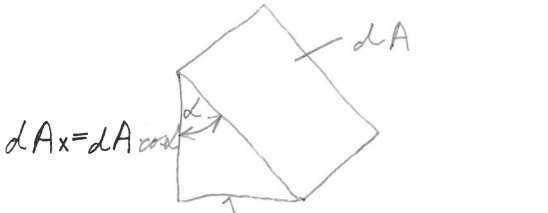
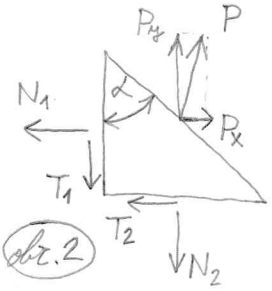
Hlavní normálové napětí

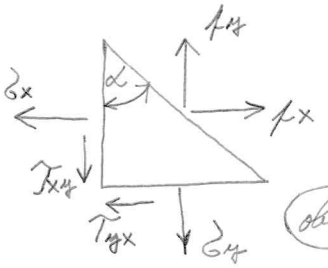
V každém bodě tělesa existují 3 kolmé plošky, kde $\sigma_n = \sigma$; $\tau = \phi$, kde σ_1, σ_2 extrém. Říkáme



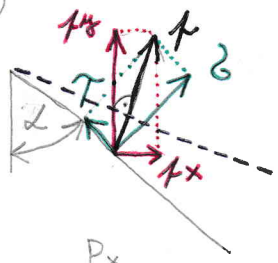
obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

$$f^2 = \sigma^2 + \tau^2$$
$$f^2 = f_x^2 + f_y^2$$

f ... obecný vektor napětí
σ ... normálové napětí
τ ... smykové napětí
f_x ... napětí ve směru osy x
f_y ... napětí ve směru osy y

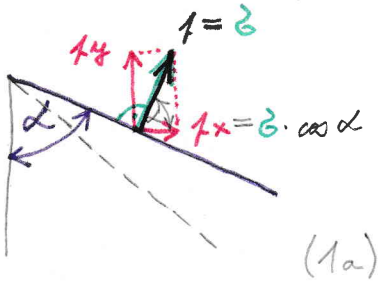
$$f_x = \frac{P_x}{dA} \qquad f_y = \frac{P_y}{dA}$$

Z obr. 2 → $P_x = N_1 + T_2$
$P_y = N_2 + T_1$

Z obr. 3, 4 $f_x \cdot dA = \sigma_x \cdot dA \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot dA \cdot \sin\alpha$
$f_y \cdot dA = \tau_{xy} \cdot dA \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot dA \cdot \sin\alpha$

$f_x = \sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha$
$f_y = \tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha$

Hledáme úhel α pro nějž $\tau = 0$
kdy $f = \sigma$ (viz obr. 4) kdy $f_x = f \cdot \cos\alpha = \sigma \cdot \cos\alpha$



(1) $\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \cos\alpha = 0$
$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \sin\alpha = 0$

(1a) $$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & ; & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & ; & \sigma_y - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ $\sigma = fce(\alpha)$;

U úhlu α jsme rozdíl předpoklad, že je to takový úhel, u kterého na plošce dA platí, že $\tau = 0$! U soustavy rovnic (1a) neexistuje řešení $\cos\alpha = 0 \cap \sin\alpha = 0$. Je tedy nutno hledat hodnotu σ (různou od α) tak, aby rovnice (1a) byly lineárně závislé....

$1x + 2y = 0$
$2x + 4y = 0$ } ∞ mnoho řešení

Je tedy nutno, aby $\det = 0$.

(2) $\det = (\sigma_x - \sigma) \cdot (\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = \sigma^2 - \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y)}_{I_1} \cdot \sigma + \underbrace{(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2)}_{I_2} = 0$

$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0$$

$$\sigma_{12} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2}$$

(3) $$\sigma_{1,2} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Z rovnice (3) určíme velikost hl. napětí σ_1, σ_2
Dosadíme σ_1 do první rovnice a dostaneme
pro poměr $\sin\alpha_1 / \cos\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$

(4)
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$ kde σ_1 nemáme z (3)

