Základy variačního počtu

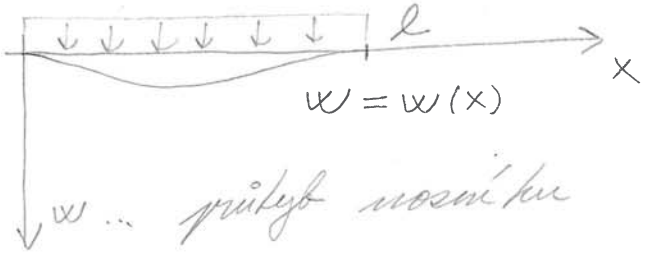
Základním pojmem, kterým se zabývá klasická matematická analýza je reálná funkce. Funkce je předpis, který reálnému číslu přiřazuje reálnou hodnotu.

Základním pojmem variačního počtu je <u>funkcionál</u>. Reálné funkci $y(x)$ se přiřazuje $F(y(x))$

$$y(x) \longrightarrow F(y(x))$$

Funkcionál je určen oborem funkcionálu $D(F) \rightarrow$ $\rightarrow$ (množina funkcí) a předpisem přiřazení.

Př.:

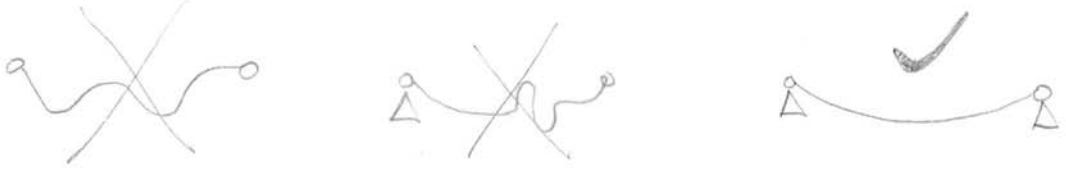


Celková energie nosníku zatíženého zatížením $f(x)$

$$E = E_i + E_e = F(w(x)) = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l EI(w'')^2\,dx}_{\text{potenciální energie vnitřních sil}} - \underbrace{\int_0^l f w\,dx}_{\text{potenciální energie vnějších sil}}$$

Předmětem variačního počtu jsou metody pro určení extrémů funkcionálu. Tj. určení funkcí pro něž funkcionál nabývá minima (maxima)

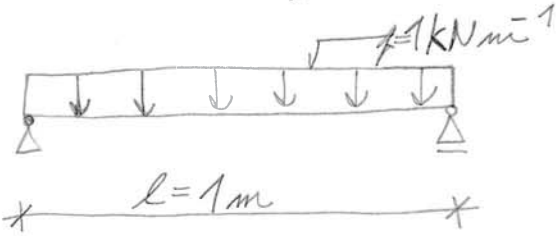
U nosníku nastane ve všech možných stavech ten, u kterého bude celková energie minimální.



Ritzova metoda

Přímá metoda pro určení extrému funkcionálu

Příklad: Ritzovou metodou určete průhyb nosníku $EI = konst.$



Funkci průhybu aproximujeme tak, aby byly splněny okr. podmínky:

$$\tilde{w}(x) = w_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)$$

Celková energie nosníku:

$$F(\tilde{w}(x)) = \frac{1}{2}\int_0^l EI \cdot (\tilde{w}'')^2 dx - \int_0^l f \cdot \tilde{w}\, dx$$

$$\tilde{w}'' = \frac{-\pi^2 \cdot w_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{l}\right)}{l^2} = \Big| l = 1m \Big| = -\pi^2 w_1 \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

$$F(\tilde{w}(x)) = \frac{1}{2}\int_0^1 EI\,(-\pi^2 \cdot w_1 \cdot \sin(\pi \cdot x))^2 dx - \int_0^1 1 \cdot w_1 \cdot \sin(\pi \cdot x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} EI \cdot \frac{\pi^4 \cdot w_1^2}{2} - \frac{2 \cdot w_1}{\pi}$$

Hledáme extrém funkcionálu tak, aby celková potenciální energie byla minimální.

