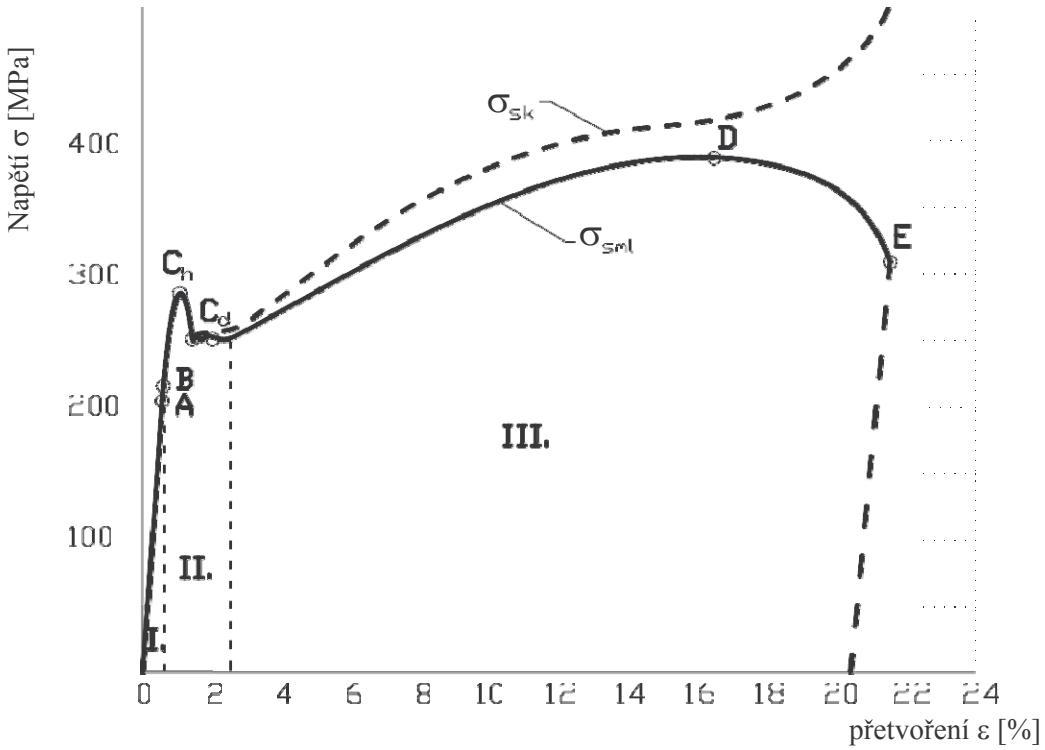
Základy teorie plasticity

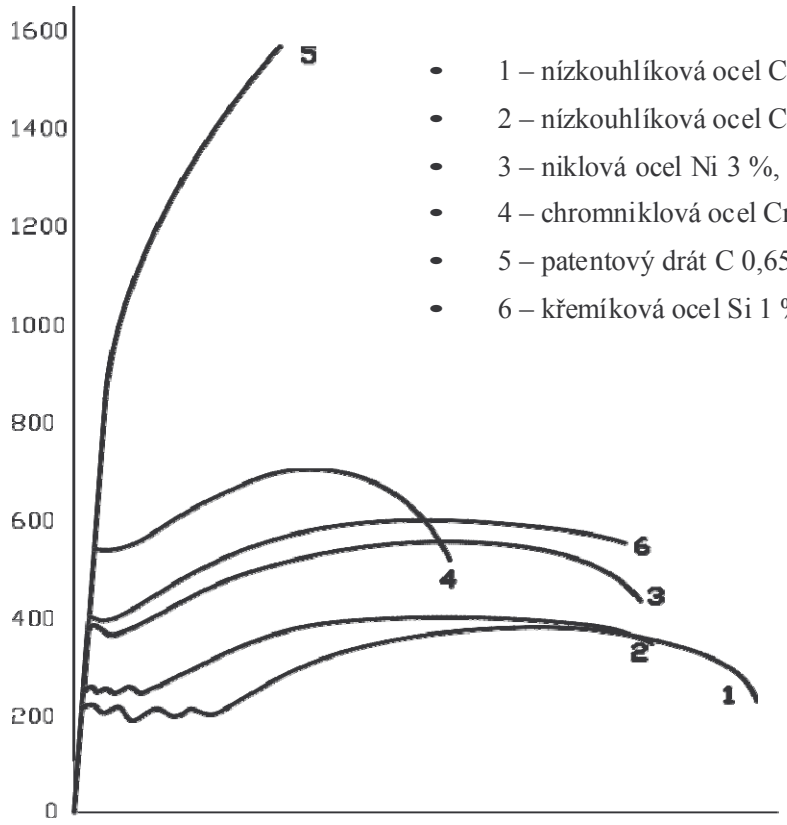
- **Pružnost** je schopnost materiálu pružně se deformovat vlivem silových účinků.
- Plasticita je vlastnost materiálu trvale se deformovat, přičemž velikost plastické deformace není možné přesně vyjádřit jako závislost na velikosti silových účinků, protože při následném zatížení se materiál deformuje jiným způsobem než při předcházejícím zatížení. Ocel se pro určité hladiny zatížení chová jako pružná a nad těmito hladinami jako plastická nebo pružně-plastická.
- Pevnost materiálu je schopnost odolávat napětí, tj. zachovávat celistvost a soudržnost až po určitou hladinu napětí, nad kterou se materiál porušuje.