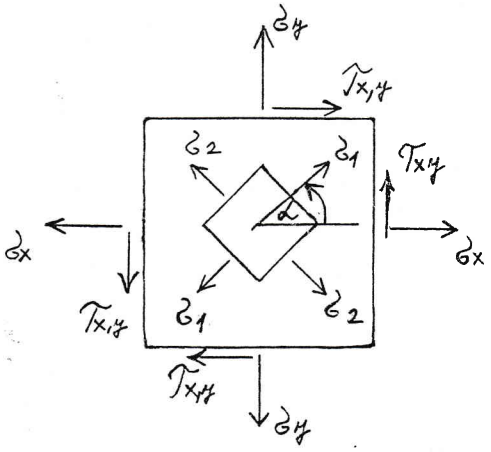
obdobně σ_2 do první rovnice

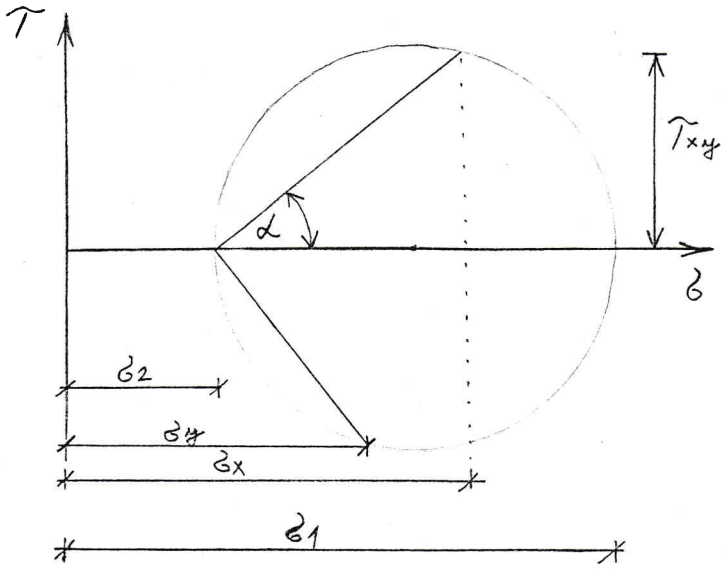
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Z druhé rovnice

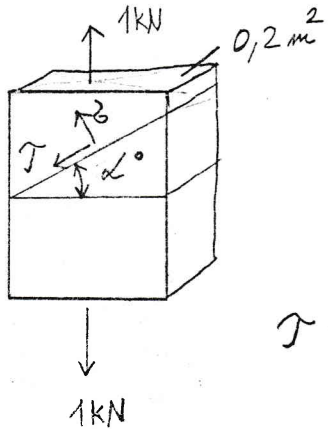
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

Z rovnic (4) určíme hlavní směry napětí.
Vztah (2) lze chápat jako rovnici kružnice,
zvané Mohrova kružnice. Mohrova kružnice
poskytuje grafické řešení transformace kartézských
napětí pro rovinnou napjatost, tj. dovoluje
ze známých složek napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ určit
velikost a směry hlavních napětí (viz. Odo
Pružnost a plasticita I).





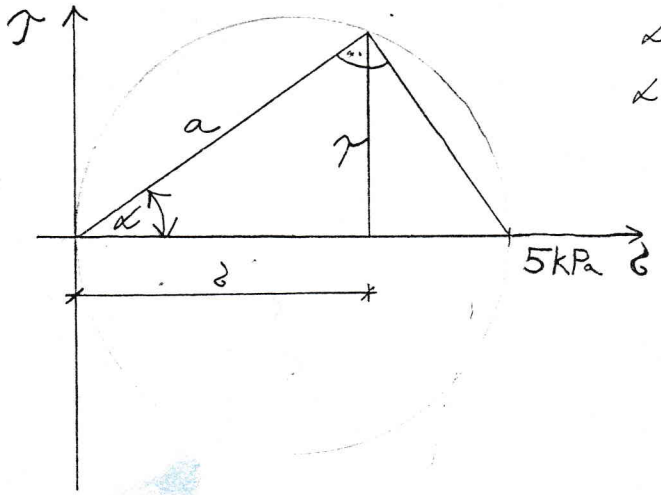
Příklad: Zobrazte normálové a smykové napětí v tělese na řezu vedeném pod úhlem α a to graficky pomocí Mohrovy kružnice. Za pomoci náčrtu proveďte výpočet.