$$\frac{dF(\tilde{w}(x))}{dx w_1} = 0$$

$$\frac{\pi^4 \cdot EI \cdot w_1}{2} - \frac{2}{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 = \frac{4}{\pi^5 \cdot EI}$$

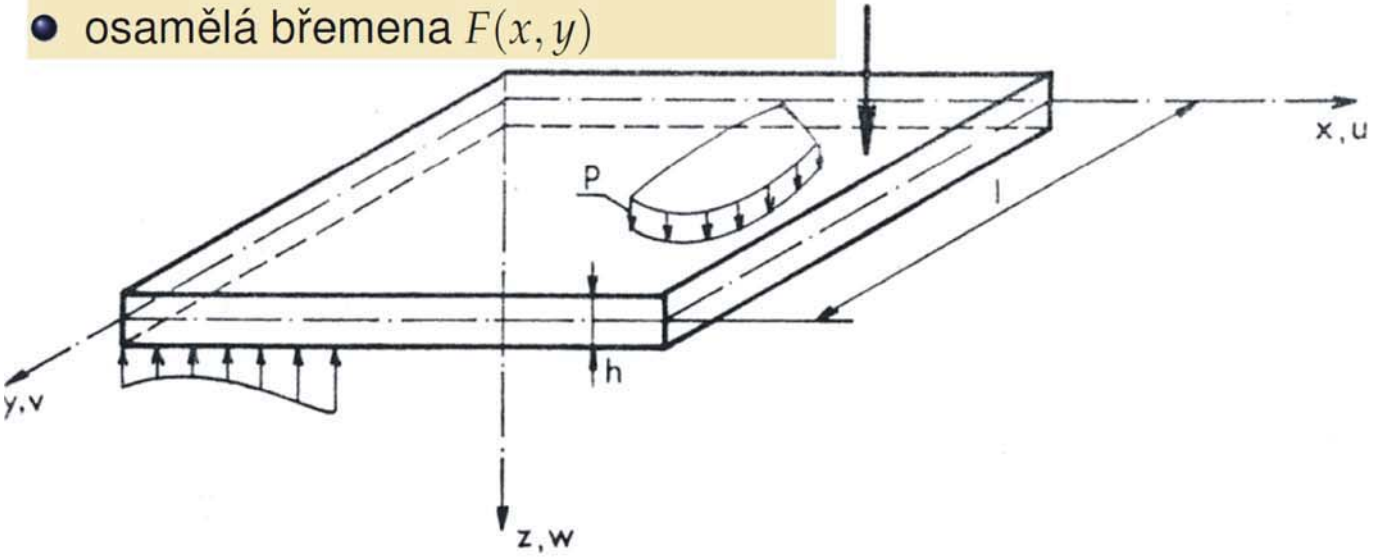
Maximální průhyb se bude:

$$\tilde{w}(x) = \frac{4}{\pi^5 EI} \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

$$w_{max} = \frac{0{,}013071}{EI}$$

Kirchhoffova teorie tenkých desek

- zatížení kolmo ke střednicové rovině
- tloušťka desky $h \ll l$
- spojité zatížení $p(x, y)$
- osamělá břemena $F(x, y)$



Deska v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic

Lineární teorie desek – autor Gustav Kirchhoff.



Gustav Robert Kirchhoff (1824 –1887)

Řešení podle Kirchhoffa je založeno na předpokladech:

- Deformace střednicové plochy jsou malé.
- Normálová napětí σ_z jsou v porovnání s napětím σ_x a σ_y malá a zanedbávají se.
- Body ležící před deformaci na normále ke střednici leží na ní i po deformaci (tzv. špendlíková hypotéza). Nemění se také jejich vzdálenost a tudíž $\varepsilon_z = 0$.
- Body na střednicové ploše desky mají nulové normálové napětí a přemísťují se pouze ve směru osy z (podmínkou je symetrie tvaru a materiálu desky).

Důsledky:

- Přetvoření lze vyjádřit jako funkci ohybové plochy $w(x, y)$,
- $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$.