Pružné těleso (též elastické těleso) je takové těleso, které se působením vnější síly deformuje, ale po odstranění této síly se vrací do původního tvaru a velikosti. Tělesa, která se po odstranění vnější síly nevrátí do původního tvaru, se označují jako plastická (nepružná).

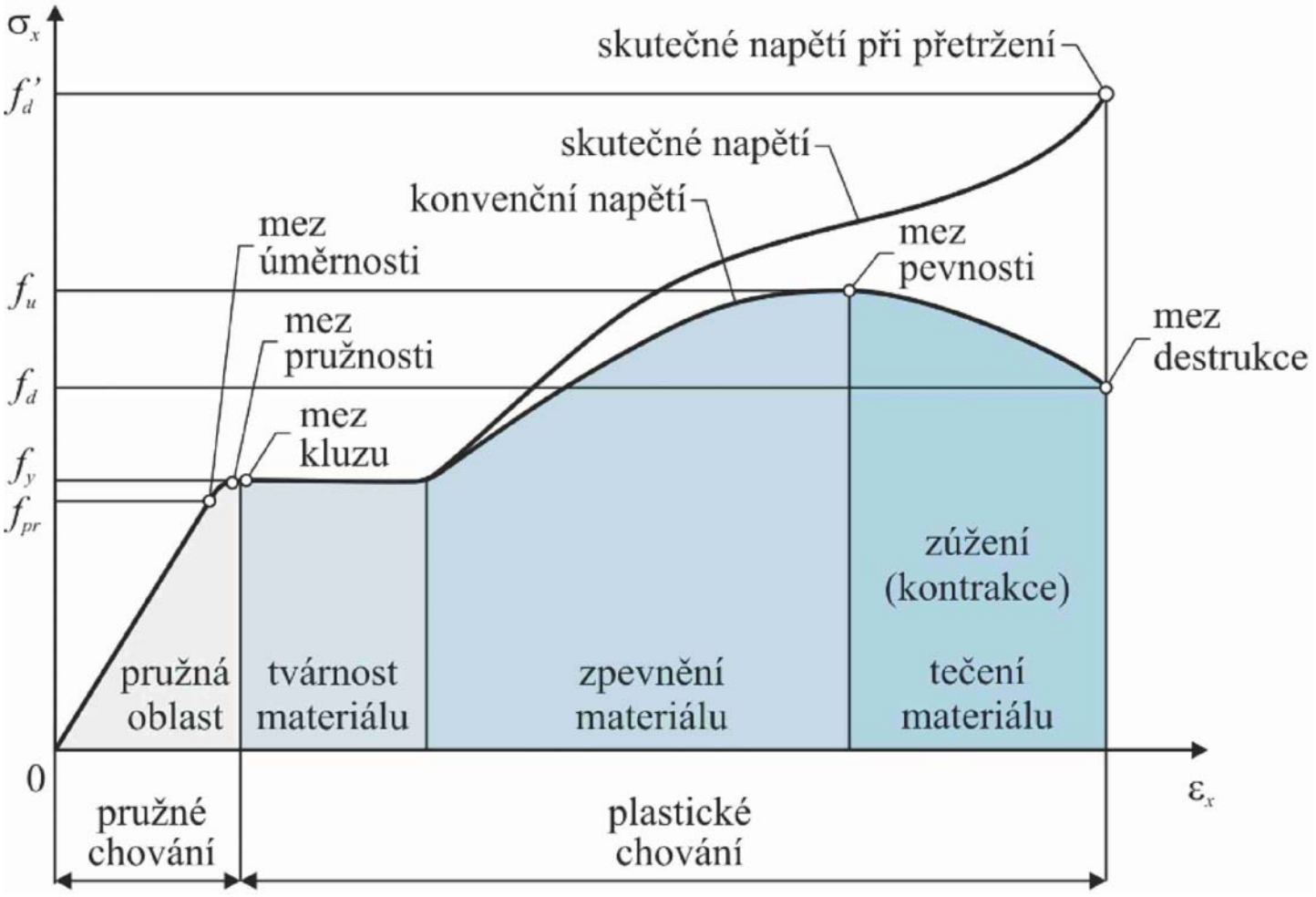


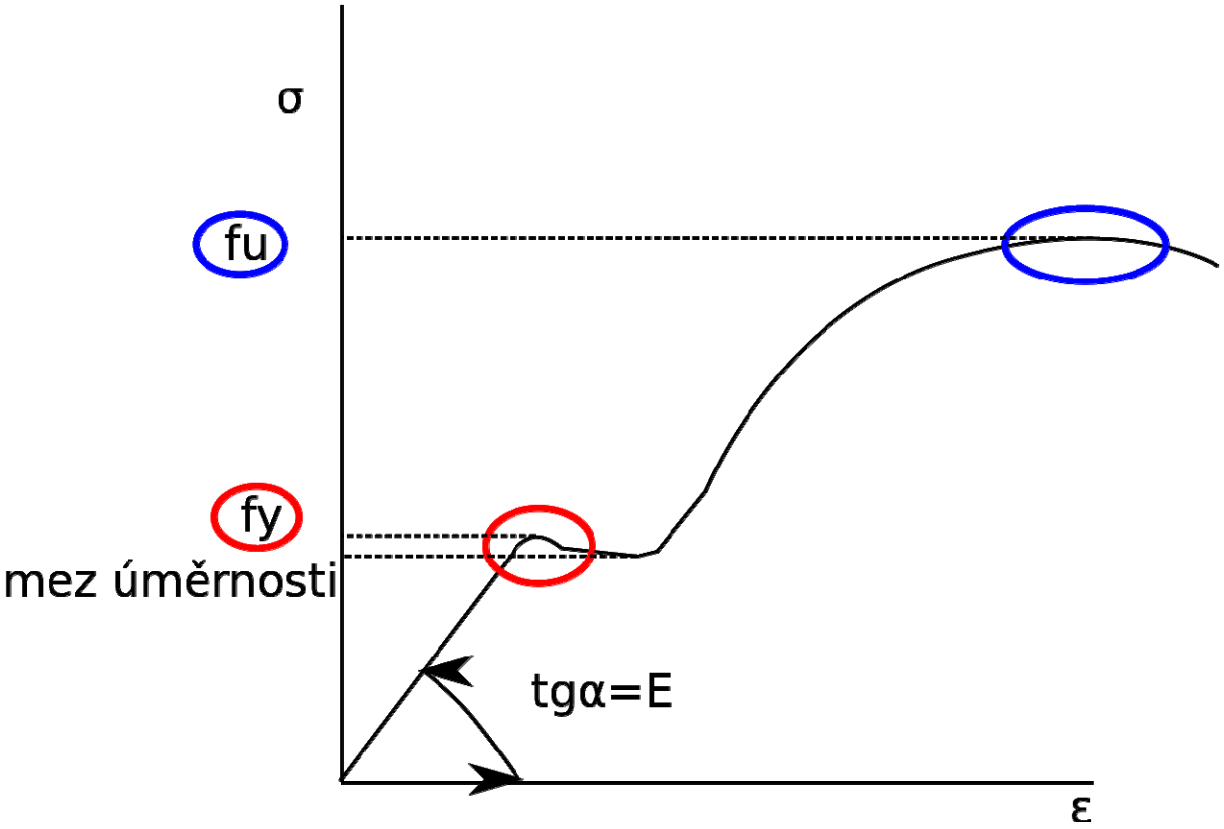
Obr. Smluvní a skutečný pracovní diagram oceli
A - mez úměrnosti, B - mez pružnosti, C_h, C_d – mez kluzu – horní , dolní , D – mez pevnosti, E – mez porušení, I – pružná oblast, II – plastická oblast, III – oblast zpevnění.

