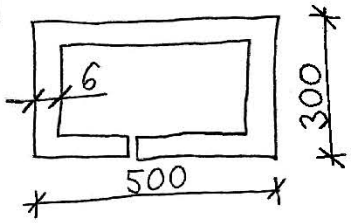


$M_K = 3\,kNm$

$$\tau_K = \frac{M_K}{2 \cdot A_K \cdot t}$$

$$\tau_K = \frac{3\,kNm}{2 \cdot 0{,}494 \cdot 0{,}294 \cdot 0{,}006} = 1{,}72\,MPa$$

b)



$$\tau_K = \frac{M_K}{I_t} \cdot t$$

$$I_t = \frac{1}{3} \cdot \eta \cdot \sum_{i=1}^{n} h_i t_i^3 \quad [\text{čtyřka}]$$

$$= 2 \cdot (0{,}494 \cdot 0{,}006^3 + 0{,}294 \cdot 0{,}006^3) = 113{,}5 \cdot 10^{-9}\,m^4$$

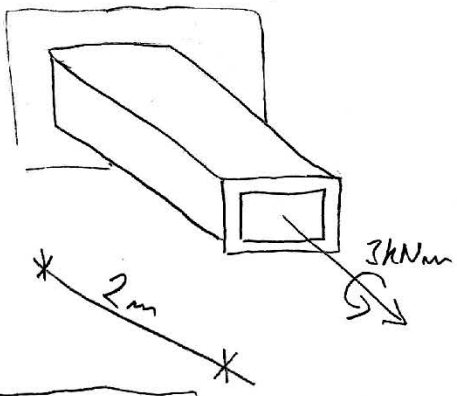
$$\tau_K = \frac{3\,kNm}{113{,}5 \cdot 10^{-9}} \cdot 0{,}006 = 158{,}6\,MPa$$

$\frac{158{,}6}{1{,}72} \doteq$ 90x nižší hodnota napětí !

Příklad: Určete pootočení na konzole délky 2 m

$G = 81\,GPa$

a)



$$I_t = \frac{4 \cdot A_K^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{h_i}{t_i}} = \frac{4 \cdot (0{,}494 \cdot 0{,}294)^2}{2 \cdot \left(\frac{0{,}494}{0{,}006} + \frac{0{,}294}{0{,}006}\right)} =$$

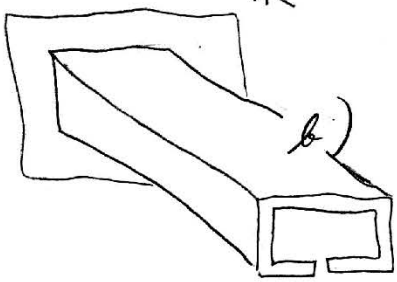
$$= 3{,}2122 \cdot 10^{-4}\,m^4 \checkmark$$

$$\varphi = \frac{M_K \cdot l}{G \cdot I_t} = \frac{3\,kNm \cdot 2\,m}{81 \cdot 10^9 \cdot 3{,}2122 \cdot 10^{-4}} =$$

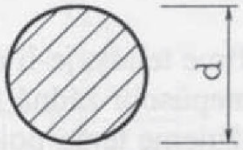
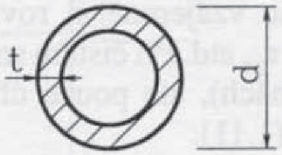
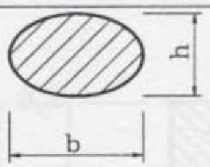
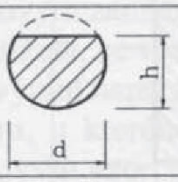
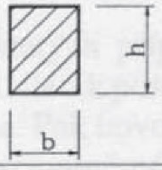
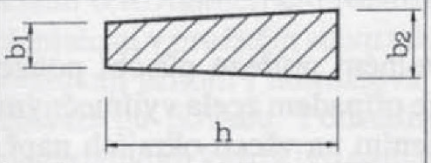
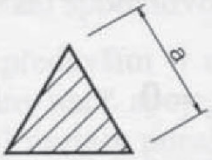
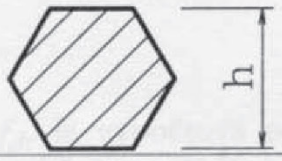
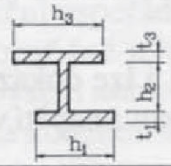
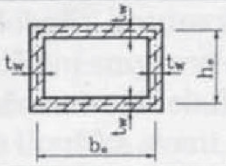
$$= 2{,}31 \cdot 10^{-4}\,rad \checkmark$$

$\frac{0{,}653}{2{,}31E-4} = 2827\times$ nižší hodnota !

b) Pro otevřený průřez

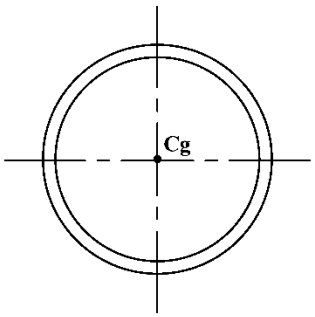


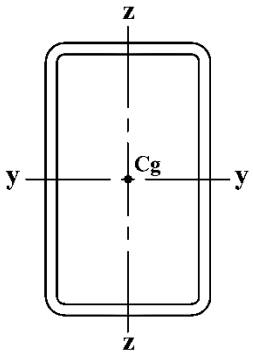
$$\varphi = \frac{3\,kNm \cdot 2\,m}{81 \cdot 10^9 \cdot 113{,}5 \cdot 10^{-9}} = 0{,}653\,rad$$

Tvar průřezu	I_t	W_t
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32} d^4$	$W_t = \frac{\pi}{16} d^3$
	$I_t = I_p = \frac{\pi}{32}\left[d^4 - (d-2t)^4\right]$	$W_t = \frac{2I_t}{d}$
	$I_t = \frac{\pi b^3 h^3}{16\left(b^2 + h^2\right)}$	$W_t = \frac{\pi b h^2}{16}$ $b > h$
	$I_t \approx \frac{d^4}{16}\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right)$	$W_t \approx \frac{d^3(2{,}6h - d)}{8(0{,}3h + 0{,}7d)}$
	$I_t = \alpha b^3 h$ α - viz tab. 3.1	$W_t = \beta b^2 h$ β - tab. 3.1
	$I_t \approx \frac{1}{12} h(b_1 - b_2)\left(b_1^2 + b_2^2\right) - 0{,}105\left(b_1^4 + b_2^4\right)$	$W_t \approx \frac{I_t}{b_1}$
	$I_t = \frac{\sqrt{3}}{80} a^4$ (rovnostranný trojúhelník)	$W_t = \frac{a^3}{20}$
	$I_t \approx 0{,}115 h^4$ (pravidelný šestiúhelník)	$W_t \approx 0{,}188 h^3$
	$I_t \approx \frac{1}{3}\sum_1^3 t_i^3 h_i$	$W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$
	$I_t = \frac{2 t_w t_f b_0^2 h_0^2}{t_f b_0 + t_w h_0}$	$W_t = 2 b_0 h_0 t_{min}$

KROUCENÍ - TYPY NAPĚTÍ DLE TVARU PRŮŘEZU

Uzavřené průřezy



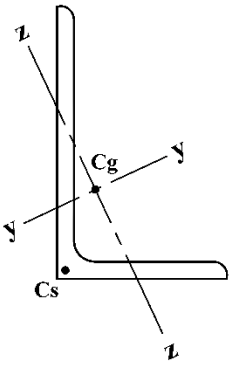


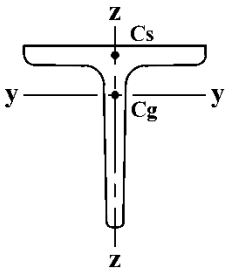
Prosté kroucení

$$\tau_t = \frac{T_t}{2A_k \circ t}$$

Otevřené průřezy

Nedeplanující průřezy (svazkové)

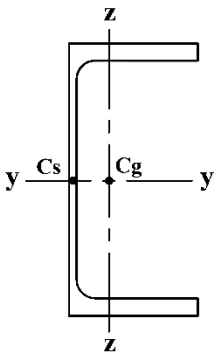




Prosté kroucení

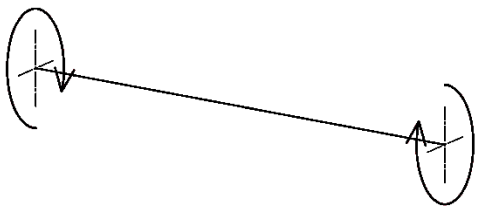
$$\tau_t = \frac{T_t}{I_t} \circ t$$

Deplanující průřezy



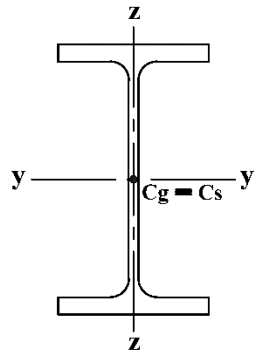
Prosté kroucení

Nastává pokud není bráněno deplanování průřezu a současně je prut zatížen kroutícími momenty na jeho koncích



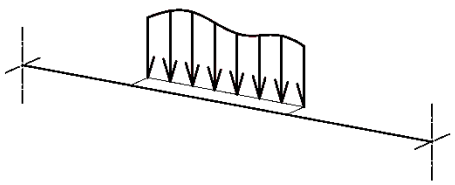
Prosté kroucení

$$\tau_t = \frac{T_t}{I_t} \circ t$$



Složené kroucení

Nastává pokud není bráněno deplanování průřezu a současně je prut zatížen jinak než kroutícími momenty na jeho koncích nebo pokud je bráněno deplanování průřezu v kombinaci s jakýmkoliv kroutícím zatížením



Prosté kr.

$$\tau_t = \frac{T_t}{I_t} \circ t$$

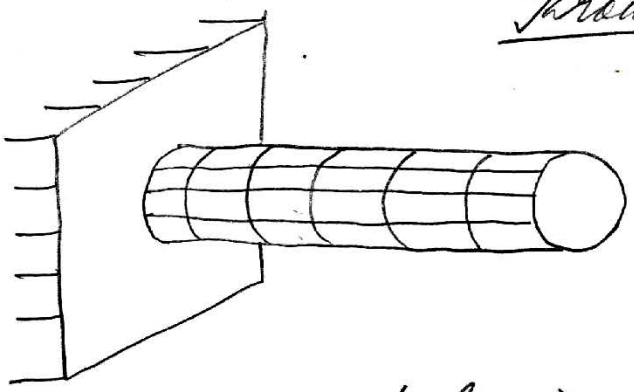
Vázané kroucení

$$\tau_\omega = \frac{T_\omega \circ S_\omega}{t \circ I_\omega}$$

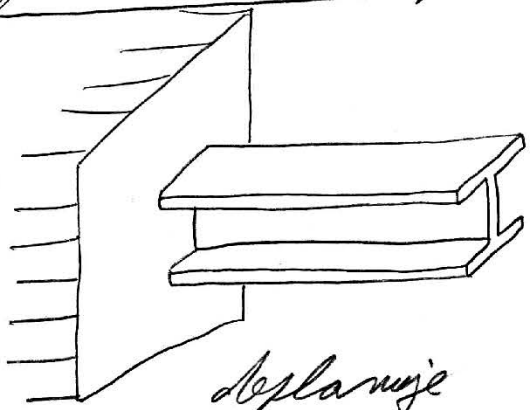
$$\sigma_\omega = \frac{B \circ \omega}{I_\omega}$$

Ing. Ondřej Pešek, Ph.D.

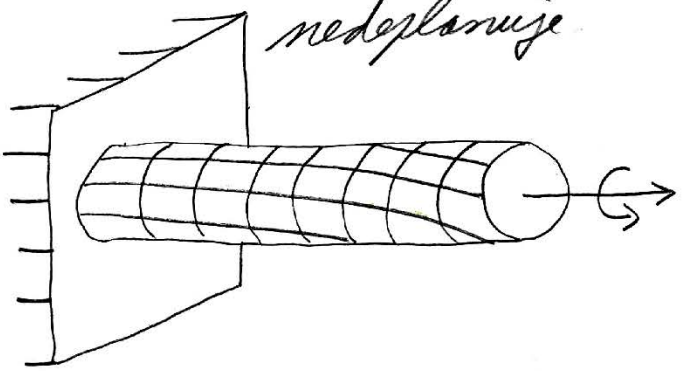
Kroucení prutů obecného průřezu

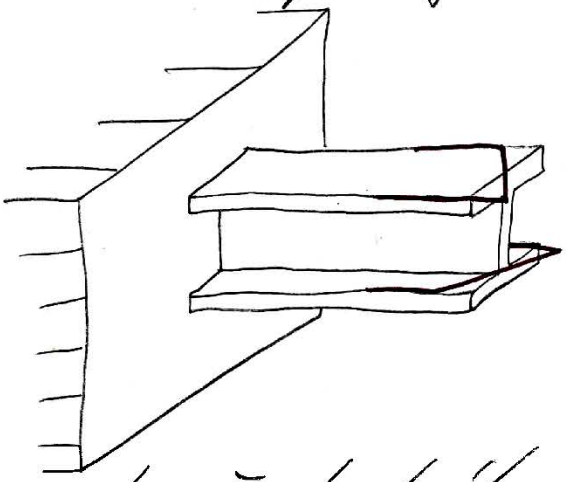


nedeplanuje



deplanuje

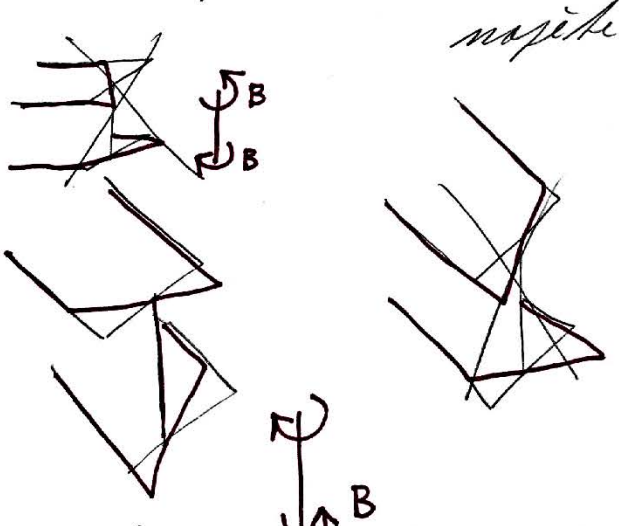




Jakýkoliv průřez kromě kruhového (mezikruhového) nezůstane rovinný – průřez se boří ⇒ deplanuje

Deplanuje – volná deplanace (normálová napětí jsou nulová σ_x; deplanace je shodná ve všech průřezech; pouze T)

– vázaná deplanace (vznikají normálová napětí)

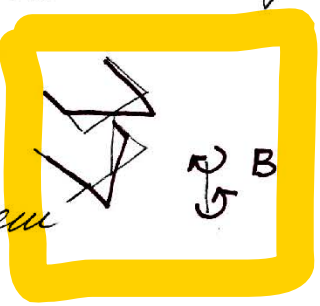


Kroucení vzniká u deplanujících prutů v případech, kdy příčné působící zatížení nepředává bez. středem smyku a v případech osamělé působících kroutících momentů.

U deformujících průřezu I apod. vznikají tři vnitřní silové veličiny

- bimoment B

$$B = -EI_\omega \varphi''$$



- moment ohybového kroucení

$$M_\omega = -EI_\omega \varphi''' = \frac{dB}{dx}$$

- moment prostého kroucení

$$M_K = GI_t \cdot \varphi'$$

Vnější kroutící moment $M_x = M_\omega + M_K =$

$$= -EI_\omega \varphi''' + GI_t \varphi'$$

$$M_x = -EI_\omega \frac{d^2\Theta}{dx^2} + GI_t \Theta$$

Řešením dif. rovnice získáme průběh Θ po prutu. Dále lze pak určit:

$\sigma_\omega = \frac{B \cdot \omega}{I_\omega}$ ... normálové napětí od kroucení

$\tau_\omega = \frac{M_\omega \cdot S_\omega}{I_\omega \cdot t}$ ... smykové napětí od ohybového kroucení

$\tau_t = \frac{M_K \cdot t}{I_t}$ ... smykové napětí od prostého kroucení

Obecný integrál rovnice má tvar:

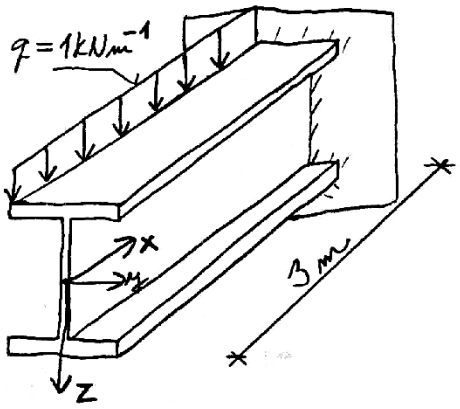
$$\Theta(x) = c_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + c_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \\ - \frac{\lambda}{G I_t} \int_0^x M_x(\xi) \cdot \sinh(\lambda \cdot (x - \xi))\, d\xi$$

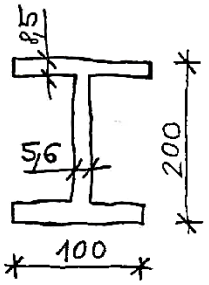
kde $\lambda = \sqrt{\frac{G I_t}{E I_\omega}}$ $[m^{-1}]$

Integrační konstanty c_1; c_2 určíme z okrajových podmínek

vetknutí $\Theta = 0$ volný konec $\frac{d\Theta}{dx} = 0$

Příklad 1: Určete relativní úhel zkroucení Θ u konzoly na obrázku z profilu IPE 200. Vyberte průběh kimomentu.