Energetické metody v teorii ohybu tenkých desek

Základní desková rovnice

(1) $\Delta\Delta w = \frac{1}{D}$ neboli $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\cdot\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D}$

kde $D = \frac{E\cdot h^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$ Δ ... Laplaceův operátor

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

Funkci průhybu aproximujeme řadou ve tvaru

(2) $\tilde{w}(x,y) = \sum_k w_k \cdot \varphi_k(x,y)$

kde φ_k ... jsou bázové funkce splňující předepsané (homogenní) okrajové podmínky

w_k ... jsou součinitelé lineární kombinace (neznámé konstanty), které je třeba určit výpočtem ze systému lineárních rovnic.

V Ritzově metodě vyjdeme z Lagrangeova variačního principu a budeme minimalizovat funkcionál potenciální energie systému $E = E_i + E_e$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial(E_i+E_e)}{\partial w_1} &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial(E_i+E_e)}{\partial w_i} &= 0 \\ \frac{\partial(E_i+E_e)}{\partial w_k} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

kde potenciální energie vnitřních sil můžeme zapsat

$$E_i = \frac{D}{2}\iint_\Omega \left\{(\Delta w)^2 - 2\cdot(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy =$$

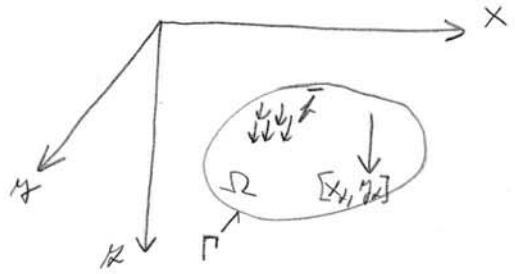
(4)

$$= \frac{D}{2}\iint_\Omega (\Delta w)^2\,dx\,dy - \frac{D}{2}(1-\nu)\cdot\int_\Gamma \left[\frac{\partial w}{\partial y}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] ds$$

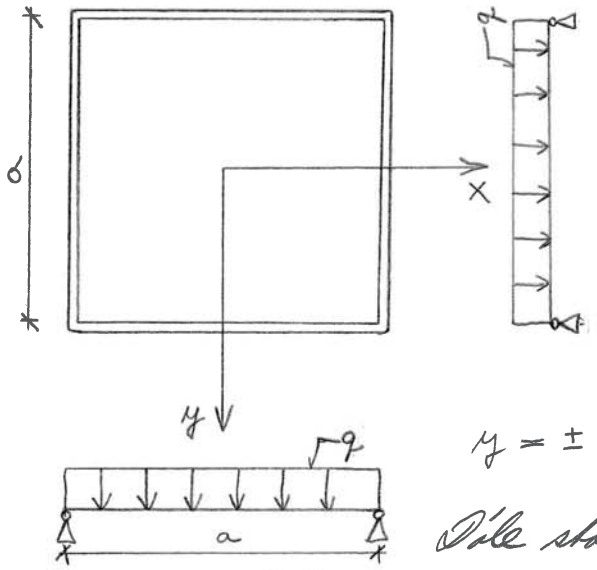
V případě, že je deska po celém obvodu sevřená nebo prostě podepřená nebo je-li derivace průhybu ve směru normály k nepodepřenému okraji rovna nule, je křivkový integrál roven nule.

Potenciál energie vnějších sil.

$$E_e = -\iint_\Omega \bar{f}(x,y)\, w(x,y)\, dx\, dy - \sum_\alpha \bar{F}_\alpha\, w(x_\alpha, y_\alpha)$$



Příklad 1: Obdélníková deska z obrázku řešte Ritzovou metodou



Budeme uvažovat jediný člen řady

$$\tilde{w} = w_1 \cdot \cos\frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{a}$$

Funkce splňuje okrajové podmínky

$$x = \pm\frac{a}{2} : \tilde{w} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} = \frac{-\pi^2 w_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{a}\right)}{a^2} = 0$$

$$y = \pm\frac{a}{2} : \tilde{w} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{-\pi^2 w_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{a}\right)}{a^2} = 0$$