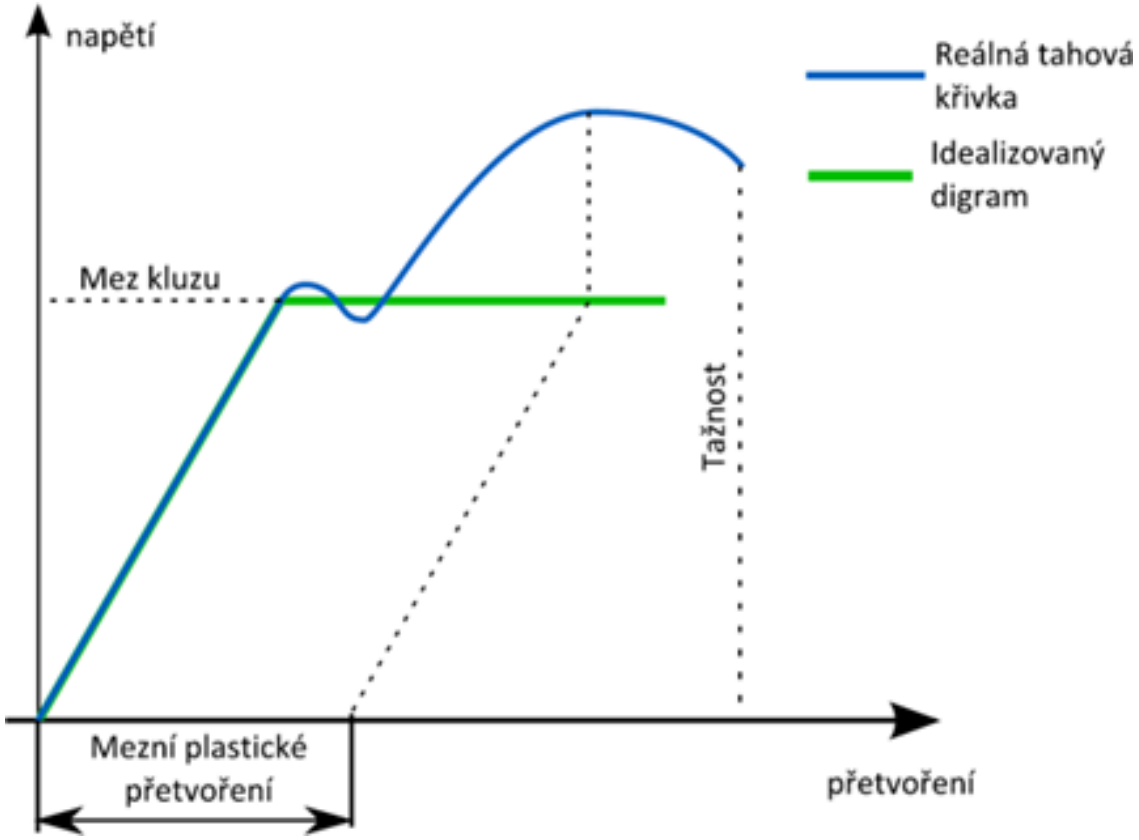
https://www.youtube.com/watch?v=ipDZska5VN4



- 1 – nízkouhlíková ocel C 0,1 %,
- 2 – nízkouhlíková ocel C 0,2 %,
- 3 – niklová ocel Ni 3 %,
- 4 – chromniklová ocel Cr + Ni 3 %,
- 5 – patentový drát C 0,65 %,
- 6 – křemíková ocel Si 1 %

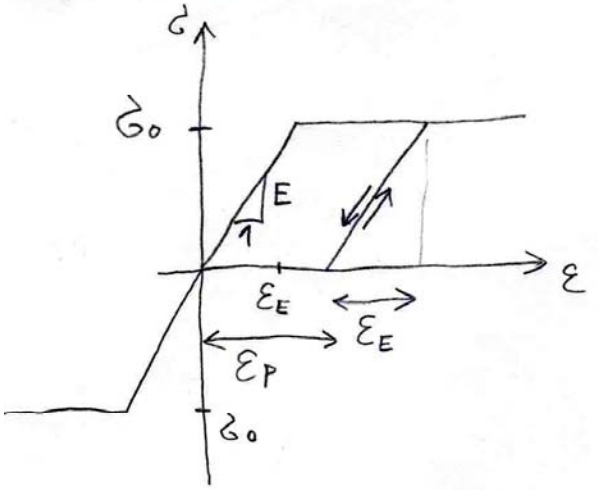



σ
fu
fy
mez úměrnosti
tgα=E
ε


napětí
Reálná tahová křivka
Idealizovaný digram
Mez kluzu
Tažnost
Mezní plastické přetvoření
přetvoření

Základy teorie plasticity

Ideální pružnoplastický materiál (bez zpevnění)



σ_0 ... mez kluzu

Při dosažení mezního napětí σ_0 zůstává již dále napětí konstantní i při růstu ε.

ε_P ... nevratná tvárnost protažení.

Podmínky plasticity

Obecná funkce plasticity $f = \sigma^2 - \sigma_0^2 = 0$

$f < 0$ ... materiál se chová pružně

$f > 0$ ... není možné

U laboratorních zkoušek lze formulovat dvě základní námitky:

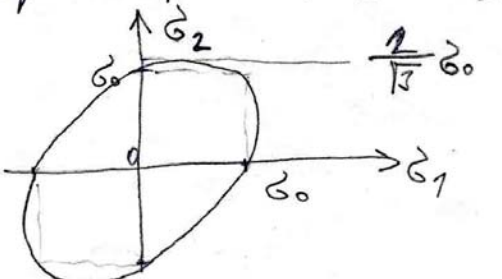
Misesova podmínka plasticity

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_0^2 = 0$$

kde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou hlavní napětí při prostorové napjatosti

Pro rovinnou napjatost lze vztah zjednodušit:

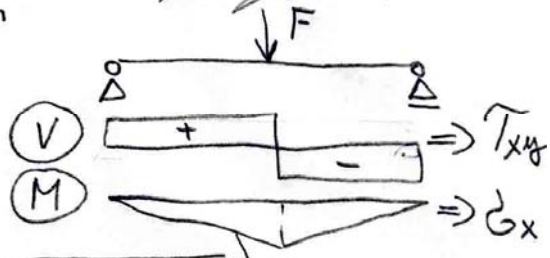
$$f = \sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2 \quad \text{... rovnice elipsy}$$



body uvnitř elipsy ... pružný stav

V případě, že působí pouze jedna složka norm. napětí a napětí τ lze rozpat. užitím vztahů pro hlavní napětí:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$$

$$\left(\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right) + \left(\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\sigma_x^2}{4} + 2\frac{\sigma_x}{2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} + \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2\right)\right) +$$

$$\frac{\sigma_x^2}{4} - 2\frac{\sigma_x}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2} + \tau_{xy}^2} + \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 =$$

$$= \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_0}$$

Trescova podmínka plasticity
(podmínka maximálních smykových napětí)

Pro dvojosou napjatost $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

$$f = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_0^2 = 0$$

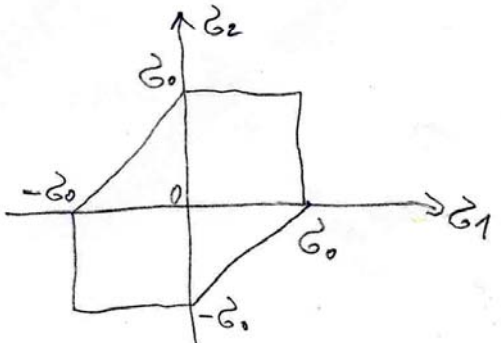
Pro dvojosou napjatost $\sigma_3 = 0$

$$f = \max\left\{\sigma_1^2 - \sigma_0^2 ; \sigma_2^2 - \sigma_0^2\right\} = 0$$

$\sigma_1 ; \sigma_2 > 0$

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_0^2 = 0$$

$\sigma_1 ; \sigma_2 < 0$





Mezní plastická únosnost průřezu

1) Osový tah a tlak

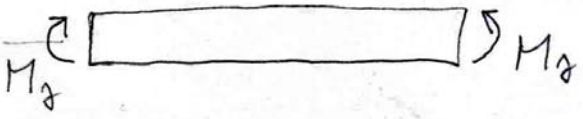
Ke plastizování dochází dojde současně

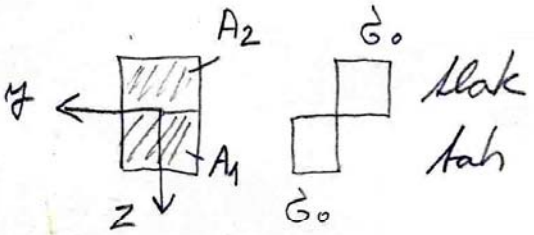
$N_0 = A \cdot \sigma_0$

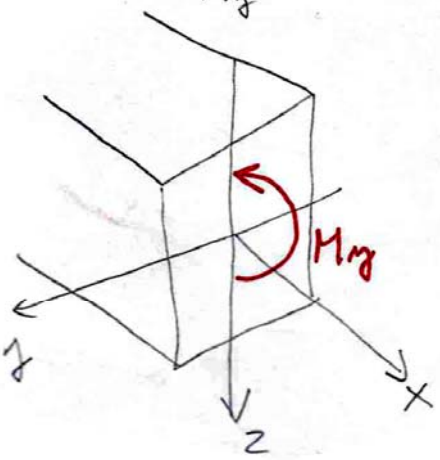


Dostředně tažený nebo tlačený prut nemá žádnou rezervu únosnosti.

2) Prostý ohyb





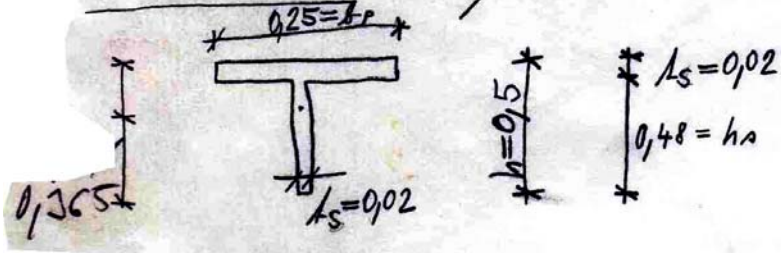


$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \, dA = f_y \cdot \int_{A_1} z \, dA -$$

$$- f_y \cdot \int_{A_2} z \, dA = f_y \cdot (S_{1y} - S_{2y}) =$$

$$= 2 \cdot S_{1y} \cdot f_y$$

Příklad 2: Určete mezní plastický moment



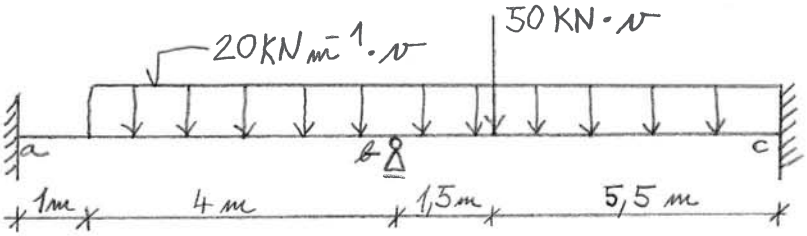
$A_{tažené} = A_{tlačené} = \frac{A}{2}$ $\Rightarrow$ $z_{ob} = ?$