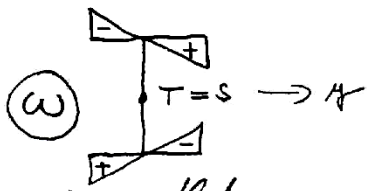




$G = 81\ GPa$

$I_t = 69{,}8 \cdot 10^3\ mm^4$

$E = 210\ GPa$



směr pohledu k druhé straně!

$$\omega = \int \varrho\, ds = \int (100 - 4{,}25)\, ds = 95{,}75 \cdot 4$$

$$I_\omega = 2 \cdot \int_{91{,}5}^{100} \left[\int_{-50}^{50} (95{,}75 \cdot 4)^2\, dy \right] dz = 13 \cdot 10^9\ mm^6$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_\omega}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 10^9 \cdot 69{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot (0{,}001)^4}{210 \cdot 10^9 \cdot 13 \cdot 10^9 \cdot (0{,}001)^6}} = 1{,}430822_4$$

KSÍ

$$\Theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) - \frac{\lambda}{GI_k} \cdot \int_0^x -q \cdot \xi \cdot 0{,}05 \cdot \sinh(\lambda \cdot (x-\xi))\, d\xi$$

$$\Theta(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \frac{q}{20GI_k} \cdot \left(\frac{\sinh(\lambda \cdot x)}{\lambda} - x\right)$$

Okrajové podmínky

pro $x = 0$ $\quad \frac{d\Theta}{dx} = 0$ ... nevzniká normálové napětí $B = 0$

pro $x = l_m$ $\quad \Theta = 0$ ... nelineární zcela vyloučuje deplanaci

$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = C_1 \cdot \lambda \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \lambda \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + \frac{q}{20GI_k} \cdot \left(\cosh(\lambda \cdot x) - 1\right) = 0$$

pro $x = 0 \Rightarrow C_1 \cdot \lambda + C_2 \cdot 0 + \frac{q}{20GI_k} \cdot (1-1) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

pro $x = l_m \Rightarrow C_2 \cdot \cosh(1{,}4308 \cdot 3) + \frac{1E3}{20 \cdot 81GPa \cdot 63{,}8 \cdot 10^{-3} m^4} \cdot \left(\frac{\sinh(1{,}4308 \cdot 3)}{1{,}4308} - 3\right) =$

$$C_2 \cdot 37{,}43884 + 0{,}203827 = 0 \Rightarrow C_2 = -5{,}43557 \cdot 10^{-3}$$

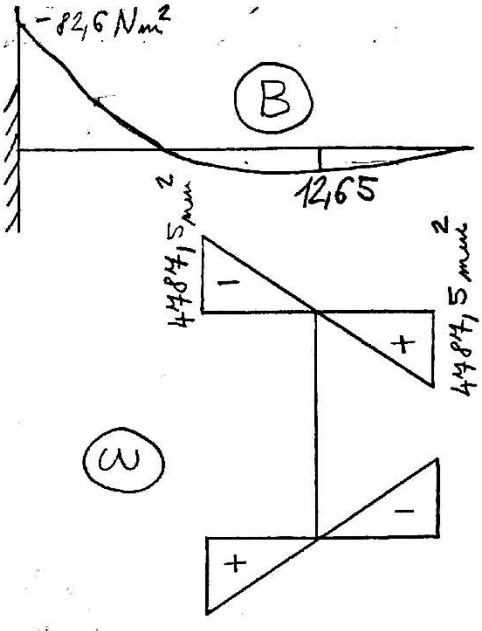
Často nahrazujeme integrační konstanty tzv. počátečními parametry, tj. hodnotami veličin v počátku prutu.

$$\Theta(\emptyset) = C_2 \qquad B(\emptyset) = -\frac{GI_k}{\lambda} \cdot C_1$$

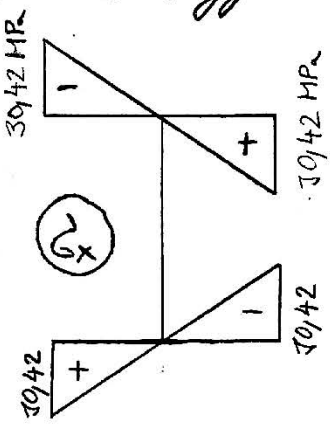
$$B(x) = -EI_\omega \cdot \frac{d\Theta}{dx} = -2730 \cdot \left(-5{,}43557 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}4308224 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sinh(1{,}4308224 \cdot x) + \frac{1 kN m^{-1}}{20 \cdot 81G \cdot 63{,}8 \cdot 10^{-3} m^4} \cdot \left(\cosh(1{,}4308224 \cdot x) - 1\right)\right.$$

$$B(3) = -2730 \cdot 0{,}030267 = -82{,}63\ N m^2$$



Dle vztahu (1) stanovíme se šetřmi napětí σ_x. Jeho průběh je v podstatě vyjádřen průběhem souřadnice ω.



od ohybu 23,2 MPa,
prosté smykem
18,3 MPa

Pro smíšené vyjádření počátečních parametrů je možno psát:

$$\Theta(x) = \Theta(0) \cdot \cosh(\lambda \cdot x) - \frac{\lambda}{GI_K} \cdot \sinh(\lambda x) - \frac{\lambda}{GI_K} \cdot \int_0^x M_x(\xi) \cdot \sinh(\lambda \cdot (x-\xi)) \cdot$$

$$B(x) = -\frac{GI_K}{\lambda} \cdot \Theta(0) \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + B(0) \cdot \cosh(\lambda \cdot x) + \int_0^x M_x(\xi) \cdot \cosh(\lambda \cdot (x - \xi)) \, d\xi$$

Deformace pevného tělesa

Pevné vazby mezi částicemi látky způsobují, že tělesa z těchto látek zachovávají svůj tvar. Ke změně tvaru může dojít působením vnějších sil, čímž dojde ke změně vzájemné polohy částic - částice se od sebe oddálí nebo přiblíží, pootočí se vůči sobě, … Nemusí nutně docházet ke změně tvaru, ale může dojít ke změně rozměrů a tím i ke změně objemu. Vždy se jedná o deformaci tělesa:

Deformace tělesa je změna rozměrů, tvaru nebo objemu tělesa, která je způsobena primárně vnějšími (sekundárně vnitřními) silami nebo momenty v tělese.

Rozlišujeme dva druhy deformace:

1. pružná (elastická) - přestanou-li působit vnější (a sekundárně vnitřní) síly, deformace vymizí. Taková tělesa jsou pružná (elastická) a jejich deformace je dočasná (malé prodloužení pružiny, malý průhyb nosníku nebo konzoly).

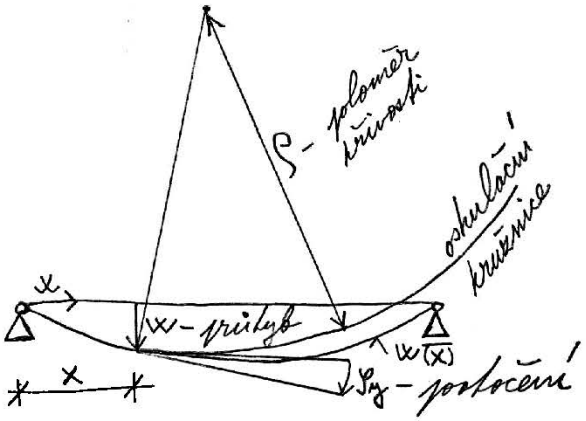
2. plastická (tvárná) - deformace, která přetrvává i pokud přestanou působit vnější síly (ohnutí drátu, změna tvaru kovového tělesa při kování nebo válcování, velký průhyb nosníku).

Podle působení vnějších sil na těleso rozeznáváme pět základních deformací:

1. deformace tahem - na těleso působí dvě stejně velké síly ve směru ven z tělesa, které leží na téže vektorové přímce. Tato vektorová přímka u modelů nosníků nebo táhel většinou splývá s osou prutu. Např. pruty v příhradové konstrukci, zavěšené lano jeřábu, výtahu.
2. deformace tlakem - od deformace tahem se liší pouze tím, že působící síly míří dovnitř tělesa. Např. pruty v příhradové konstrukci, sloupy, pilíře mostu.
3. deformace smykem - na horní a dolní podstavu těles působí tečné opačně orientované síly v rovinách těchto podstav. Síly způsobují vzájemné posunutí jednotlivých vrstev tělesa, přičemž se nemění jejich vzdálenost. Např. šrouby, nýty, velmi krátké nosníky.
4. deformace kroucením - je způsobena dvěma silovými dvojicemi, jejichž momenty jsou stejné velké, ale mají opačný směr. Např. šrouby během utahování, kroucené nosníky.
5. **deformace ohybem - u nosníků, na něž působí síla kolmo k jejich podélné ose. Deformaci nastává v důsledku vnitřního ohybového momentu. Dolní vrstvy tělesa jsou deformovány tahem, horní vrstvy tlakem a střední vrstva v místě těžiště průřezu zachovává svou délku. Např. trám podepřený na obou koncích, nebo tyč zatížená svou vlastní tíhou.**



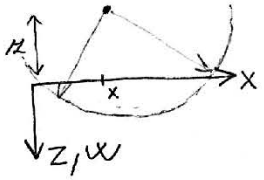
Přetvoření ohýbaných nosníků



$$M_y = \frac{1}{\rho} E I_y$$

Pro oskulační kružnici v místě x musí platit, že má s křivkou w(x) nejen společnou souřadnici souměrnou řadu, ale i první a druhou derivaci.

- oskulační kružnice



(1) $(x-m)^2 + (z-n)^2 = \rho^2$

derivace v obecném bodě x, z

(2) $2\cdot(x-m) + 2\cdot(z-n)\cdot z' = 0$

(3) $1 + z'^2 + (z-n)\cdot z'' = 0$

Vyloučením souřadnic m, n se dvěma normálami dostaneme poloměr křivosti

z (3) $z - n = -\frac{1+z'^2}{z''}$ (4)

Dosazením (4) do (2)

$x - m = z' \frac{1+z'^2}{z''}$ (5)

Dosazením (4) a (5) do (1)

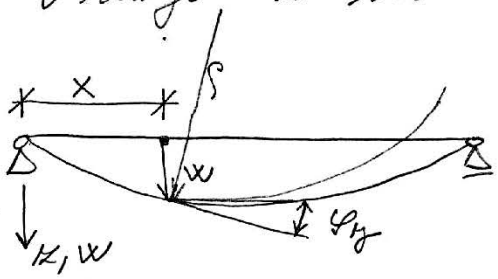
$$\left(z' \frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 + \left(-\frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 = \rho^2$$

$$\left(\frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 \cdot \left(z'^2+1\right) = \rho^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$\boxed{\rho = \pm \frac{\left(1+z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{z''}}$$

je diferenciální rovnice 2. řádu.

- Průhyb w vodorovného prutu



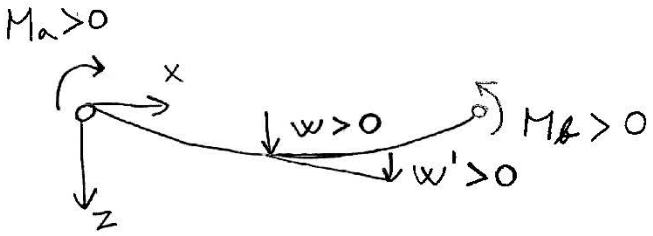
$$\frac{1}{\rho} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

← - odpovídá znaménkové konvenci

V teorii malých deformací platí $\varphi \ll 1$.

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{dw}{dx} = w'$$

Znaménko +: střed křivosti leží nad nosníkem, tedy jsou tažena spodní vlákna (kladný ohybový moment).



V případě, že $w' \ll 1$ lze psát, že $\frac{1}{\rho} = -w''$

Využitím dříve odvozené známosti platící na Bern. h.

$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E I_y}$ lze psát diferenciální rovnici 2. řádu ohybové čáry:

$$w'' = -\frac{M_y}{E I_y}$$

Okrajové podmínky:

PROSTÉ PODEPŘENÍ



$w = 0$

VETKNUTÍ



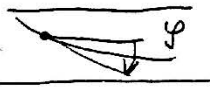
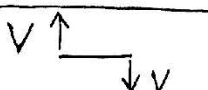
$w = 0$

$w' = 0$

Ze statiky

$$M' = \frac{dM_o}{dx} = V_z \qquad M'' = V_z = \frac{dV_z}{dx} = -q_z$$

Derivační, integrační schéma

Označení ⊕	Veličina	Diferenciální závislost	
		Řešený případ	EI = konst.
	průhyb	w	
	pootočení	$\varphi = w'$	
	ohyb. moment	$M = -EI\,w''$	
	posouvající síla	$V = -(EI\,w'')'$	$V = -EI\,w'''$
	příčné zatížení	$q = (EI\,w'')''$	$q = EI\,w^{IV}$

Při určování ohybové čáry nosníku musíme dávat pozor jak je nosník zatížený. Pokud moduv v kterém kolivo místě x na nosníku vyjádřit moment je dobrá nejprve tento integrovat přímo.

Řešení ohybové čáry integrací

$$w'' = \frac{-M}{EI} \qquad w = w(x) \quad M = M(x)$$

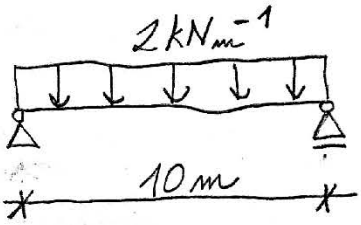
$$w' = c_1 + \int \frac{-M}{EI}\,dx$$

$$w = c_1 \cdot x + c_2 + \iint \frac{-M}{EI}\,dx\,dx$$

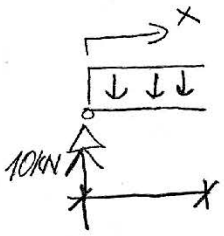
Integrační konstanty získáme vyřešením okrajových podmínek.

Příklad 2: Metodou integrace diferenciální rovnice určete ohybovou čáru nosníku.

EI = konstanta



ŘEŠENÍ:



$$M(x) = 10x - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$w'' = \frac{-M(x)}{EI}$$

$$w'' EI = -10x + x^2$$

$$w' EI = C_1 - 5x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$w EI = C_1 x + C_2 + \cancel{\quad} - 5\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY

$x = 0 \quad w(0) = 0$

$$C_1 \cdot 0 + C_2 - 5\frac{0^3}{3} + \frac{0^4}{12} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

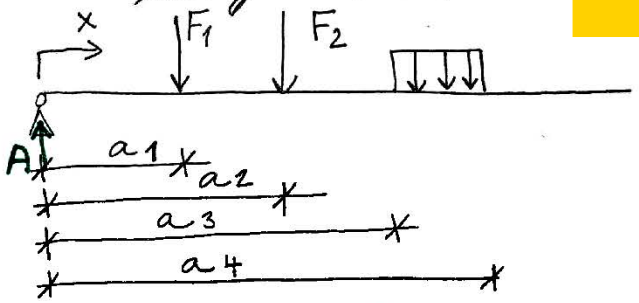
$x = 10\,m \quad w(10) = 0$

$$C_1 \cdot 10 + C_2 - 5\frac{10^3}{3} + \frac{10^4}{12} = 0 \Rightarrow C_1 = 83{,}33\ kN/m^2$$

VÝSLEDEK:

$$w(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left(83{,}33 \cdot x - 5\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12}\right)$$

Když je zatížení složitější je nutno integrovat pro Clebschovou metodou



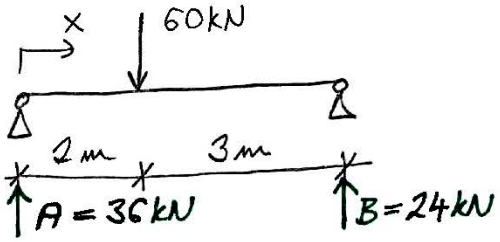
$$M(x) = A\cdot x - \underset{x>a_1}{\left|F_1\cdot(x-a_1)\right.} - \underset{x>a_2}{\left|F_2\cdot(x-a_2)\right.} - \underset{x>a_3}{\left|\frac{1}{2}q\cdot(x-a_3)^2\right.} + \underset{x>a_4}{\left|\frac{1}{2}q(x-a_4)^2\right.}$$

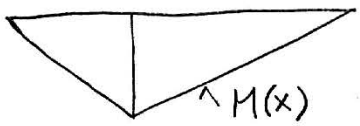
a) Nosník rozdělíme na části (úseky)

b) Všechny členy (výrazy) pro ohybový moment v k-tém úseku musí existovat i v k+1 úseku, přibývá další člen.

c) Při integraci nezohledňujeme závorky druhého členu

Příklad: U nosníku vypočtěte průhyb pomocí křivky a maximální průhyb. $I = 7590\cdot10^{-8}\ m^4$ $E = 210\ GPa$





$$M(x) = 36\cdot x - \underset{x>2}{\left|60\cdot(x-2)\right.}$$

$$w'' = \frac{-M(x)}{EI}$$

$$EI\,w'' = -36\cdot x + \left|60\cdot(x-2)\right.$$

$$EI\,w' = \int M(x)\,dx = C_1 - 36\cdot\frac{x^2}{2} + \left|60\cdot\frac{(x-2)^2}{2}\right.$$

$$EI\,w = C_1\cdot x + C_2 - 36\cdot\frac{x^3}{6} + \left|60\cdot\frac{(x-2)^3}{6}\right.$$

$x = 0$, $w = 0$

$$C_1\cdot0 + C_2 - 36\cdot\frac{0}{6} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

DOSAZUJEME JEN DO ČÁSTI PRO PRVNÍ ÚSEK!