$$\sigma_1 = \frac{1\,kN}{0{,}2\,m^2} = 5\,kPa$$

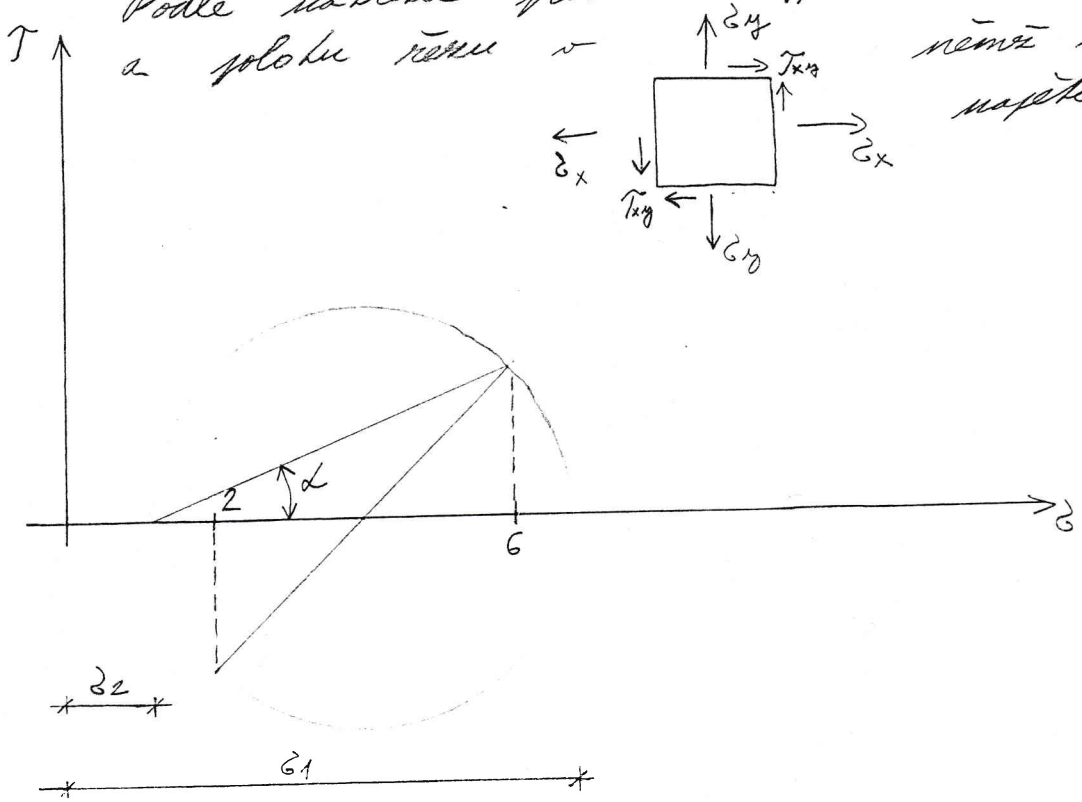
$$\sigma_2 = 0\ kPa$$

$\alpha_1 = 15°$
$\alpha_2 = 40°$
$\alpha_3 = 38°$



$a = 5\,kPa \cdot \cos\alpha° = 4{,}09576\,kPa$	$3{,}830222\,kPa$	$3{,}940054\,kPa$
$\sigma = a \cdot \cos\alpha° = 3{,}355\,kPa$	$2{,}99412\,kPa$	$3{,}104804\,kPa$
$\tau = a \cdot \sin\alpha = 2{,}349\,kPa$	$2{,}462019\,kPa$	$2{,}425439\,kPa$
15°	40°	38°

Příklad: Graficky určete velikost hlavních napětí pokud víte, že v elementu tělesa je napětí $\sigma_x = 6\ kPa$, $\sigma_y = 2\ kPa$, $\tau_{xy} = 2\ kPa$. Podle nákresu proveďte výpočet velikostí hl. napětí a poloh řezů v nichž je řečné napětí nulové.