$t_s \cdot z_{od} = t_s \cdot (h_s - z_{od}) + b_p \cdot t_s \Rightarrow z_{od} = 0{,}365\ m$

$W_0 = S_1 + S_2 = 2{,}0895 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$M_0 = 250 \cdot 10^3 \cdot 2{,}0895 \cdot 10^{-3} = 522{,}375\ kNm$

Příklad: Vyřešte daný nosník a stanovte mezní zatížení při němž se z nosníku stane mechanismus a zřítí se.



$M_o = 80$ KNm ... ... mezní moment při němž průřez vyplastizuje.

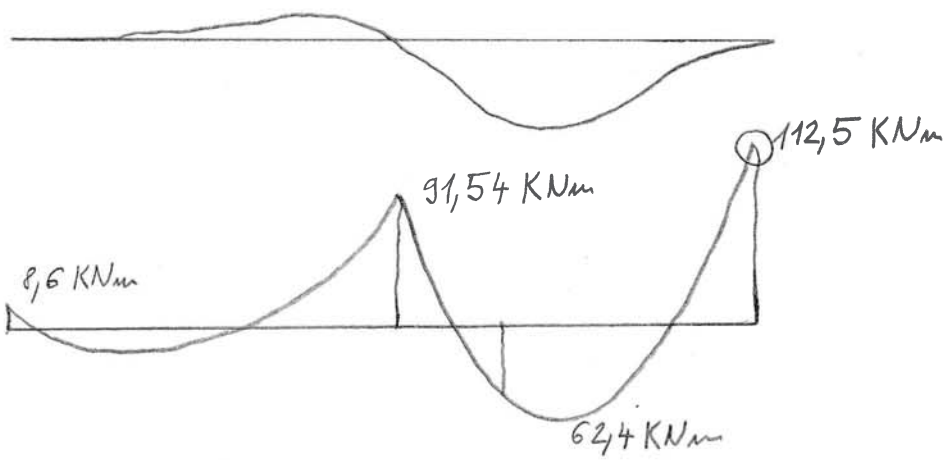
Uvažujme konstrukci s jednoparametrickým zatížením zatížením přenáším na obyč. Výpočet mezního zatížení při němž se z konstrukce stane mechanismus provádíme buď

a) postupným řešením (od prutového až k mezním stavu)

b) analýzou posledních fází kdy se konstrukce již změnila v mechanismus. Jedná se o tzv. statickou či kinematickou větu.

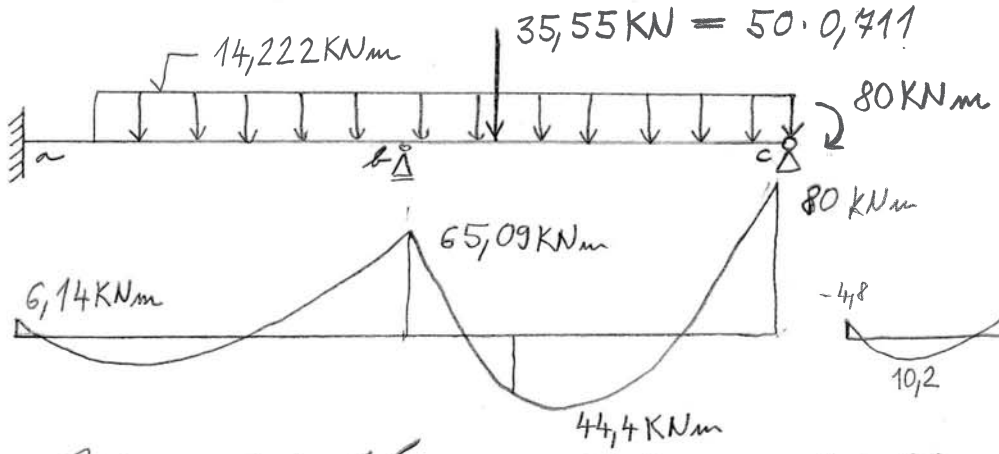
ad a) postupným řešením

0. stav ... zvolíme $\nu = 1$ a stanovíme průběh momentů



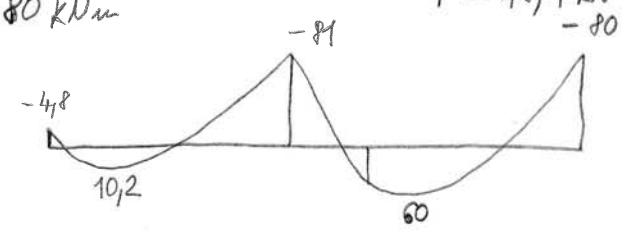
Ve styčníku c vznikne první plastický kloub při velikosti zatížení $\nu_1 = \frac{80}{112,5} = 0,711$ ... 1 stav