$x = 5\ m$, $w = 0$

$$C_1\cdot5 + 0 - 36\cdot\frac{5^3}{6} + 60\cdot\frac{(5-2)^3}{6} = 0 \Rightarrow C_1 = 96\ kNm^2$$

$$w(x) = \frac{1}{EI}\cdot\left[96\cdot x - 6x^3 + \left|10(x-2)^3\right.\right]$$

Určení maximálního průhybu v místě, kde je stočení nulové

$$w' = 0$$

$$EI\,w' = 96 - 36 \cdot \frac{x^2}{2} + 60\,\frac{(x-2)^2}{2} = 0$$

předpokládáme, že max. průhyb je až za břemenem

$$96 - 18x^2 + 30 \cdot x^2 - 120 \cdot x + 120 = 0$$

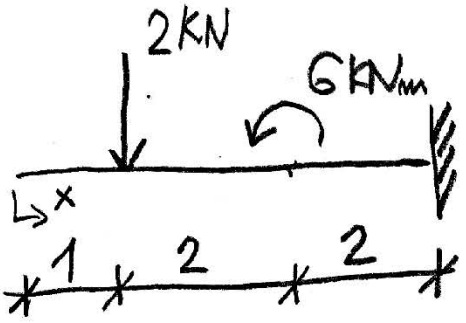
$$12x^2 - 120x + 216 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 12 \cdot 216}}{24}$$

$x_1 = 2{,}36\ m$

x_2 mimo nosník

$$w_{max} = w(2{,}36) = 0{,}929\ cm$$



$EI_y = konst.$

$$M_y = -\underset{x>1}{\llbracket} 2\cdot(x-1) - \underset{x>3}{\llbracket} 6$$

$$\boxed{w'' = -\frac{M_y}{EI_y}}$$

$$EI_y \cdot w'' = \underset{x>1}{\llbracket} 2\cdot(x-1) + \underset{x>3}{\llbracket} 6$$

$$EI_y \cdot w' = C_1 + \underset{x>1}{\llbracket} 2\,\frac{(x-1)^2}{2} + \underset{x>3}{\llbracket} 6\cdot(x-3)$$

$$EI_y \cdot w = C_1 \cdot x + C_2 + \underset{x>1}{\llbracket} 2\,\frac{(x-1)^2}{6} + \underset{x>3}{\llbracket} 6\,\frac{(x-3)^2}{2}$$

C_1, C_2 z počáteční podmínky

$$\left.\begin{array}{l} x=5,\ w=0 \\ x=5,\ w'=0 \end{array}\right\} \Rightarrow C_1, C_2$$

Mohrova metoda

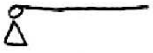
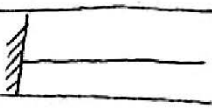
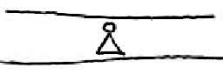
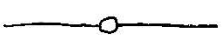
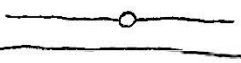
Analogie mezi určením průhybu w ze známého průběhu ohybových momentů $M(x)$ a určením ohybových momentů, je-li dáno příčné zatížení $q(x)$

$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad \text{analogicky s} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

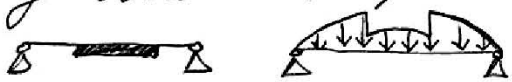
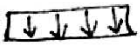
Zavedeme-li myšlené (fiktivní) zatížení:

$$\bar{q} = \frac{M}{EI}$$

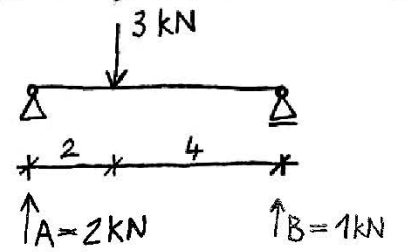
kterým zatížíme fiktivní nosník. Fiktivní nosník musí být podepřen takovým způsobem, aby byly splněny nejen okrajové podmínky, případně podmínky spojitosti jaké platí u skutečných nosníků průhybu a pootočení.

Skutečný nosník		Fiktivní nosník	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} \neq 0$ $V \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi = 0$		$\bar{M} = 0$ $V = 0$	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} = 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} \neq 0$ $\bar{V} \neq 0$	

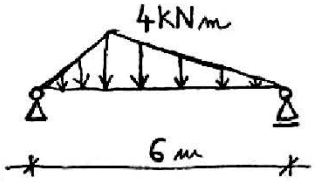
Postup:

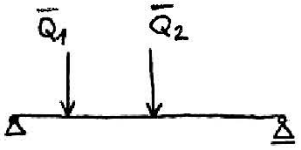
1) Na daném statickém určitém nosníku vypočítám průběh ohybového momentu
2) Vytvořím fiktivní nosník a ten zatížím přepočteným momentovým obrazcem. Pokud platí a) nosník má všude stejný průřez $I_y = konst.$
   b) Nosník je celý ze stejného materiálu
   tak hodnotou EI dělím vypočítaný fiktivní moment či fiktivní posouvající sílu až na konec. Neplatí-li a či b musím zatěžovací momentový obrazec napřed vynásobit poměrem $E_i I_i$. 
   Kladné momenty  zatěžuji jako kladné zatížení (působí směrem dolů) 
3) Tam kde chci určit průběh vypočítám na fiktivním nosníku moment. Tam kde chci určit otočení, vypočítám na fiktivním nosníku posouvající sílu
4) Skutečné hodnoty deformací získám dělením EI.

Příklad: Zjistěte stočení a průhyb pod břemenem na zadaném nosníku $EI = 10^7\ kN cm^2 = 1000\ kN m^2$









$\bar{Q}_1 = 4\ kN m^2$

$\bar{Q}_2 = 8\ kN m^2$

$\bar{A} \cdot 6 - \bar{Q}_1 \cdot 4{,}666 - \bar{Q}_2 \cdot 2{,}666 = 0 \Rightarrow \bar{A} = 6{,}665\ kN m^2$

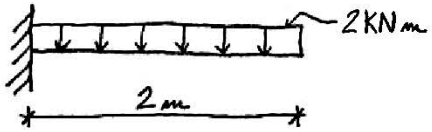
$\bar{T}_c = \bar{A} - \bar{Q}_1 = 6{,}665 - 4 = 2{,}665\ kN m^2$

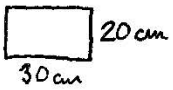
$\bar{M}_c = \bar{A} \cdot 2 - \bar{Q}_1 \cdot 0{,}66 = 6{,}665 \cdot 2 - 4 \cdot 0{,}66 = 10{,}662\ kN m^3$

- průhyb $w = \frac{\bar{M}_c}{EI} = \frac{10{,}662\ kN m^3}{1000\ kN m^2} = 0{,}010662\ m \doteq 1\ cm$

- stočení $\varphi = \frac{\bar{T}_c}{EI} = \frac{2{,}665\ kN m^2}{1000\ kN m^2} = 0{,}002665\ rad$

Příklad: Vypočtěte průhyb a pootočení konce konzoly zatížené rovnoměrně. $E = 10^4\ MPa$

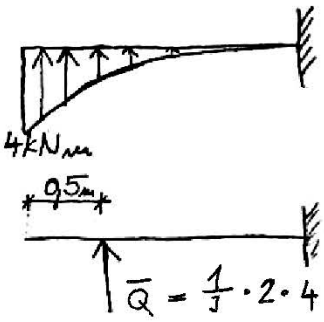






$I = \frac{1}{12} \cdot 30 \cdot 20^3 =$

$= 20000\ cm^4 = 2 \cdot 10^{-4}\ m^4$



$\bar{M}_{max} = \bar{Q} \cdot 1{,}5\ m = 4{,}00\ kN m^3$

$\bar{Q} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 4 = 2{,}667\ kN m^2$

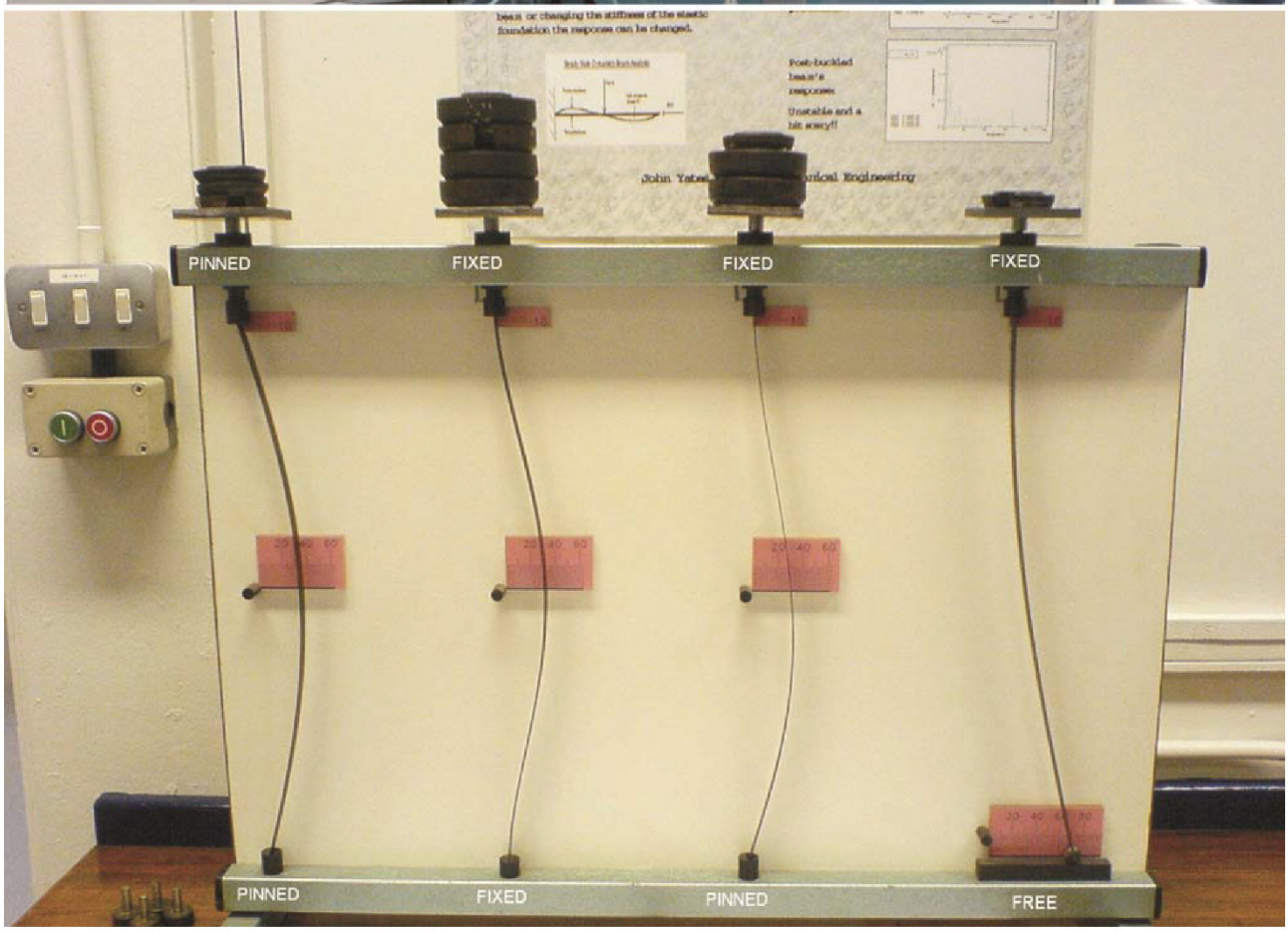
$w_{max} = \frac{\bar{M}_{max}}{EI} = \frac{4\ kN m^3}{10^4 \cdot 10^3\ kPa \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ m^4} = 2 \cdot 10^{-3}\ m = 2\ mm$

$\varphi_{max} = \frac{\bar{T}}{EI} = \frac{\bar{Q}}{EI} = \frac{2{,}667\ kN m^2}{10^7\ kPa \cdot 2 \cdot 10^{-4}\ m^4} = 0{,}0013\ rad$

Znaménko stočení se řídí znaménkem posouvající síly ne reakce.

Stabilita a vzpěrná pevnost tlačených prutů







U štíhlých tlačených prutů neplatí vzorce odvozené pro výpočet napětí a přetvoření u prostého tlaku nebo tahu!

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

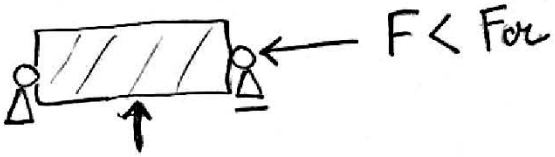
$$\Delta = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

STABILITA

stav stabilní

1)



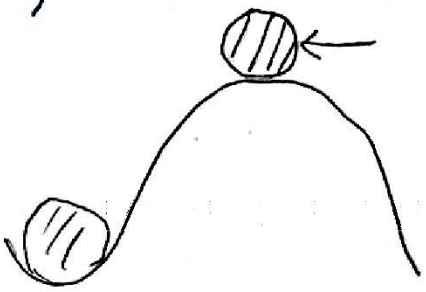


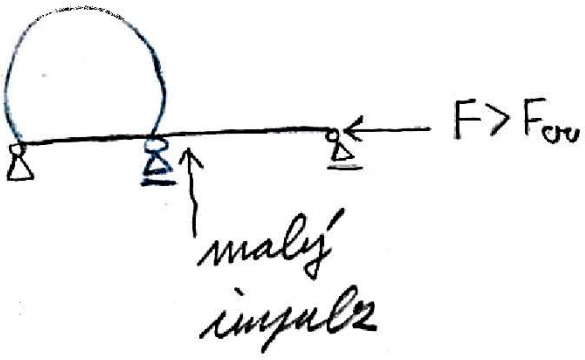
2) stav indiferentní





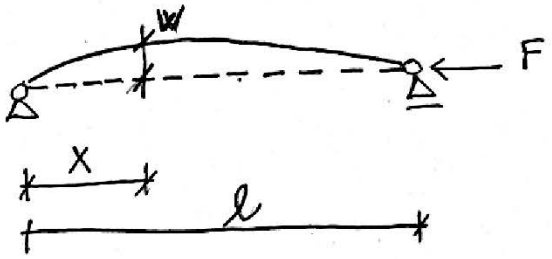
3) stav nestabilní





Stabilita je schopnost soustavy vrátit se do původního stavu jakmile pomine příčina, která změnu stavu vyvolala.

(K)



$$M = F \cdot w$$

$$w'' = \frac{-M}{E \cdot I} = -\frac{F \cdot w}{E \cdot I}$$

$$w'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot w = 0$$

$$w'' + \alpha^2 w = 0$$

$$F = \alpha^2 \cdot E \cdot I$$

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

1) $w(x) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \Rightarrow \boxed{w(x) = c_1 \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)}$

$w(0) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$w(l) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot l) = 0$

$\neq 0 \quad = 0$

$\alpha \cdot l = k \cdot \pi \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \alpha = \frac{k \cdot \pi}{l}$

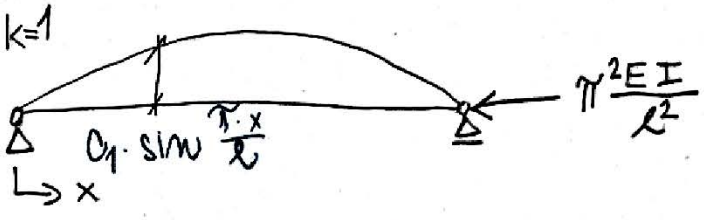
$w(x) = c_1 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{l} \cdot x\right)$

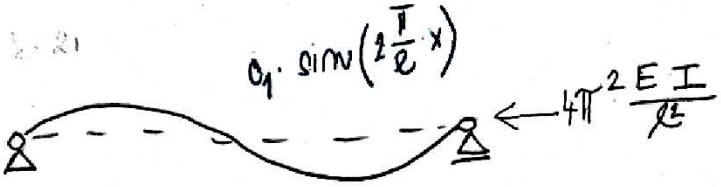
$F_{cr} = \alpha^2 \cdot E \cdot I = \left(\frac{k \cdot \pi}{l}\right)^2 \cdot E \cdot I$

$$\boxed{F_{cr} = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}}$$

$w' = c_1 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \alpha + c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) \alpha$

$w'' = c_1 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - c_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$







(15. 04. 1707 – 18. 09. 1783)

Leonh. Euler

$F < F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$ stabilní stav

$F = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$ indiferentní stav

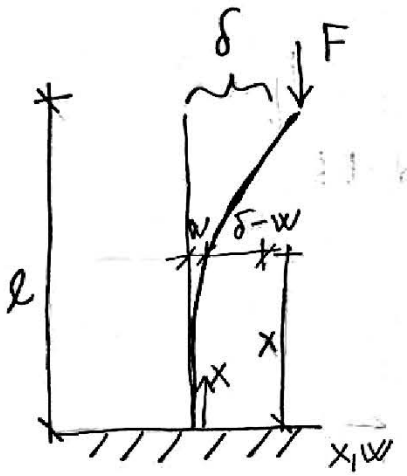
$F > F_{cr}$ nestabilní stav

$\sigma_x = \frac{I}{A} \leq f_y \quad (235\ MPa)$

$F \leq f_y \cdot A$

$F \leq F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$

i)



$M = -F \cdot (\delta - w)$

$w'' = \frac{-M}{E \cdot I} = \frac{F}{E \cdot I}(\delta - w) \qquad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$

$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 \cdot \delta$

$w(x) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta$

$w(0) = 0 \qquad c_1 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot \cos 0 + \delta = 0$

$w'(0) = 0 \qquad \alpha \cdot c_1 \cdot \cos 0 - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin 0 = 0$

$w(\ell) = \delta \qquad c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot \ell) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot \ell) + \delta = \delta$

$\left.\begin{array}{l} c_2 + \delta = 0 \\ \alpha \cdot c_1 = 0 \\ c_1 \cdot \sin(\alpha\ell) + c_2 \cdot \cos(\alpha\ell) \end{array}\right\}$

$x_1 + x_2 = 0$

$2x_1 + 2x_2 = 0$

$\det = \delta \cdot \cos(\alpha \cdot \ell) = 0$

$\neq 0 \quad = 0$

$\alpha \cdot \ell = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2 \cdot \ell}$

$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$

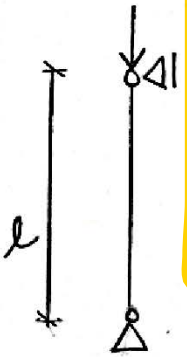
$$F_{cr} = \alpha^2 \cdot EI = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$$

$c_2 = \delta$

$$w = c_2 \cdot \left(1 - \cos\frac{2x}{2\ell}\right)$$

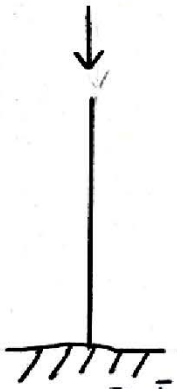
VZPĚRNÁ DÉLKA

- Ve snaze zobecnit základní typy Eulerova případu je možné kritickou sílu pružného prutu stálého průřezu s různými okrajovými podmínkami vyjádřit souhrnně ve tvaru $F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$ kde L_{cr} je tzv. vzpěrná délka, která závisí na okrajových podmínkách prutu.