Dále stanovíme přibližnou hodnotu potenciální energie deformace

$$\tilde{E}_i = \frac{D}{2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} (\Delta \tilde{w})^2\, dx\, dy = \frac{D}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(-2 \cdot \frac{\pi^2 w_1 \cdot \cos\frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{a}}{a^2}\right)^2 dx\, dy =$$

$$\frac{D}{2} \cdot \pi^4 \cdot \frac{w_1^2}{a^2}$$

Potenciálnu energie vnějších sil

$$\tilde{E}_e = -\iint q\, \tilde{w}\, dx\, dy = -\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} q \cdot w_1 \cdot \cos\frac{\pi \cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi \cdot y}{a}\, dx\, dy = -\frac{4a^2 q \cdot w_1}{\pi^2}$$

Celková potenciálnú energie

$$\tilde{E} = \tilde{E}_i + \tilde{E}_e = \pi^4 \frac{w_1^2}{a^2} - \frac{4a^2 q \cdot w_1}{\pi^2}$$

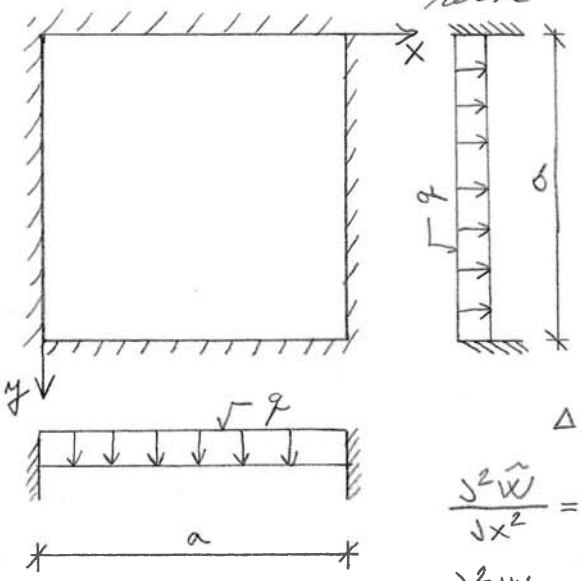
Parametr w_1 určíme z podmínky minima

$$\frac{J(\tilde{E}_i + \tilde{E}_e)}{J w_1} = \frac{D \pi^4 w_1}{a^2} - \frac{4a^2 q}{\pi^2} = 0 \Rightarrow w_1 = q \cdot \frac{4a^4}{\pi^6 \cdot D}$$

Nalezli jsme funkci průhybu ve tvaru:

$$\tilde{w} = q \cdot \frac{4a^4}{\pi^6 D} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{a}\right)$$

Příklad 2: Po obvodě vetknutou desku z obrázku řešte Ritzovou metodou.



$$\tilde{w} = w_1 \cdot x^2 \cdot (x-a)^2 \cdot y^2 \cdot (y-a)^2$$

Funkce splňuje okrajové podmínky

$x=0; x=a: \quad \tilde{w} = 0, \quad \frac{J\tilde{w}}{Jx} = w_1 \cdot 2x \cdot (x-a)(2x-a) \cdot y^2 \cdot (y-a)^2 = 0$

$y=0; y=b: \quad \tilde{w} = 0, \quad \frac{J\tilde{w}}{Jy} = w_1 \cdot x^2 \cdot (x-a)^2 \cdot 2y \cdot (y-a)(2y-a) = 0$

$$\Delta\tilde{w} = \frac{J^2\tilde{w}}{Jx^2} + \frac{J^2\tilde{w}}{Jy^2}$$

$$\frac{J^2\tilde{w}}{Jx^2} = 2y^2 \cdot (y-a)^2 \cdot (6x^2 - 6ax + a^2) \cdot w_1$$

$$\frac{J^2 w}{Jy^2} = 2x^2 \cdot (x-a)^2 \cdot (6y^2 - 6ay + a^2) \cdot w_1$$

Přibližná hodnota energie deformace:

$$\tilde{E}_i = \frac{D}{2} w_1^2 \int_0^a \int_0^a (\Delta w)^2 \, dx\, dy = D w_1^2 \int_0^a \int_0^a \Big(y^2 \cdot (y-a)^2 (6x^2 - 6ax + a^2) +$$

$$+ x^2 \cdot (x-a)^2 (6y^2 - 6ay + a^2) \Big)^2 dx\, dy = D w_1^2 \frac{2a^{14}}{1225}$$