1. stav



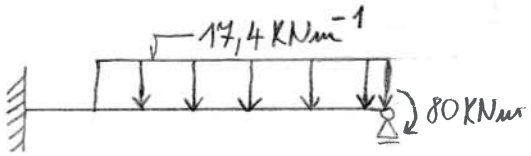
pro $q = \cancel{17,4\,kNm^{-1}}$ 17,4

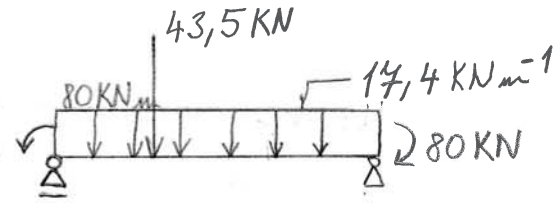
F = 43,4 kN



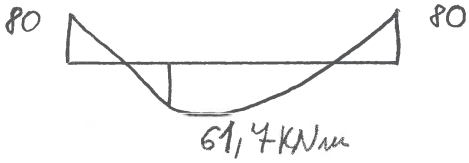
Při zatěžování zůstává ve styčníku c pl. tlaub a vytváří se ve styčníku b a to při intenzitě zatížení $\frac{17,4}{14,22} \cdot 0,711 = 0,87$ ... 2 stav

2. stav

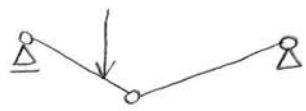


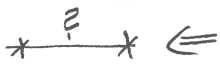






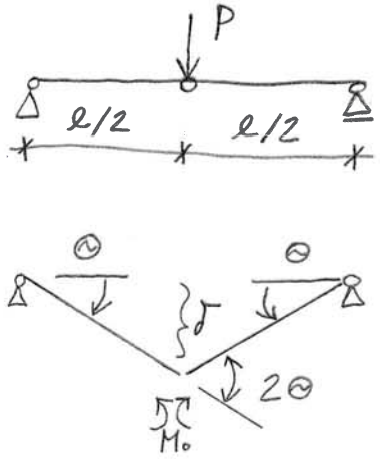
Z nosníku vznikne mechanizmus při intenzitě zatížení ztruto $\frac{v_2 \cdot 80}{62,4} = v_2 \cdot 1,28$ násobku původního zatížení.





⇐ nutno dopočítat polohu!

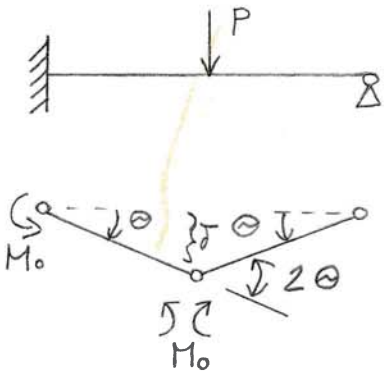
ad b) Kinematický způsob zjištění únosnosti:

① 

$P \cdot \delta = M_0 \cdot 2\Theta$ $\quad tg\,\Theta \doteq \Theta = \frac{2\cdot\delta}{l}$

$P \cdot \delta = M_0 \cdot 4 \cdot \delta / l$

$M_0 = \frac{P_0 \cdot l}{4} \Rightarrow P_0 = \frac{4 \cdot M_0}{l}$

② 

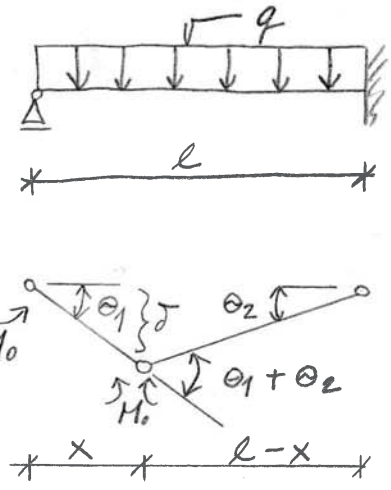
$P \cdot \delta = M_0 \cdot (\Theta + 2\Theta) = M_0 \cdot 3\Theta$

$tg\,\Theta \doteq \Theta = \frac{2\cdot\delta}{l} \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta = \frac{\Theta \cdot l}{2}$