$$F_{cr} = \pi^2 \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

$$L_{cr} = l$$



$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

$$= \frac{1}{4} \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

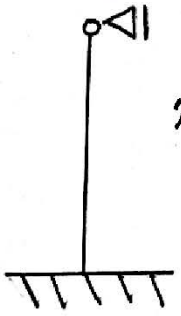
$$\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2} = \frac{1}{4} \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

$$L_{cr} = 2\,l$$



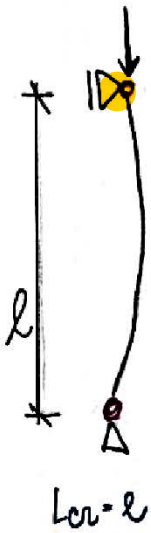
$$4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

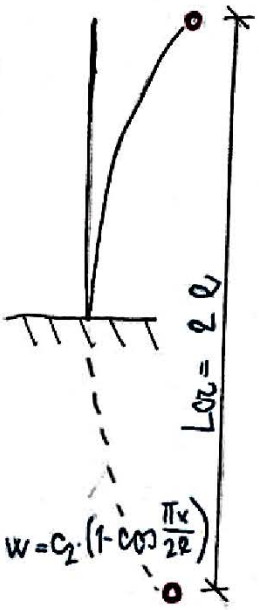
$$L_{cr} = 0{,}5 \cdot l$$

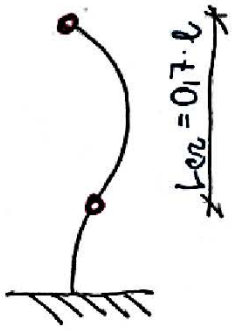


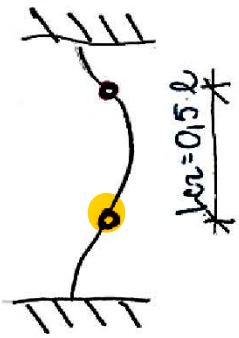
$$20{,}19 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

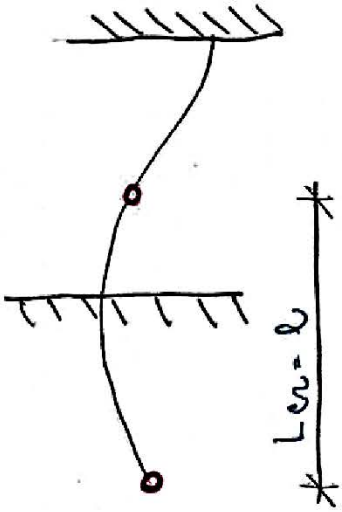
- délka kloubově uloženého prutu s vodné ohybové tuhosti $E \cdot I$, který ztratí stabilitu při kritické síle vyšetřené na prutu s řešenými okrajovými podmínkami
- VD lze definovat jako vzdálenost inflexních bodů na vypočteném prutu







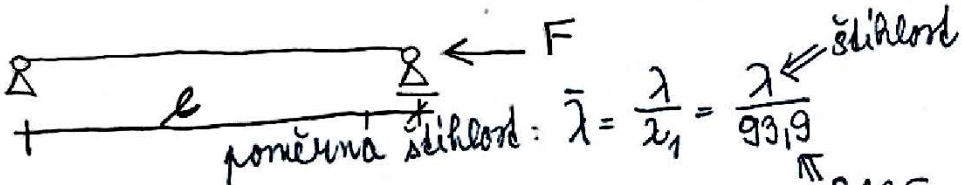


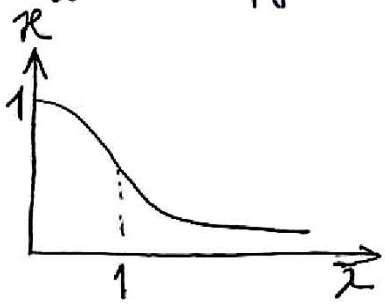


(Př) Průřez 1. třídy S 235

$F \leq F_d$

$F_d = \varkappa \cdot A \cdot f_y$



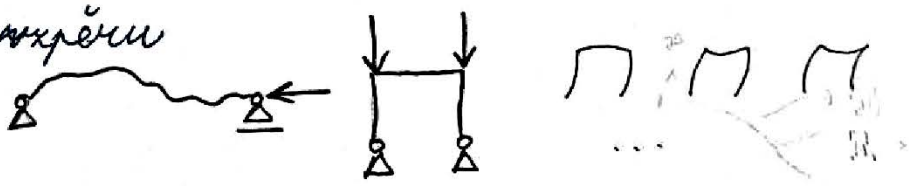


štíhlost: $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$

- stabilitní pojetí vzpěru
  - přímý centricky zatížený prut



- pevnostní pojetí vzpěru
  - imperfekce



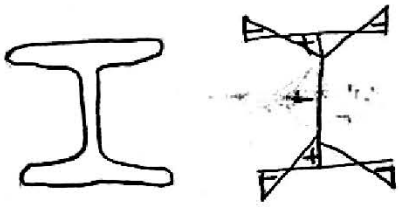
1)

2)



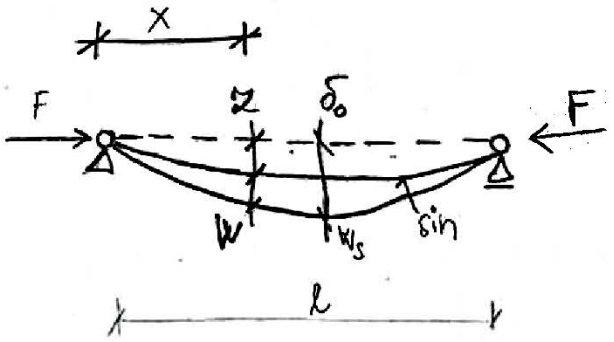
$k_2 = \sqcup \pm \Delta$

3) Vlastní prutí

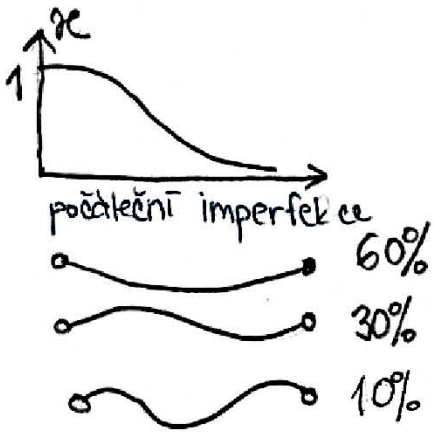


4) Fyzikální mechanické vlastnosti oceli mají určité odchylky $E = 210\ GPa \pm 20\ GPa$

5) Zatížení nepůsobí ideálně v předpokládané poloze



$F_d = \chi \cdot A \cdot f_y$ ($\uparrow \lambda$)



$w = w_s \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$

$M = F \cdot (z + w) = F \cdot (\delta_0 + w_s) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$

$w'' = \frac{-M}{E \cdot I}$

$-w_s \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} = -\frac{F}{E \cdot I} (\delta_0 + w_s) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$

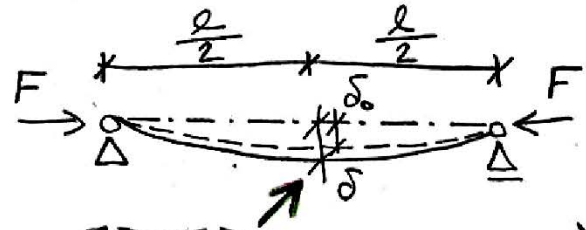
$-w_s \cdot \frac{\pi^2}{l^2} = -\frac{F}{E \cdot I} (\delta_0 + w_s)$

$w_s = \frac{F \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E \cdot I} (\delta_0 + w_s) = \frac{F}{F_{cr}} (\delta_0 + w_s)$

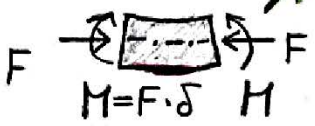
$w_s = \delta_0 \cdot \frac{F}{F_{cr} - F}$

$\delta = \delta_0 + w_s = \delta_0 + \delta_0 \cdot \frac{F}{F_{cr} - F} = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}$

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}$$



$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} \; ; \; W = \frac{I}{c_1}$$



$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot \delta}{W}$$

A ... plocha, W ... průřezový modul, tlak, ohyb, σ_x

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot \delta_0}{W \cdot \left(1 - \frac{F}{F_{cr}}\right)}$$

zavedeme R jako odolnost (resistance)

$$\sigma_{max} = \frac{R}{A} + \frac{R \cdot \delta_0}{W \cdot \left(1 - \frac{R}{F_{cr}}\right)} = f_y \qquad F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2} \ldots \text{Eulerova kritická síla}$$

$$R = -\frac{\sqrt{A^2 \cdot (\delta_0 \cdot F_{cr} + f_y \cdot W)^2 + 2 \cdot A \cdot F_{cr} \cdot W \cdot (\delta_0 \cdot F_{cr} - f_y \cdot W) + F_{cr}^2 \cdot W^2} - A \cdot (\delta_0 \cdot F_{cr} + f_y \cdot W) - F_{cr} \cdot W}{2 \cdot W}$$

Norma Eurocode 3 zavádí $R = \varkappa \cdot A \cdot f_y$

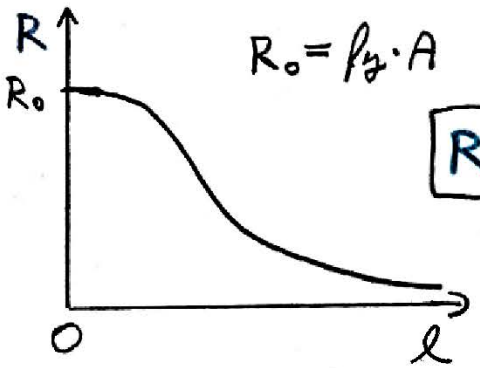
f_y ... mez kluzu (235 MPa, 355 MPa, 420 MPa)

$\varkappa$ ... vzpěrnostní součinitel

δ_0, F_{cr} jsou funkcí l, čím větší l tím menší R

$$\delta_0 = \frac{l}{1000} \qquad F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

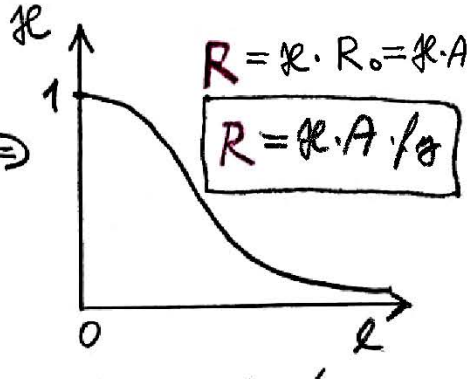
$$R = -\frac{\sqrt{A^2 \cdot \left(\frac{EI\pi^2}{1000l} + f_y \cdot W\right)^2 + 2 \cdot A \cdot \pi^2 \frac{EI}{l^2} \cdot W \cdot \left(\frac{EI\pi^2}{1000l} - f_y W\right) + \left(\pi^2 \frac{EI}{l^2}\right)^2 \cdot W^2} - A \cdot \left(\frac{EI\pi^2}{1000l} + f_y W\right) - \frac{\pi^2 EI}{l^2} W}{2 \cdot W}$$



$R_0 = f_y \cdot A$

$R = R$



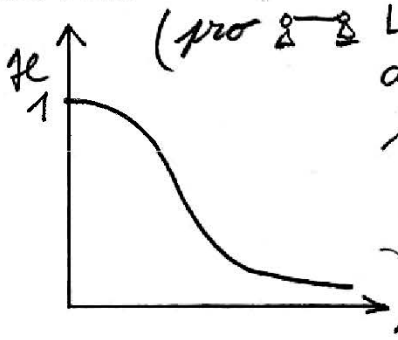


$R = \varkappa \cdot R_0 = \varkappa \cdot A \cdot f_y$

$R = \varkappa \cdot A \cdot f_y$

zavedeme štíhlost $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$ jako bezrozměrný parametr

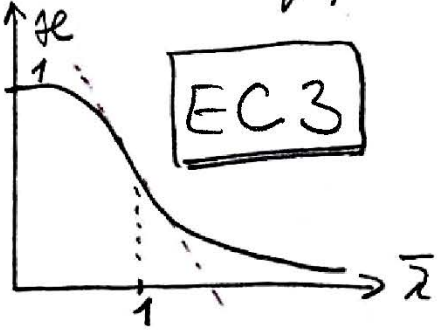
(pro $L_{cr} = l$)



a poměrnou štíhlost dle EC3

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}}$$

$\lambda = \frac{\lambda}{93{,}9} \Leftarrow$ S235



EC3

e_N posun příslušné těžišťové osy rovnoměrně tlačeného průřezu, viz 6.2.2.5(4).

POZNÁMKA Znaménka N_{Ed}, $M_{y,Ed}$, $M_{z,Ed}$ a $\Delta M_i = N_{Ed}\, e_{Ni}$ se stanoví podle kombinace příslušných normálových napětí.

6.2.10 Ohyb, smyk a osová síla

(1) Při stanovení únosnosti průřezu v ohybu se má uvažovat účinek smyku a osové síly.

(2) Jestliže návrhová hodnota smykové síly V_{Ed} není větší než 50 % návrhové plastické smykové únosnosti $V_{pl,Rd}$, je možné zanedbat její účinek na únosnost průřezu při působení ohybu a osové síly podle 6.2.9, kromě případů, kdy smykové boulení snižuje únosnost průřezu, viz EN 1993-1-5.

(3) Jestliže V_{Ed} je větší než 50 % $V_{pl,Rd}$, má se návrhová únosnost průřezu při kombinaci momentu a osové síly vypočítat s použitím redukované meze kluzu:

$(1-\rho)f_y$ pro smykovou plochu, (6.45)

kde $\rho = (2V_{Ed}/V_{pl,Rd}-1)^2$ a $V_{pl,Rd}$ se určí podle 6.2.6(2).

POZNÁMKA Místo redukce meze kluzu je také možné redukovat tloušťky příslušných částí průřezu.

6.3 Vzpěrná únosnost prutů

6.3.1 Tlačené pruty stálého průřezu

6.3.1.1 Vzpěrná únosnost

(1) Tlačený prut se má posuzovat na vzpěr podle podmínky:

$$\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \le 1{,}0 \qquad (6.46)$$

kde N_{Ed} je návrhová hodnota tlakové síly;

$N_{b,Rd}$ návrhová vzpěrná únosnost tlačeného prutu.

(2) U prutů s nesymetrickým průřezem třídy 4 se má uvažovat přídavný moment ΔM_{Ed} v důsledku excentricity těžišťové osy účinného průřezu, viz také 6.2.2.5(4). Interakce tlaku a ohybu se má posoudit podle 6.3.4 nebo 6.3.3.

(3) Návrhová vzpěrná únosnost tlačeného prutu se má určit z výrazu:

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A f_y}{\gamma_{M1}} \qquad \text{pro průřezy třídy 1, 2 a 3} \qquad (6.47)$$

$$N_{b,Rd} = \frac{\chi A_{eff} f_y}{\gamma_{M1}} \qquad \text{pro průřezy třídy 4} \qquad (6.48)$$

kde χ je součinitel vzpěrnosti pro příslušný způsob vybočení.

POZNÁMKA Pro určení vzpěrné únosnosti prutů po délce proměnného průřezu nebo při nerovnoměrném rozdělení tlakové síly se může provést analýza druhého řádu podle 5.3.4(2). Pro vzpěr z roviny, viz také 6.3.4.

(4) Při stanovení A a A_{eff} není nutné uvažovat díry pro spojovací prostředky na koncích sloupů.

6.3.1.2 Křivky vzpěrné pevnosti

(1) Pro osový tlak v prutu se má hodnota χ pro odpovídající poměrnou štíhlost $\bar{\lambda}$ určit z příslušné křivky vzpěrné pevnosti z výrazu:

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \qquad \text{ale} \qquad \chi \le 1{,}0 \qquad (6.49)$$

kde $\phi = 0{,}5\left[1 + \alpha\left(\bar{\lambda} - 0{,}2\right) + \bar{\lambda}^2\right]$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{Af_y}{N_{cr}}}$$ pro průřezy třídy 1, 2 a 3

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A_{eff}\, f_y}{N_{cr}}}$$ pro průřezy třídy 4

α je součinitel imperfekce;

N_{cr} pružná kritická síla pro příslušný způsob vybočení, určená pro vlastnosti plného průřezu.

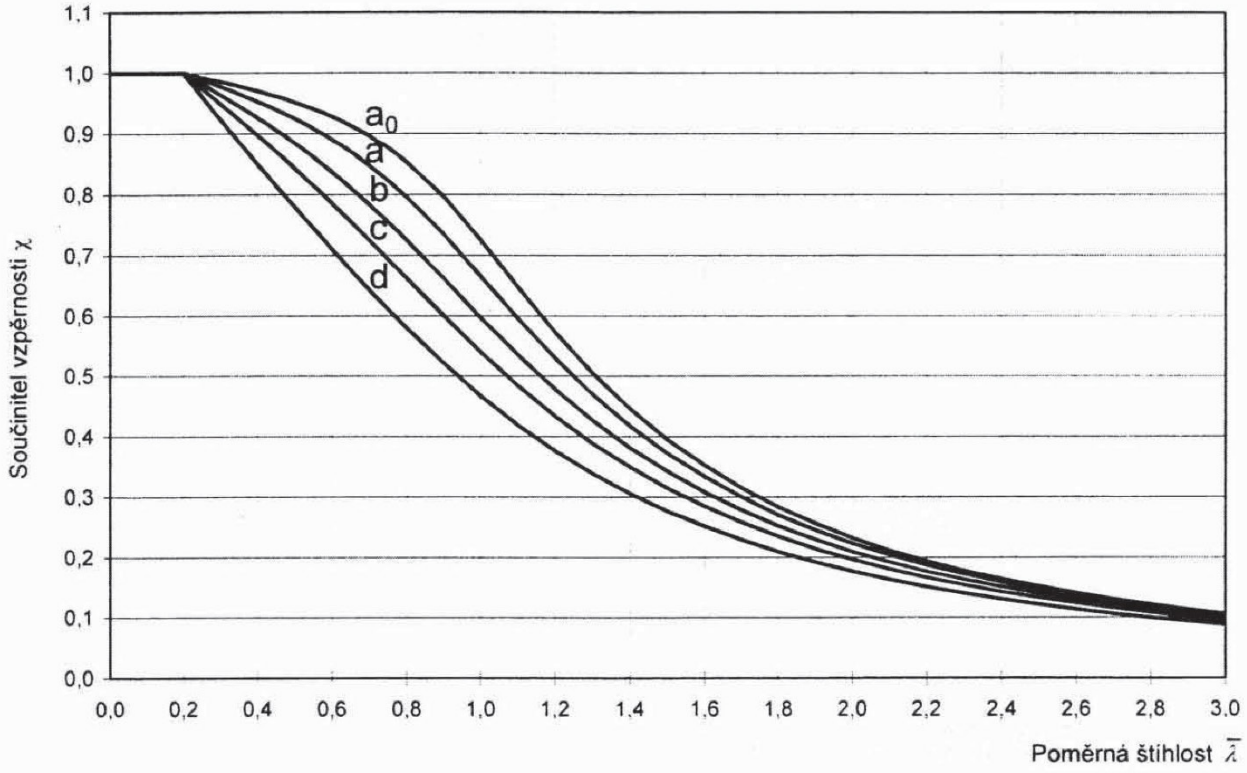
(2) Součinitel imperfekce α pro jednotlivé křivky vzpěrné pevnosti se má stanovit podle tabulek 6.1 a 6.2.