Potenciální energie vnějších sil

$$\tilde{E}_e = -\int_0^a \int_0^a q \cdot w \, dx\, dy = -\int_0^a \int_0^a q \cdot w_1 \cdot x^2 \cdot (x-a)^2 y^2 \cdot (y-a)^2 \, dx\, dy =$$

$$= -q \frac{a^{10}}{900} \cdot w_1$$

Stanovíme parametr w_1

$$\tilde{E}_i + \tilde{E}_e = D \cdot w_1^2 \frac{2a^{14}}{1225} - q \cdot \frac{a^{10}}{900} \cdot w_1$$

$$\frac{\partial(\tilde{E}_i + \tilde{E}_e)}{\partial w_1} = D \cdot w_1 \cdot \frac{4a^{14}}{1225} - q \cdot \frac{a^{10}}{900} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w_1 = q \cdot \frac{49}{144 \cdot D \cdot a^4}$$

Funkce průhybu:

$$\tilde{w} = q \cdot \frac{49}{144 \cdot D \cdot a^4} \cdot x^2 \cdot (x-a) \cdot y^2 \cdot (y-a)^2$$

Napětí

$$\sigma_x = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = -\frac{E \cdot z}{1-\mu^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E \cdot z}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

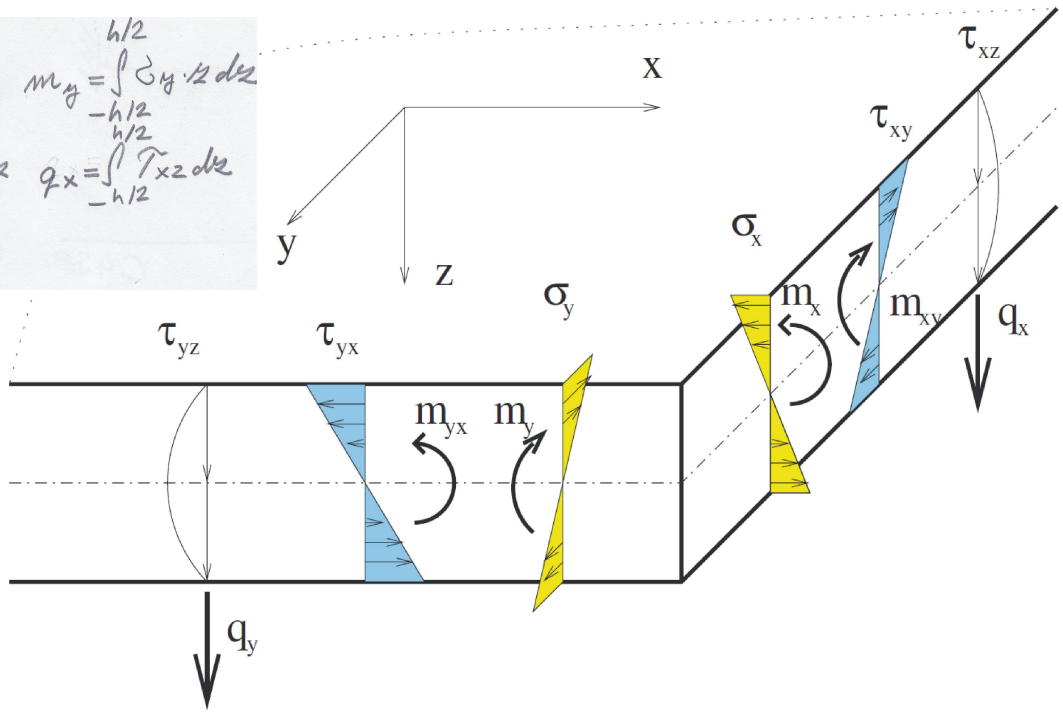
$$\tilde{\tau}_{xz} = \frac{E}{2 \cdot (1-\mu^2)} \cdot \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial \Delta w}{\partial x}$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = \frac{E}{2 \cdot (1-\mu^2)} \left[\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right] \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \cdot z \, dz \qquad m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \cdot z \, dz$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \cdot z \, dz \qquad q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\tau}_{xz} \, dz$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tilde{\tau}_{xy} \, dz$$



Napětí a vnitřní síly na desce.