$P \cdot \frac{\Theta \cdot l}{2} = M_0 \cdot 3\Theta \Rightarrow$

$\Rightarrow P_0 = \frac{6 \cdot M_0}{l}$

③ 

Kin. věta: Ze všech řešení x realizuje $\frac{dq}{dx} = 0$

$q \cdot \delta \cdot l \cdot \frac{1}{2} = M_0 \cdot (\Theta_1 + 2\Theta_2)$

$\Theta_1 = \frac{\delta}{x} \qquad \Theta_2 = \frac{\delta}{l-x}$

$q \cdot \delta \cdot l \cdot \frac{1}{2} = M_0 \cdot \left(\frac{\delta}{x} + \frac{2\cdot\delta}{l-x}\right)$

$q = \frac{2M_0}{l} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{l-x}\right) =$

$= \frac{2M_0}{l} \cdot \frac{l-x+2x}{x\cdot(l-x)} = \frac{l+x}{x\cdot(l-x)} \cdot \frac{2M_0}{l}$

$\frac{dq}{dx} = \frac{x\cdot(l-x) - (l+x)\cdot(l-2x)}{[x\cdot(l-x)]^2} = 0 \Rightarrow x_{12} =$

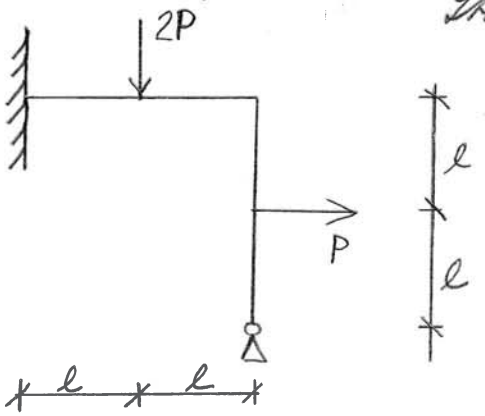
$l \cdot x - x^2 - l^2 + 2lx + 2x^2 = 0$

$x^2 + 2lx - l^2 = 0 \Rightarrow x_{12} = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 + 4l^2}}{2} =$

$x = (\sqrt{2} - 1)\cdot l$

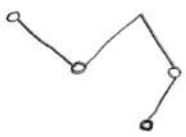
$= \frac{-2l \pm \sqrt{8}\cdot l}{2} = l \cdot (-1 \pm \sqrt{2}) =$

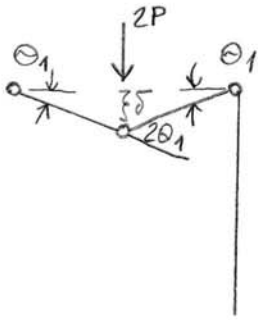
Příklad: Hledáme mezní zatížení na rámu.
Hledáme reakce u rozhodujícího mechanismu.



1) 

2) 

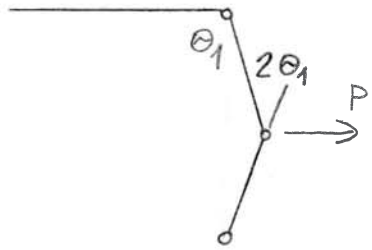
3) 

1) 

$$\Theta_1 = \frac{\delta}{l}$$

$$2 \cdot P \cdot \delta = M_0 \cdot (2\Theta_1 + \Theta_1 + \Theta_1)$$

$$P_1 = 2\,\frac{M_0}{l}$$

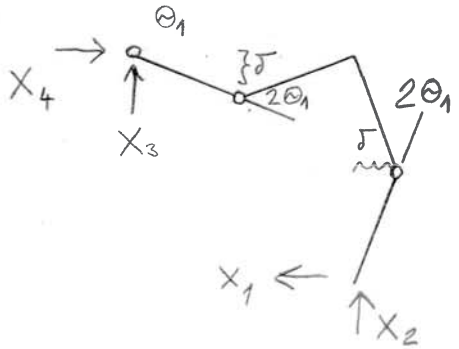
2) 

$$P \cdot \delta = M_0 \cdot (2\Theta_1 + \Theta_1)$$

$$P \cdot \delta = M_0 \cdot 3 \cdot \frac{\delta}{l}$$

$$P = 3 \cdot \frac{M_0}{l}$$

3) Kombinovaný mechanismus



$$2 \cdot P \cdot \delta + P \cdot \delta = M_0 \cdot (\Theta_1 + 2\Theta_1 + 2\Theta_1)$$

$$3 \cdot P \cdot \delta = M_0 \cdot 5 \cdot \frac{\delta}{l}$$

$$P_3 = \frac{5}{3} \cdot \frac{M_0}{l} = 1{,}666\ \frac{M_0}{l}$$

$$X_1 = \frac{M_0}{2}$$

$$\min\{P_1; P_2; P_3\} = P_3 = 1{,}666\,\frac{M_0}{l}$$

Kinematická věta: Mezní plastické zatížení se vyjádří: Ze všech možných kinematicky přípustných mechanismů má mezní ztrátu zatížení je hledaná, skutečné mezní zatížení je to, které dává nejmenší hodnotu zatížení.