Tabulka 6.1 – Součinitele imperfekce pro křivky vzpěrné pevnosti

Křivka vzpěrné pevnosti	a_0	a	b	c	d
Součinitel imperfekce α	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76

(3) Hodnoty součinitele vzpěrnosti χ pro příslušnou poměrnou štíhlost $\bar{\lambda}$ je možné stanovit z obrázku 6.4.

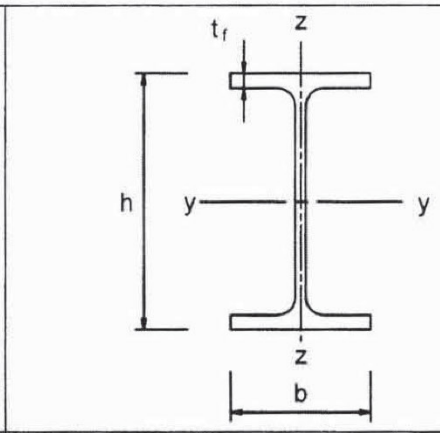
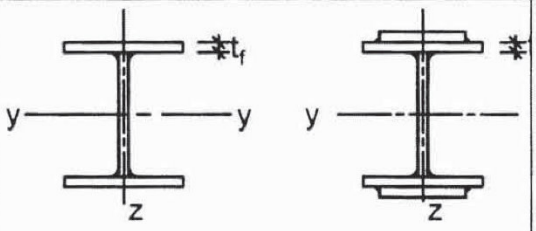
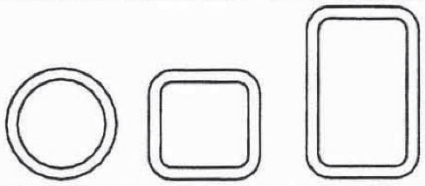
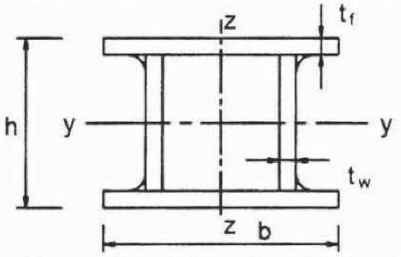
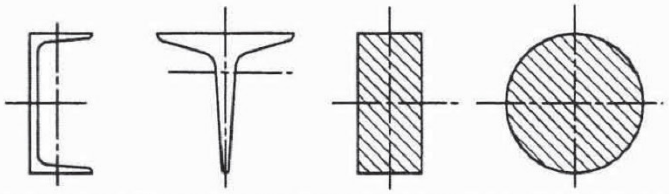
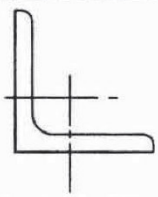
(4) Při poměrné štíhlosti $\bar{\lambda} \le 0{,}2$ nebo pro $\frac{\gamma_M N_{Ed}}{N_{cr}} \le 0{,}04$ [NP] je možné účinky vzpěru zanedbat a posuzovat pouze průřez na prostý tlak.



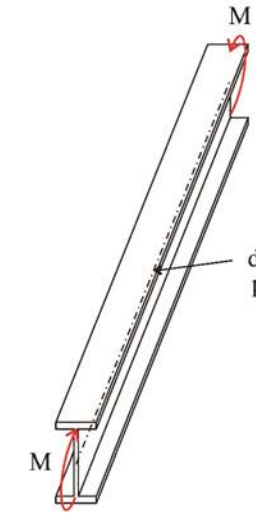
Obrázek 6.4 – Křivky vzpěrné pevnosti

[NP] NÁRODNÍ POZNÁMKA Viz národní příloha, NA.4.

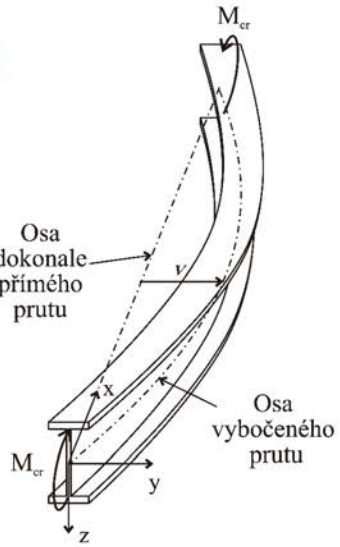
Tabulka 6.2 – Přiřazení křivek vzpěrné pevnosti k průřezům

Průřez		Meze		Vybočení kolmo k ose	Křivka vzpěrné pevnosti	
					S235 S275 S355 S420	S460
Válcované průřezy		$h/b > 1{,}2$	$t_f \leq 40$ mm	$y-y$ $z-z$	a b	a_0 a_0
			40 mm < $t_f \leq 100$ mm	$y-y$ $z-z$	b c	a a
		$h/b \leq 1{,}2$	$t_f \leq 100$ mm	$y-y$ $z-z$	b c	a a
			$t_f > 100$ mm	$y-y$ $z-z$	d d	c c
Svařované průřezy		$t_f \leq 40$ mm		$y-y$ $z-z$	b c	b c
		$t_f > 40$ mm		$y-y$ $z-z$	c d	c d
Duté průřezy		válcované za tepla		všechny	a	a_0
		tvarované za studena		všechny	c	c
Svařované duté průřezy		všechny průřezy kromě níže uvedených výjimek		všechny	b	b
		tlusté svary: $a > 0{,}5\ t_f$ $b/t_f < 30$ $h/t_w < 30$		všechny	c	c
U, T a plné průřezy				všechny	c	c
Úhelníky				všechny	b	b

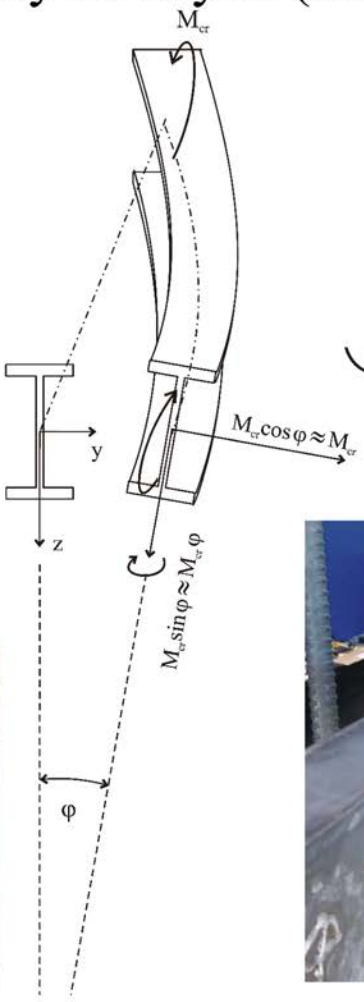
Ztráta stability za ohybu (klopení)

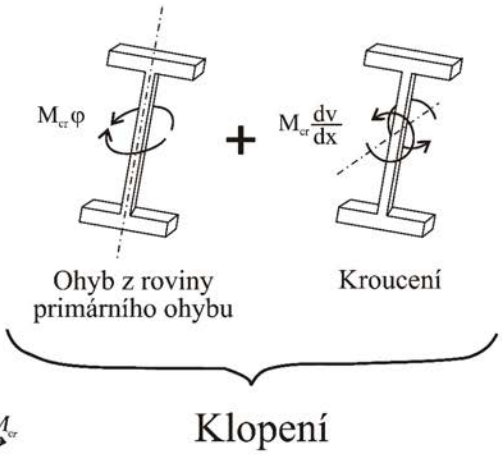


Perfektní dokonale přímý prut

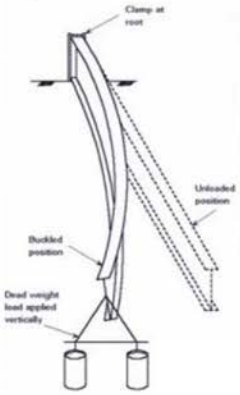


Ztráta stability klopením





Klopení

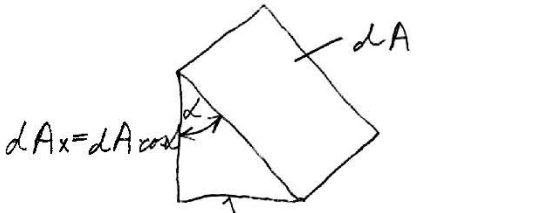




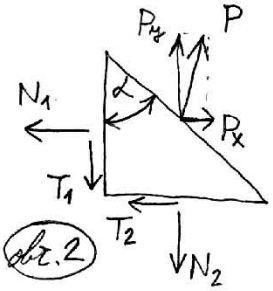


Hlavní normálové napětí

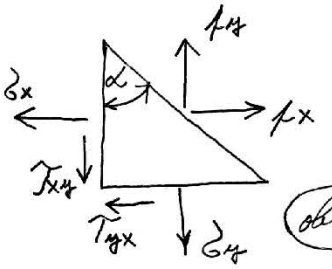
V každém bodě tělesa existují 3 kolmé plošky, kde $\sigma_n = 0$; $\tau = 0$, kde σ_1, σ_2 extrém. Říkáme



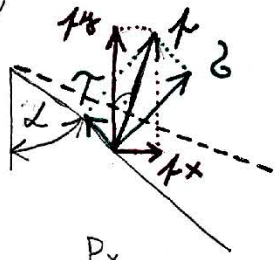
obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

$$f^2 = \sigma^2 + \tau^2$$
$$f^2 = f_x^2 + f_y^2$$

f ... obecný vektor napětí
σ ... normálové napětí
τ ... smykové napětí
f_x ... napětí ve směru osy x
f_y ... napětí ve směru osy y

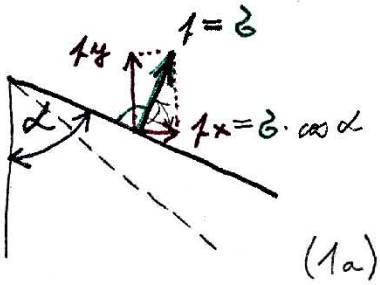
$$f_x = \frac{P_x}{dA} \qquad f_y = \frac{P_y}{dA}$$

Z obr. 2 → $P_x = N_1 + T_2$
$P_y = N_2 + T_1$

Z obr. 3, 4
$$f_x \cdot dA = \sigma_x \cdot dA \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot dA \cdot \sin\alpha$$
$$f_y \cdot dA = \tau_{xy} \cdot dA \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot dA \cdot \sin\alpha$$

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha \\ f_y &= \tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\}$$ Hledáme úhel α pro nějž $\tau = 0$

Když $f = \sigma$ (viz obr. 4) tedy $f_x = f \cdot \cos\alpha = \sigma \cdot \cos\alpha$



(1) $\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \cos\alpha = 0$
$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \sin\alpha = 0$

(1a)
$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & ; & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & ; & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \sigma = fce(\alpha);$$

U úhlu α jsme mezdi předpoklad, že je to takový úhel, u kterého na plošce dA platí, že $\tau = 0$! U soustavy rovnic (1a) neexistuje řešení $\cos\alpha = 0 \cap \sin\alpha = 0$. Je tedy možno hledat hodnotu σ (závislou na α) tak, aby rovnice (1a) byly lineárně závislé.... $\left.\begin{aligned} 1x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{aligned}\right\}$ ∞ mnoho řešení

Je tedy nutno, aby $\det A = 0$.

(2) $$\det A = (\sigma_x - \sigma)\cdot(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = \sigma^2 - \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y)}_{I_1}\cdot\sigma + \underbrace{(\sigma_x\sigma_y - \tau_{xy}^2)}_{I_2} = 0$$

$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0$$

$$\sigma_{12} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2}$$

(3) $$\sigma_{1,2} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Z rovnice (3) určíme velikost hl. napětí σ_1, σ_2

Dosadíme σ_1 do první rovnice a dostaneme pro poměr $\sin\alpha_1 / \cos\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$

(4)
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$ kde σ_1 vezmeme z (3)

obdobně σ_2 do první rovnice

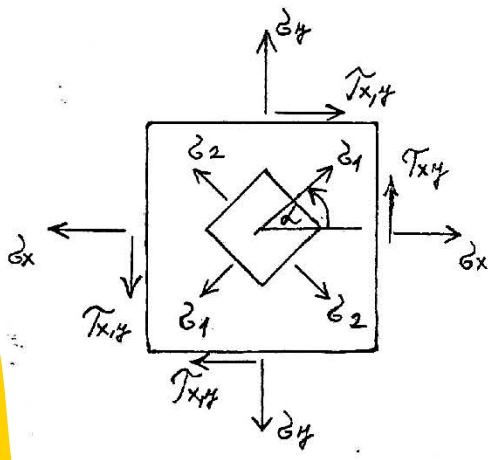
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

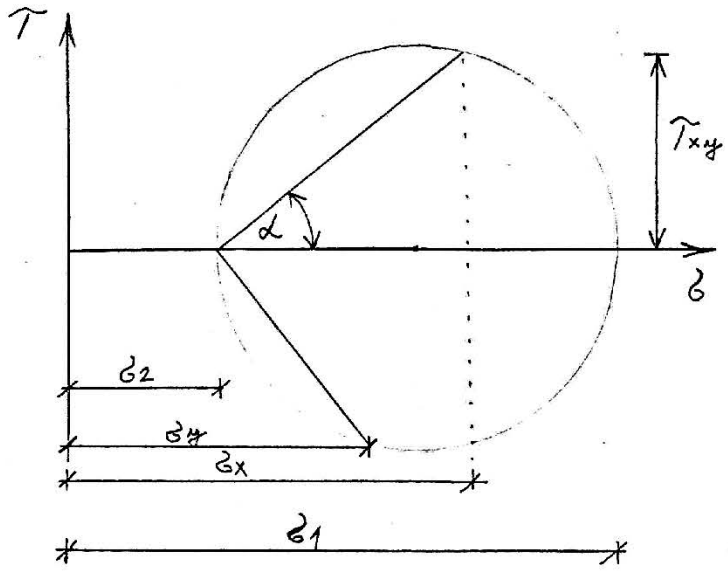
Z druhé rovnice

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

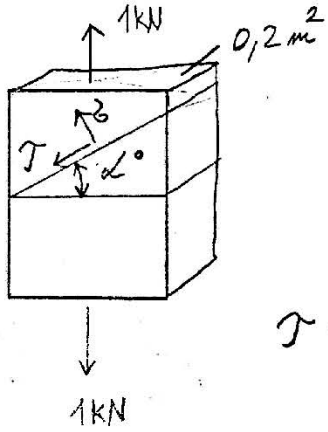
Z rovnic (4) určíme hlavní směry napětí.

Vztah (2) lze chápat jako rovnici kružnice, zvané Mohrova kružnice. Mohrova kružnice poskytuje grafické řešení transformace každou napětí pro rovinnou napjatost, tj. dovoluje ze známých složek napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ určit velikost a směry hlavních napětí (viz. Odtu Pružnost a plasticita I).





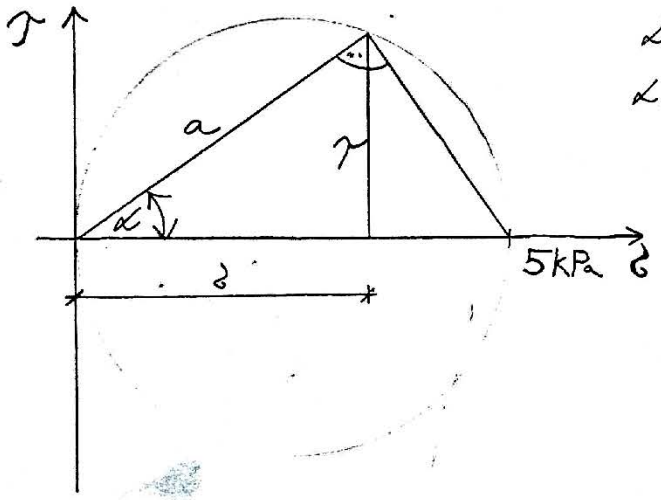
Příklad: Zobrazte normálové a smykové napětí v řezu na řezu vedeném pod úhlem α a to graficky pomocí Mohrovy kružnice. Za pomoci náčrtu proveďte výpočet.



$$\sigma_1 = \frac{1\,kN}{0{,}2\,m^2} = 5\,kPa$$

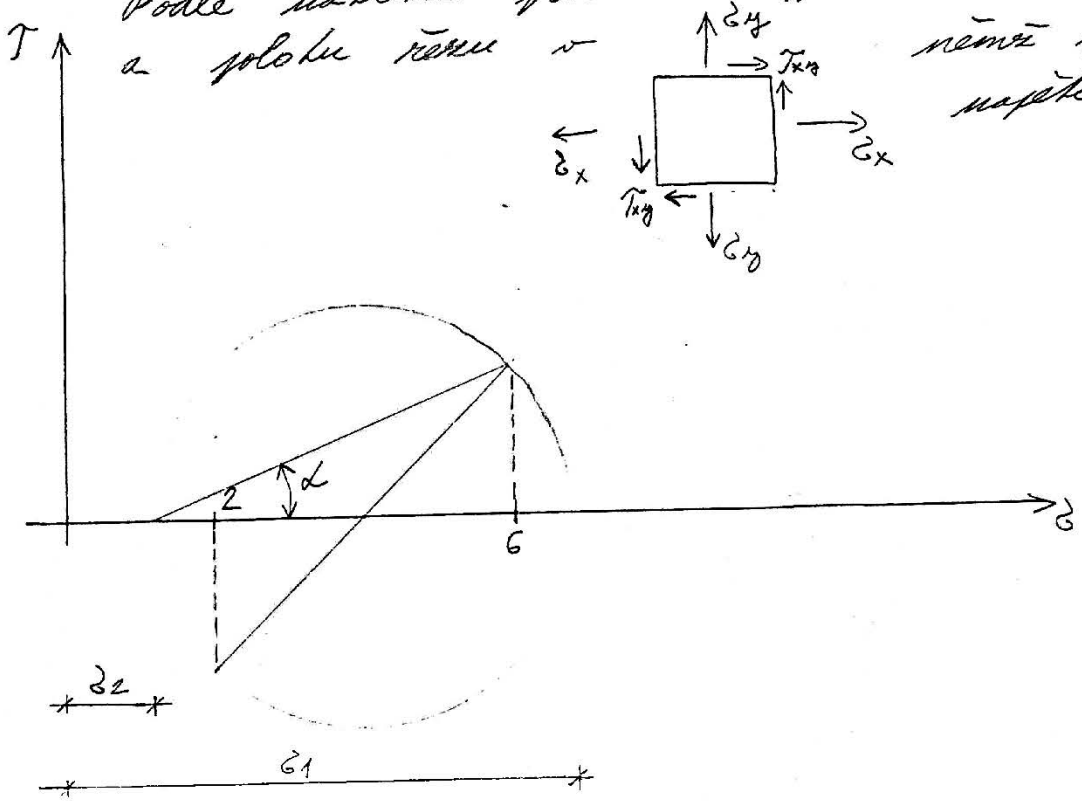
$$\sigma_2 = 0\ kPa$$

$\alpha_1 = 15°$
$\alpha_2 = 40°$
$\alpha_3 = 38°$



$a = 5\,kPa \cdot \cos\alpha° = 4{,}09576\,kPa$	3,830222 kPa	3,940054 kPa
$\sigma = a \cdot \cos\alpha° = 3{,}355\,kPa$	2,99412 kPa	3,1048044 kPa
$\tau = a \cdot \sin\alpha = 2{,}349\,kPa$	2,462019 kPa	2,425439 kPa
15°	40°	38°

Příklad: Graficky určete velikost hlavních napětí pokud víte, že v elementu tělesa je napětí $\sigma_x = 6$ kPa, $\sigma_y = 2$ kPa, $\tau_{xy} = 2$ kPa. Podle nákresu proveďte výpočet velikostí hl. napětí a polohu řezu v němž je smykové napětí nulové.



$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ ... poloha středu pokud $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\sigma_{12} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{6+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6-2}{2}\right)^2 + 2^2} = \begin{cases} 6{,}82843 \\ 1{,}17154 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{2}{6{,}82843 - 2} = 0{,}41421$$

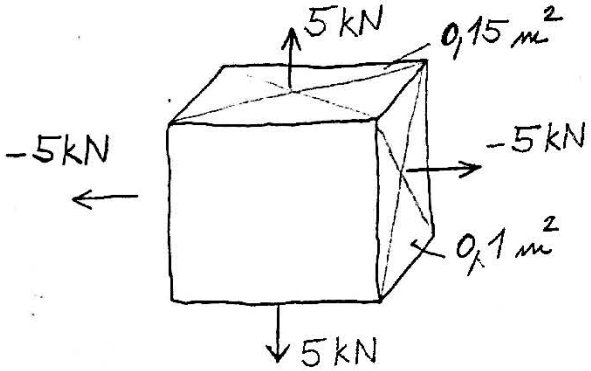
$$\alpha = 22{,}5^\circ$$

kontrola se vzorce (2)

$$(\sigma_x - \sigma)\cdot(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0 = \det$$

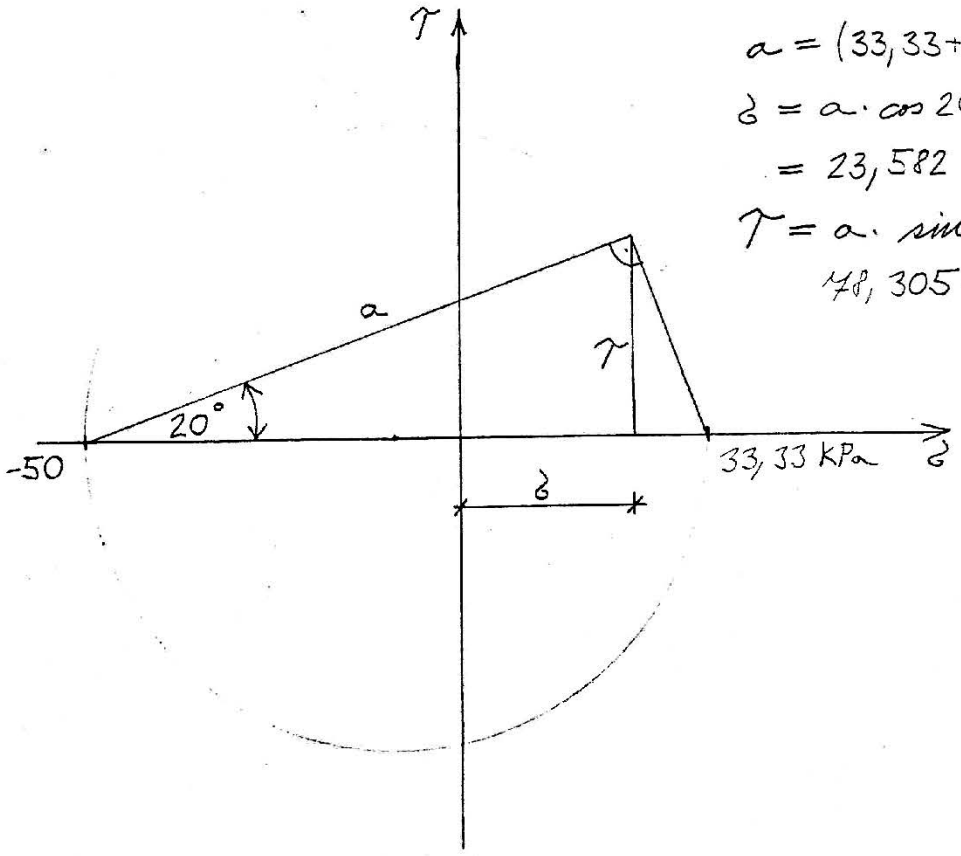
$$\left.\begin{array}{l} (6 - 6{,}82843)\cdot(2 - 6{,}82843) - 2^2 = 0 \\ \text{nebo } (6 - 1{,}17154)\cdot(2 - 1{,}17154) - 2^2 = 0 \end{array}\right\} \text{... správně}$$

Příklad: Určete normálové a smykové napětí v řezu pod úhlem 20° na tělese namáhaném dle obr.



$$\sigma_2 = \frac{-5\,kN}{0{,}1\,m^2} = -50\ kPa$$

$$\sigma_1 = \frac{5\,kN}{0{,}15\,m^2} = 33{,}33\ kPa$$



$a = (33{,}33 + 50) \cdot \cos 20° = 78{,}305\,k$

$\sigma = a \cdot \cos 20° - 50 =$

$= 23{,}582\ kPa$

$\tau = a \cdot \sin 20° =$

$78{,}305 \cdot \sin 20° = 26{,}782\ kPa$

$$\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma_1 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2} \qquad \alpha_1 = 26{,}57$$

$$\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma_2 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{2-6}{2} = -2 \qquad \alpha_2 = -63{,}43$$

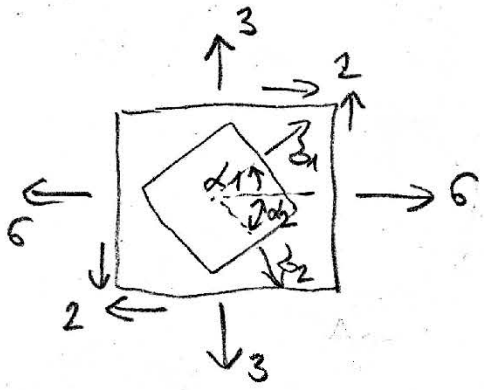
$$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma_1 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{2}{7-3} = \frac{1}{2} \qquad \alpha_1 = 26{,}57$$

$$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma_2 \cdot \sin\alpha = 0$$

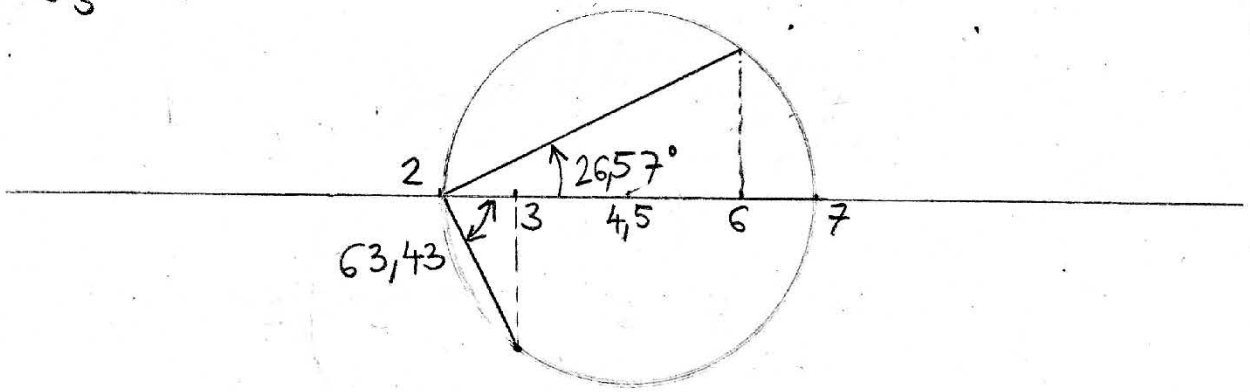
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y} = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\alpha_2 = -63{,}43$$



$$\sigma_{1,2} = \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\sigma_x = 6$$
$$\sigma_y = 3$$
$$\tau_{xy} = 2$$



$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0$$

$$\sigma_{12} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2}$$

(3) $$\sigma_{12} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Z rovnice (3) určíme velikost hl. napětí σ_1, σ_2
Dosadíme σ_1 do první rovnice a dostaneme
pro poměr $\sin\alpha_1 / \cos\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$

(4)
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$ kde σ_1 nemáme z (3)

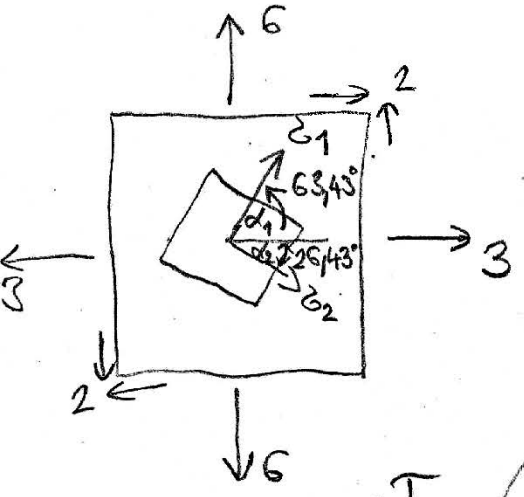
odvodíme σ_2 do první rovnice

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Z druhé rovnice

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

Z rovnic (4) určíme hlavní směry napětí.
Vztah (2) lze chápat jako rovnici kružnice,
zvané Mohrova kružnice. Mohrova kružnice
poskytuje grafické řešení transformace tenzoru
napětí pro rovinnou napjatost, tj. dovoluje
ze známých složek napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ určit
velikost a směry hlavních napětí (viz. Brno
Pružnost a plasticita I).



$\sigma_{1,2} = \frac{7}{2}$

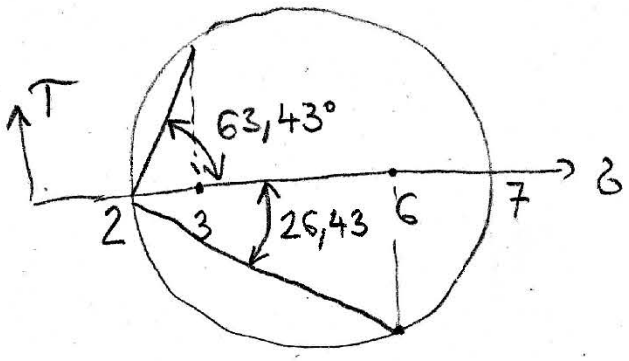
$\alpha_1 = 63,43°$

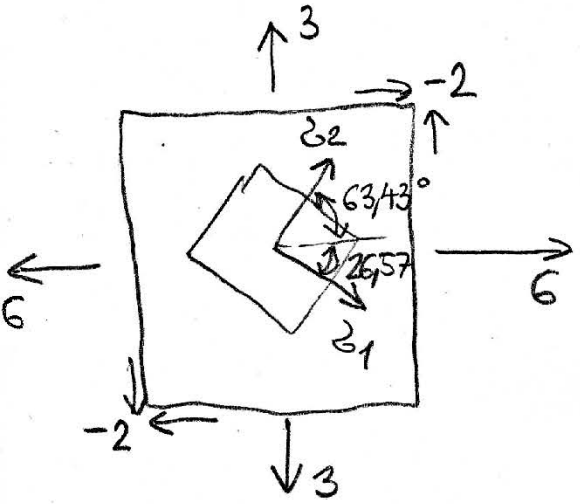
$\alpha_2 = -26,57°$

$\sigma_x = 3$

$\sigma_y = 6$

$\tau_{xy} = 2$





$\sigma_{1,2} = \frac{7}{2}$

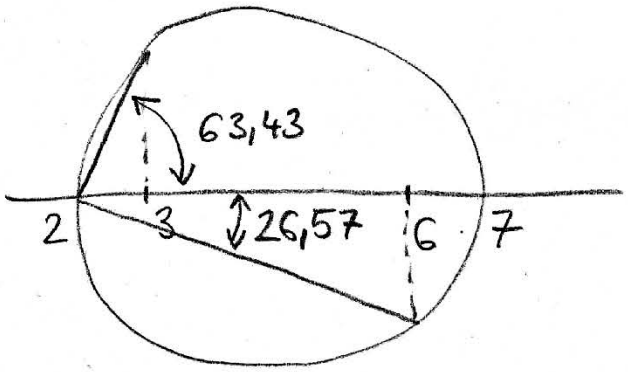
$\alpha_1 = -26,57°$

$\alpha_2 = 63,43°$

$\sigma_x = 6$

$\sigma_y = 3$

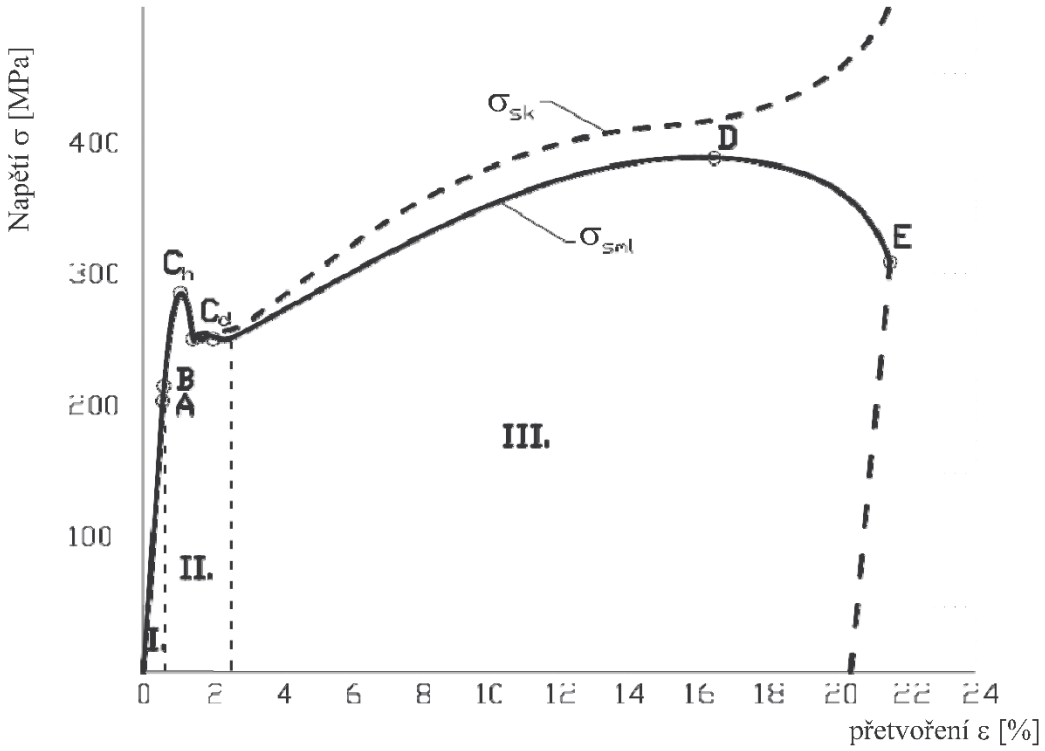
$\tau_{xy} = -2$



Základy teorie plasticity

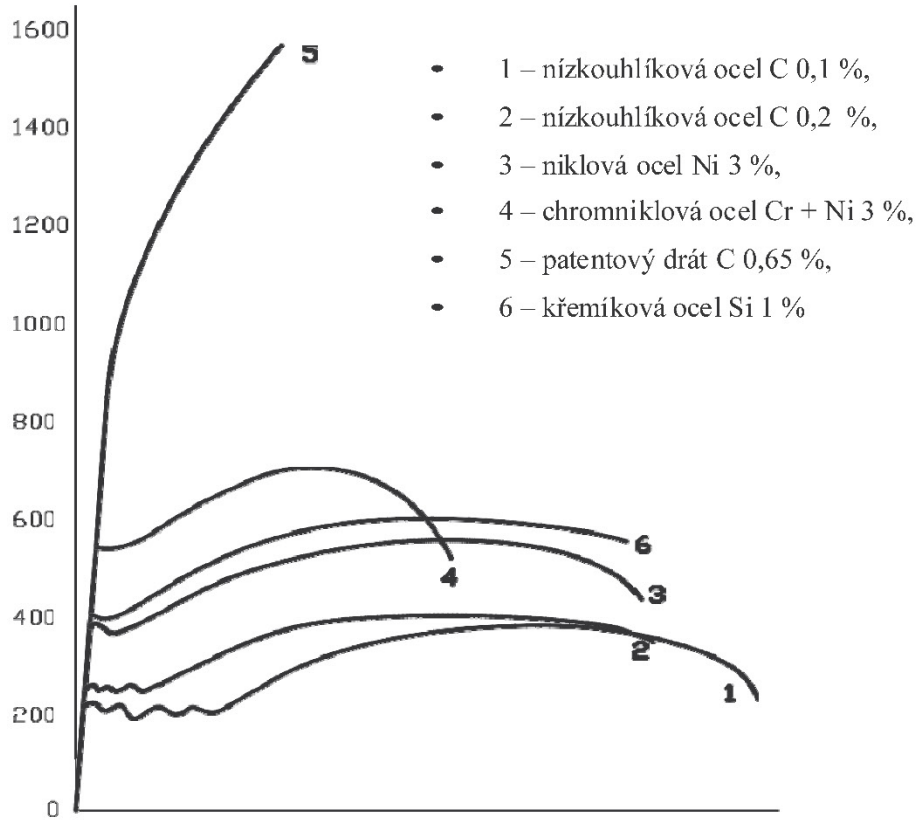
- **Pružnost** je schopnost materiálu pružně se deformovat vlivem silových účinků.
- Plasticita je vlastnost materiálu trvale se deformovat, přičemž velikost plastické deformace není možné přesně vyjádřit jako závislost na velikosti silových účinků, protože při následném zatížení se materiál deformuje jiným způsobem než při předcházejícím zatížení. Ocel se pro určité hladiny zatížení chová jako pružná a nad těmito hladinami jako plastická nebo pružně-plastická.
- Pevnost materiálu je schopnost odolávat napětí, tj. zachovávat celistvost a soudržnost až po určitou hladinu napětí, nad kterou se materiál porušuje.

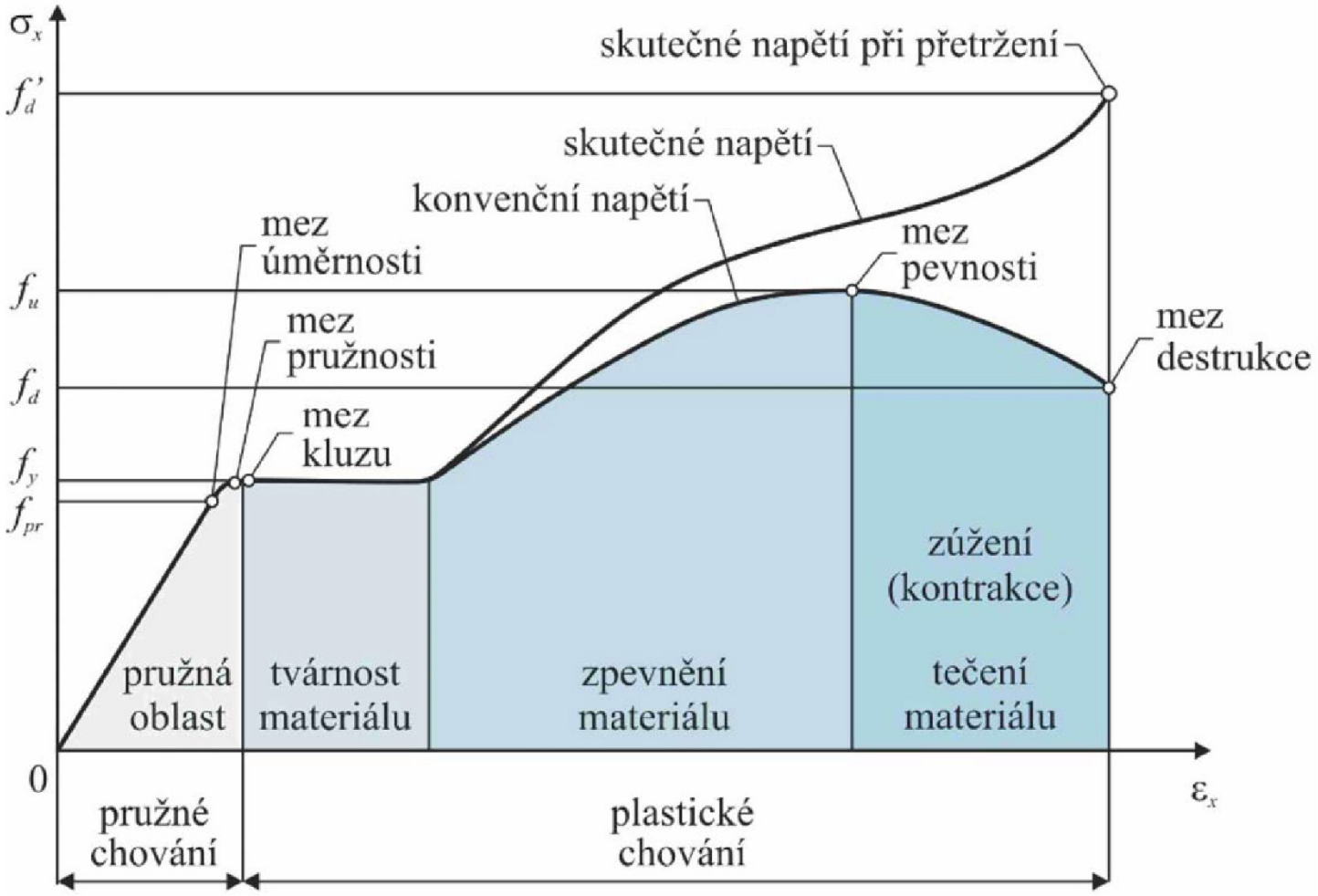
Pružné těleso (též elastické těleso) je takové těleso, které se působením vnější síly deformuje, ale po odstranění této síly se vrací do původního tvaru a velikosti. Tělesa, která se po odstranění vnější síly nevrátí do původního tvaru, se označují jako plastická (nepružná).

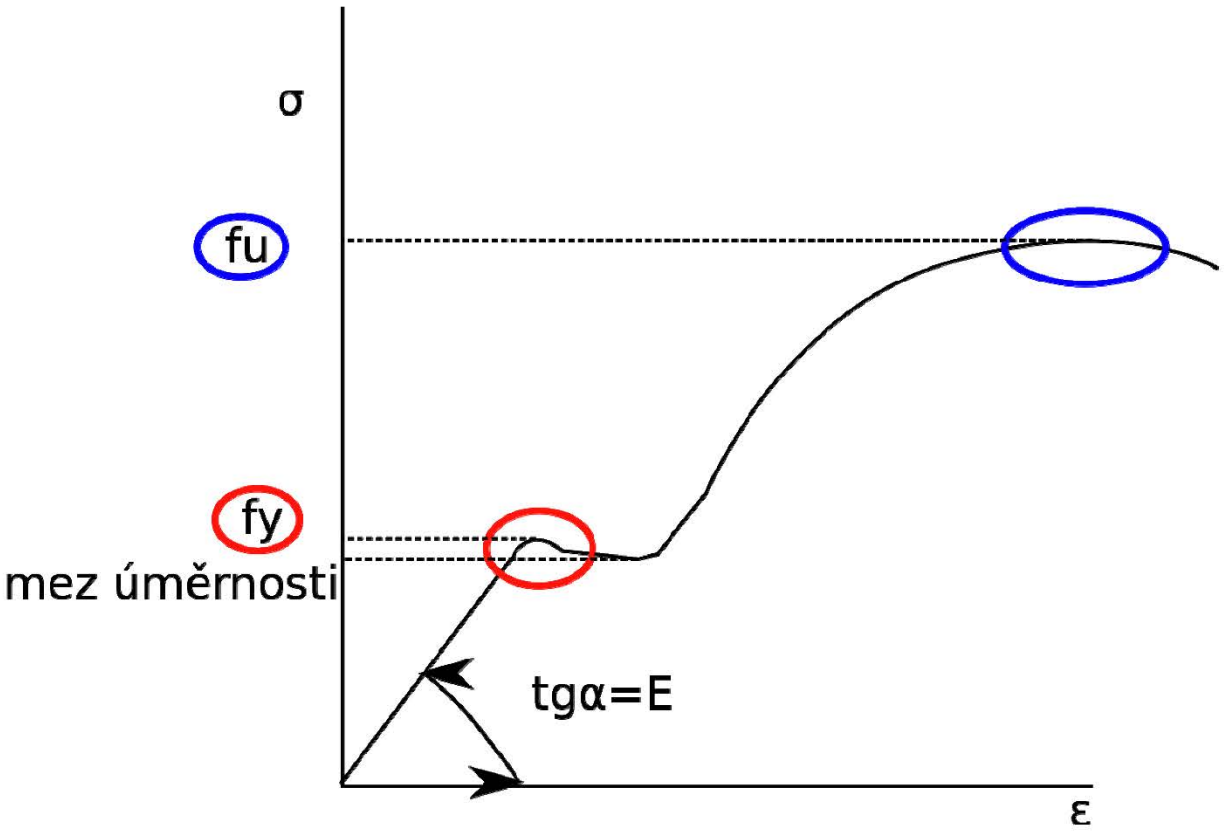


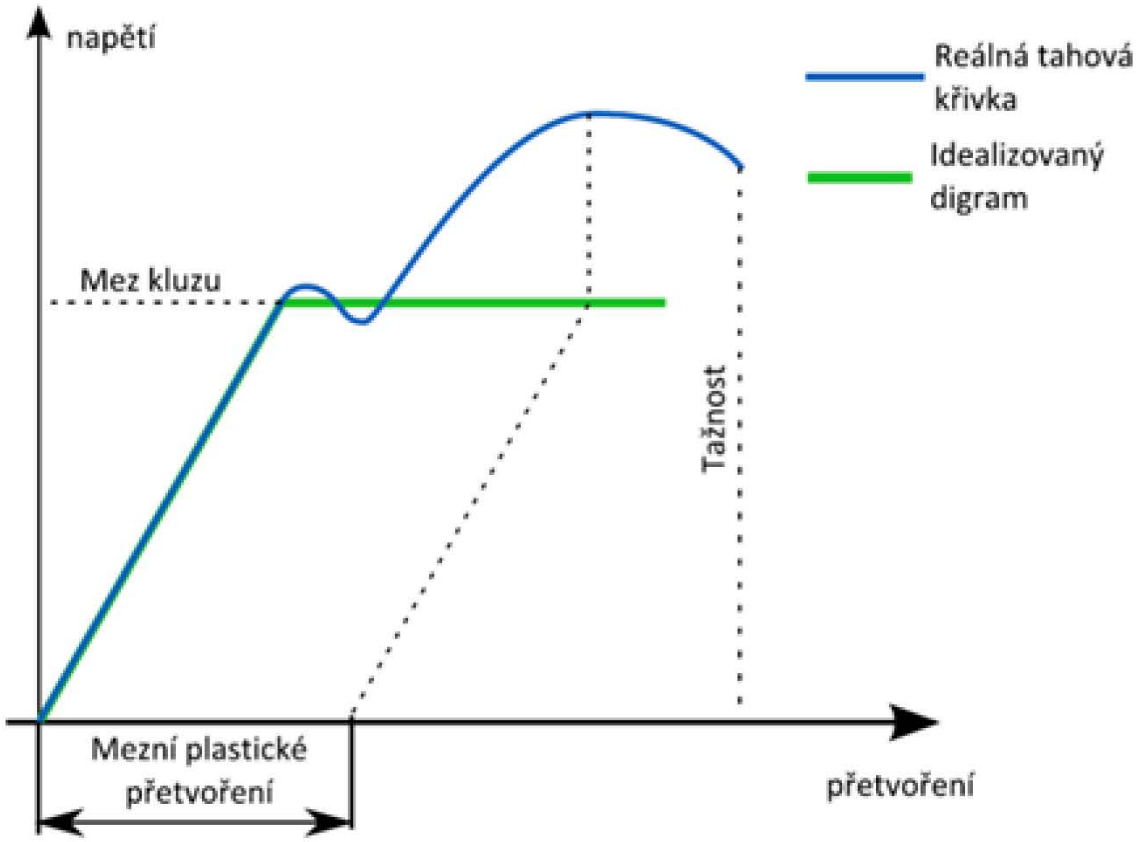
Obr. Smluvní a skutečný pracovní diagram oceli
A - mez úměrnosti, B - mez pružnosti, C_h, C_d – mez kluzu – horní , dolní , D – mez pevnosti, E – mez porušení, I – pružná oblast, II – plastická oblast, III – oblast zpevnění.

https://www.youtube.com/watch?v=ipDZska5VN4


1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
5
4
6
3
2
1
1 – nízkouhlíková ocel C 0,1 %,
2 – nízkouhlíková ocel C 0,2 %,
3 – niklová ocel Ni 3 %,
4 – chromniklová ocel Cr + Ni 3 %,
5 – patentový drát C 0,65 %,
6 – křemíková ocel Si 1 %

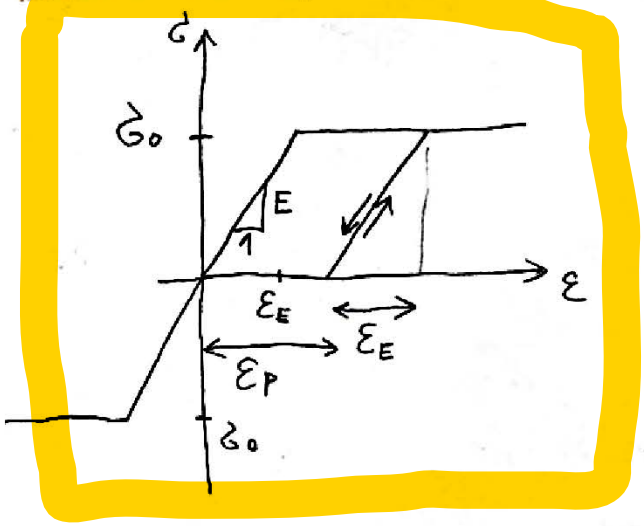

σx
f'd
fu
fd
fy
fpr
0
skutečné napětí při přetržení
skutečné napětí
konvenční napětí
mez úměrnosti
mez pružnosti
mez kluzu
mez pevnosti
mez destrukce
zúžení (kontrakce)
pružná oblast
tvárnost materiálu
zpevnění materiálu
tečení materiálu
εx
pružné chování
plastické chování


σ
fu
fy
mez úměrnosti
tgα=E
ε


napětí
Reálná tahová křivka
Idealizovaný digram
Mez kluzu
Tažnost
Mezní plastické přetvoření
přetvoření

Základy teorie plasticity

Ideální pružnoplastický materiál (bez zpevnění)



σ_0 ... mez kluzu

Při dosažení mezního napětí σ_0 zůstává již dále napětí konstantní i při zvýšení ε.

ε_P ... nevratná tvarová změna při zatížení.

Podmínky plasticity

Plocha funkce plasticity $f = \sigma^2 - \sigma_0^2 = 0$

$f < 0$ ... materiál se chová pružně

$f > 0$ ... není možné

U laboratorních zkoušek lze formulovat dvě základní podmínky:

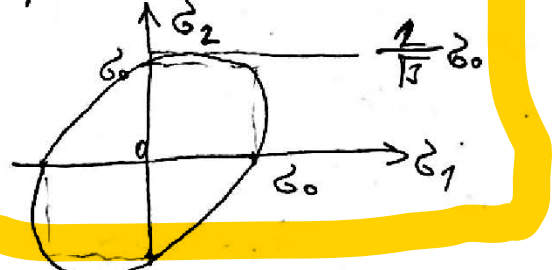
Misesova podmínka plasticity

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_0^2 = 0$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí při prostorové napjatosti

Pro rovinnou napjatost lze vztah zjednodušit:

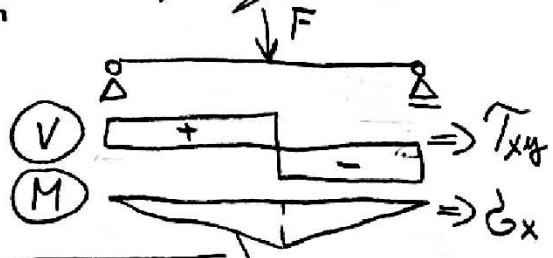
$$f = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad \text{... rovnice elipsy}$$



body uvnitř elipsy ... pružný stav

V případě, že kromě jedné složky normálového napětí a napětí τ lze napsat i složky vektoru napětí pro hlavní napětí:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$$

$$\left(\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right) + \left(\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\sigma_x^2}{4} + 2\,\frac{\sigma_x}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} + \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2\right)\right) +$$

$$\frac{\sigma_x^2}{4} - 2\,\frac{\sigma_x}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2} + \tau_{xy}^2} + \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 =$$

$$= \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le \sigma_0}$$

Trescova podmínka plasticity
(podmínka maximálních smykových napětí)

Pro dvojosou napjatost $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$:

$$f = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_0^2 = 0$$

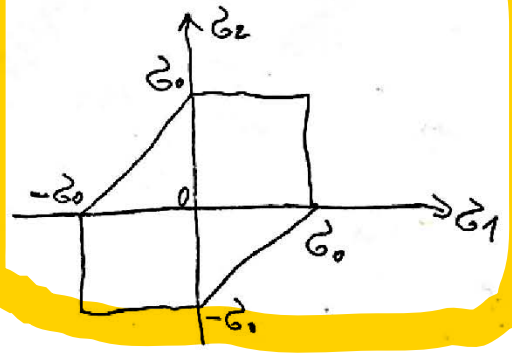
Pro dvojosou napjatost $\sigma_3 = 0$

$$f = \max\left\{\sigma_1^2 - \sigma_0^2;\ \sigma_2^2 - \sigma_0^2\right\} = 0$$

$\sigma_1; \sigma_2 > 0$

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_0^2 = 0$$

$\sigma_1; \sigma_2 < 0$



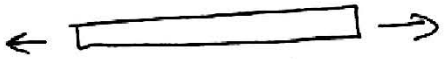
→ T

Mezní plastická únosnost průřezu

1) Osový tah a tlak

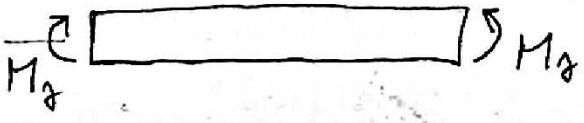
Ke plastizování dochází dojde současně

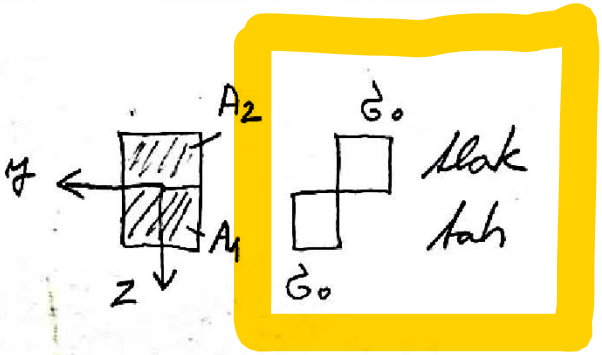
$$N_o = A \cdot \sigma_o$$

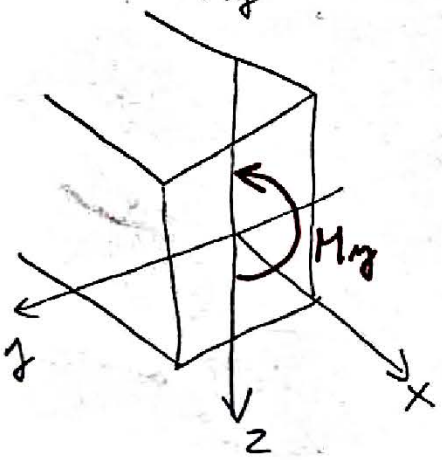


Dostředně tažený nebo tlačený prut nemá žádnou rezervu únosnosti.

2) Prostý ohyb





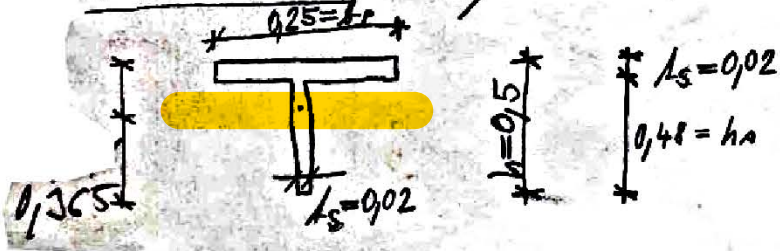


$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \, dA = f_y \cdot \int_{A_1} z \, dA -$$

$$- f_y \cdot \int_{A_2} z \, dA = f_y \cdot (S_{1y} - S_{2y}) =$$

$$= 2 \cdot S_{1y} \cdot f_y$$

Příklad 2: Určete mezní plastický moment



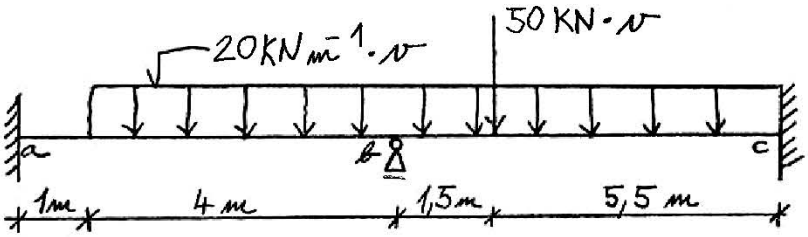
$A_{tažné} = A_{tlačené} = \frac{A}{2}$ ⇒ $z_{ob} = ?$

$b_s \cdot z_{od} = b_s \cdot (h_n - z_{od}) + b_p \cdot t_s$ ⇒ $z_{od} = 0{,}365$ m

$W_o = S_1 + S_2 = 2{,}0895 \cdot 10^{-3}$ m^3

$M_o = 250 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0895 \cdot 10^{-3} = 522{,}375$ kNm

Příklad: Vypočtěte daný nosník a stanovte mezní zatížení při němž se z nosníku stane mechanismus a zřítí se.



$M_o = 80$ KNm ... ... mezní moment při němž průřez vyplastizuje.

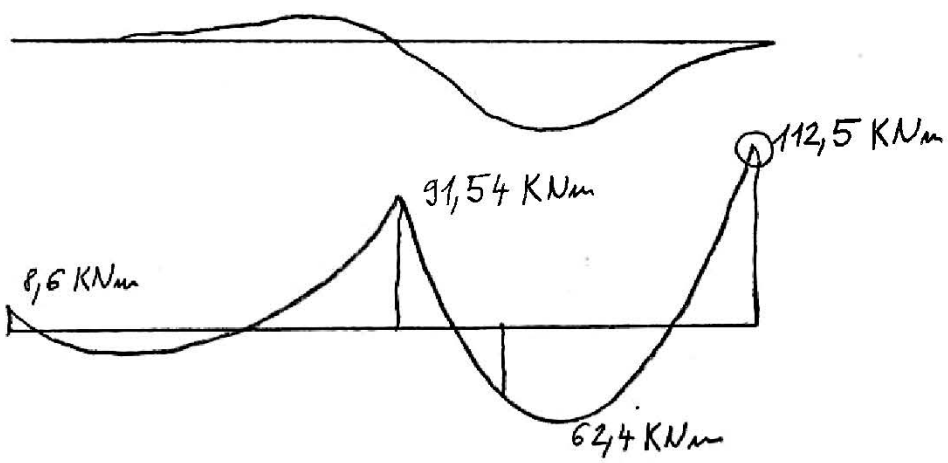
Uvažujme konstrukci o jednoparametrickém zatížením zatížením přenáší se ohyb. Výpočet mezního zatížení při němž se z konstrukce stane mechanismus provádíme tak:

a) postupným zatěžením (od prutu až k mezním stavu)

b) analýzou poslední fáze kdy se konstrukce již změnila v mechanismus. Jedná se o tzv. statickou či kinematickou větu.

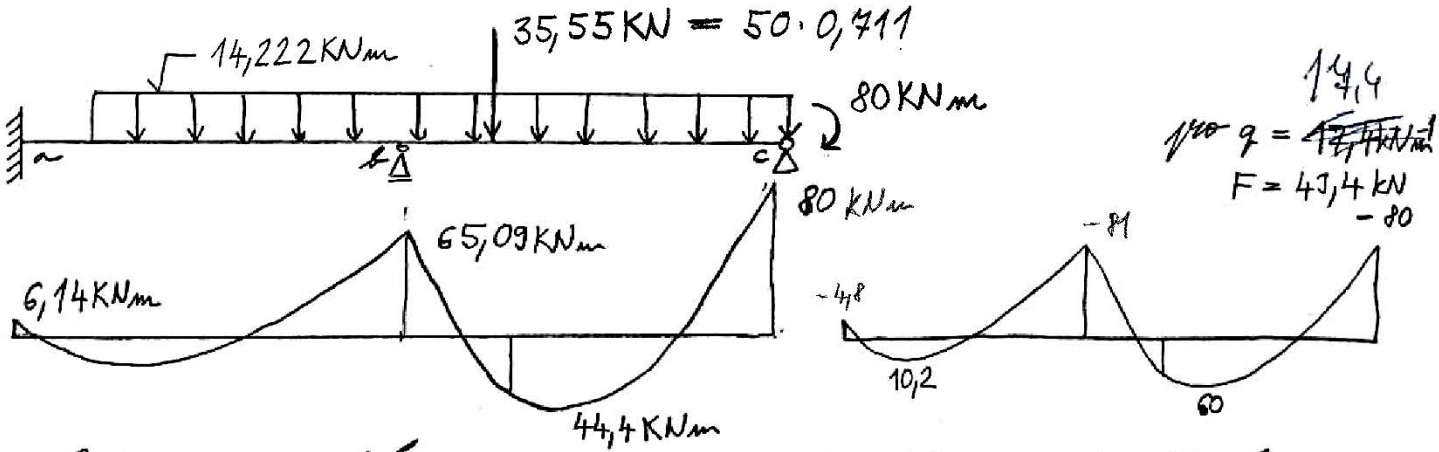
ad a) postupným zatěžením

0. stav ... zvolíme $\nu = 1$ a stanovíme průběh momentů



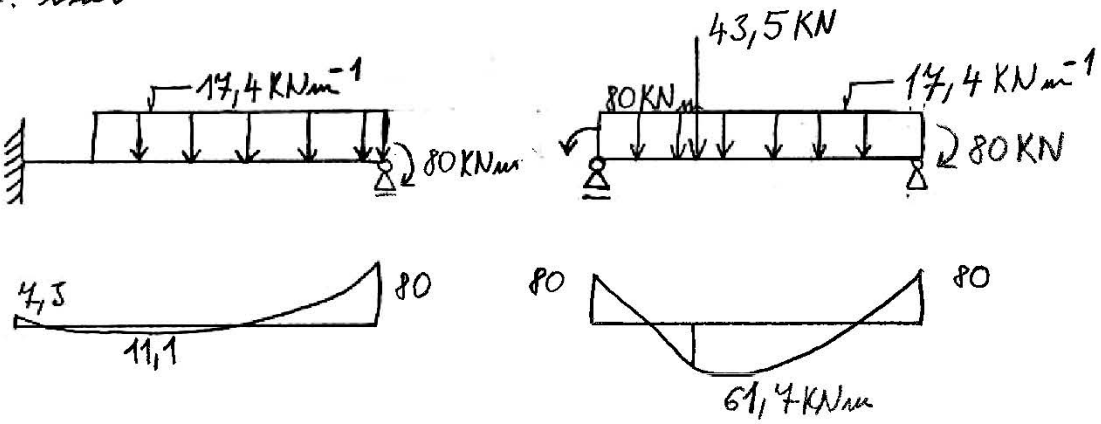
Ve styčníku c vznikne první plastický kloub při velikosti zatížení $\nu_1 = \frac{80}{112,5} = 0,711$ ... 1 stav

1. stav

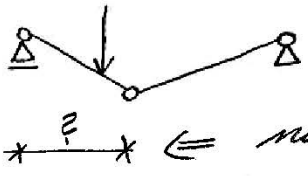


Při zatěžování vzniká na styčníku c pl. kloub a nyní se k styčníku b a to při intenzitě zatížení $\frac{17,4}{14,22} \cdot 0,711 = 0,87$ ... 2 stav

2. stav

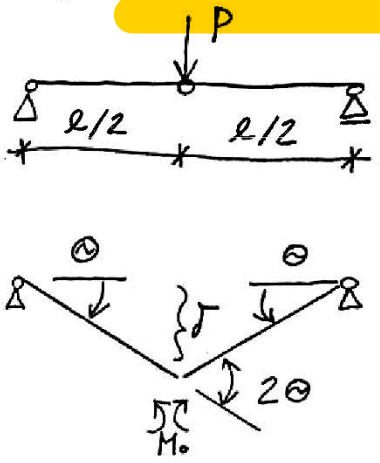


Z nosníku vznikne mechanismus při intenzitě zatížení zbude $\frac{N_2 \cdot 80}{62,4} = 1,28$ násobku původního zatížení.



? ⇐ nutno dopočítat polohu!

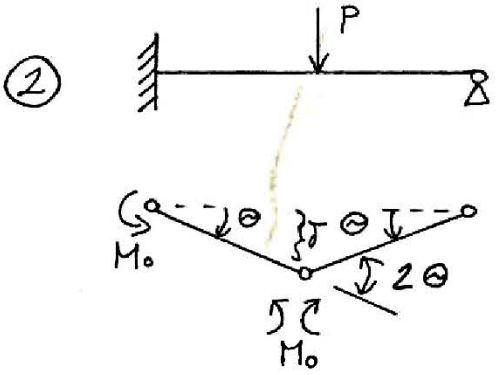
ad b) Kinematický způsob zjištění únosnosti:

① 

$P \cdot \delta = M_0 \cdot 2\Theta$ $\quad tg\,\Theta \doteq \Theta = \frac{2\cdot\delta}{l}$

$P \cdot \delta = M_0 \cdot 4 \cdot \delta / l$

$M_0 = \frac{P_0 \cdot l}{4} \Rightarrow P_0 = \frac{4 \cdot M_0}{l}$

② 

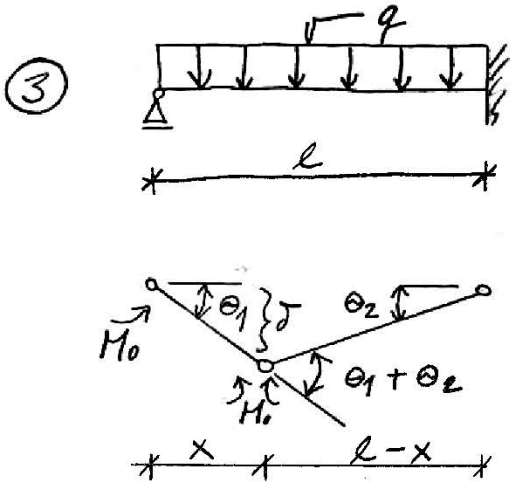
$P \cdot \delta = M_0 \cdot (\Theta + 2\Theta) = M_0 \cdot 3\Theta$

$tg\,\Theta \doteq \Theta = \frac{2\cdot\delta}{l} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta = \frac{\Theta \cdot l}{2}$

$P \cdot \frac{\Theta \cdot l}{2} = M_0 \cdot 3\Theta \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = \frac{6 \cdot M_0}{l}$

③ 

Kin. věta: Ze všech řešení x realizuje $\frac{dq}{dx} = 0$

$q \cdot \delta \cdot l \cdot \frac{1}{2} = M_0 \cdot (\Theta_1 + 2\Theta_2)$

$\Theta_1 = \frac{\delta}{x} \qquad \Theta_2 = \frac{\delta}{l-x}$

$q \cdot \delta \cdot l \cdot \frac{1}{2} = M_0 \cdot \left(\frac{\delta}{x} + \frac{2\cdot\delta}{l-x}\right)$

$q = \frac{2M_0}{l} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{l-x}\right) =$

$= \frac{2M_0}{l} \cdot \frac{l-x+2x}{x\cdot(l-x)} = \frac{l+x}{x\cdot(l-x)} \cdot \frac{2M_0}{l}$

$\frac{dq}{dx} = \frac{x\cdot(l-x) - (l+x)\cdot(l-2x)}{[x\cdot(l-x)]^2} = 0 \Rightarrow x_{12} =$

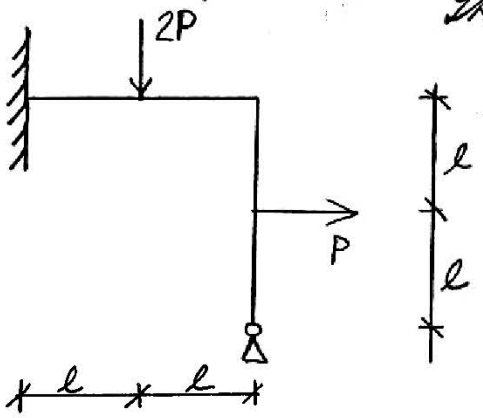
$l\cdot x - x^2 - l^2 + 2lx + 2x^2 = 0$ (−lx)

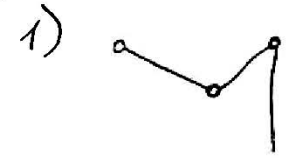
$x^2 + 2lx - l^2 = 0 \Rightarrow x_{12} = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 + 4l^2}}{2} =$

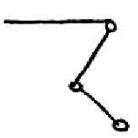
$x = (\sqrt{2} - 1)\cdot l$

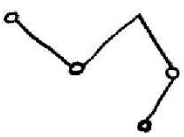
$= \frac{-2l \pm \sqrt{8}\cdot l}{2} = l\cdot(-1 \pm \sqrt{2}) =$

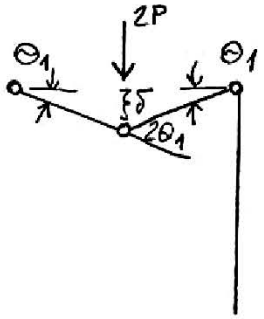
Příklad: Stanovte mezní zatížení na rámu.
Stanovte reakce u rozhodujícího mechanismu.



1) 

2) 

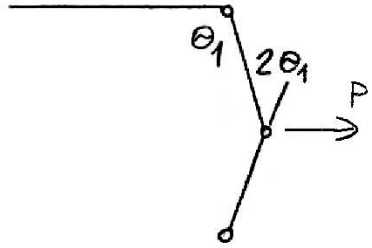
3) 

1) 

$$\Theta_1 = \frac{\delta}{l}$$

$$2 \cdot P \cdot \delta = M_0 \cdot (2\Theta_1 + \Theta_1 + \Theta_1)$$

$$P_1 = 2\,\frac{M_0}{l}$$

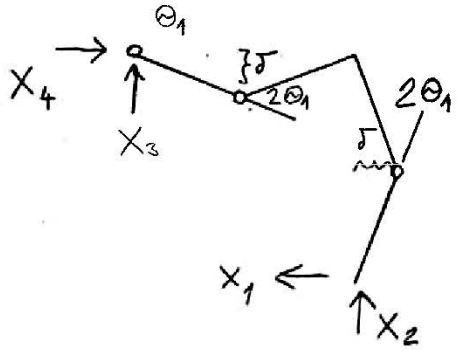
2) 

$$P \cdot \delta = M_0 \cdot (2\Theta_1 + \Theta_1)$$

$$P \cdot \delta = M_0 \cdot 3 \cdot \frac{\delta}{l}$$

$$P = 3 \cdot \frac{M_0}{l}$$

3) Kombinovaný mechanismus



$$2 \cdot P \cdot \delta + P \cdot \delta = M_0 \cdot (\Theta_1 + 2\Theta_1 + 2\Theta_1)$$

$$3 \cdot P \cdot \delta = M_0 \cdot 5 \cdot \frac{\delta}{l}$$

$$P_3 = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_0}{l} = 1{,}666\ \frac{M_0}{l}$$

$$X_1 = \frac{M_0}{l}$$

$$\min\{P_1; P_2; P_3\} = P_3 = 1{,}666\,\frac{M_0}{l}$$

Kinematická věta: Mezní plastické zatížení se rovná nejmenší z těch mezních kinematicky přípustných mechanismů na něž působící zatížení je hledané, skutečné mezní zatížení je to, které dává nejmenší hodnotu zatížení.