$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \quad \dots \text{ poloha středu pokud } \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} =$$

$$= \frac{6+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6-2}{2}\right)^2 + 2^2} = \begin{cases} 6,82843 \\ 1,17154 \end{cases}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1-\sigma_y} = \frac{2}{6,82843-2} = 0,41421$$

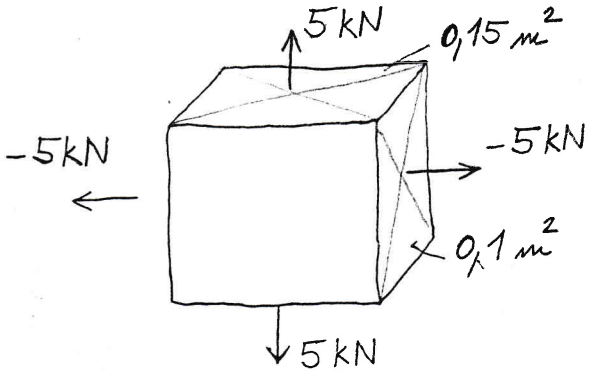
$$\alpha = 22,5^\circ$$

kontrola ze vzorce (2)

$$(\sigma_x-\sigma)\cdot(\sigma_y-\sigma) - \tau_{xy}^2 = 0 = det$$

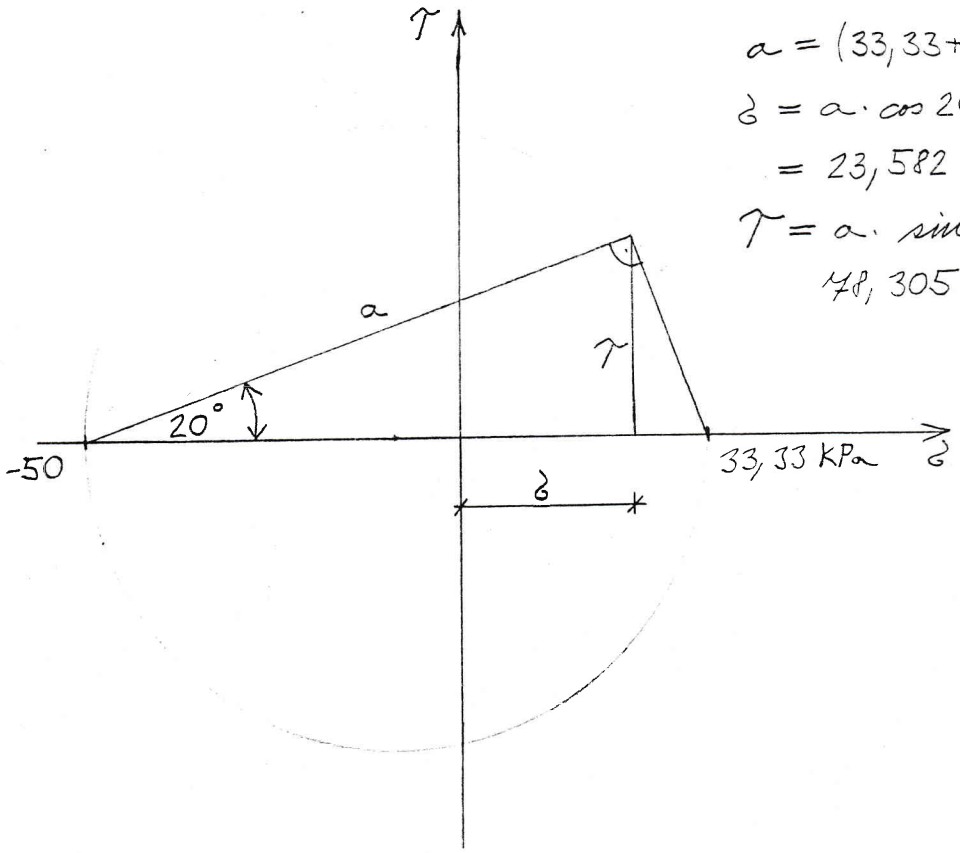
$$\left.\begin{array}{l}(6-6,82843)\cdot(2-6,82843) - 2^2 = 0 \\ \text{nebo } (6-1,17154)\cdot(2-1,17154) - 2^2 = 0\end{array}\right\} \dots \text{správně}$$

Příklad: Určete normálové a smykové napětí v řezu pod úhlem 20° na tělese namáhaném dle obr.



$$\sigma_2 = \frac{-5\,kN}{0{,}1\,m^2} = -50\ kPa$$

$$\sigma_1 = \frac{5\,kN}{0{,}15\,m^2} = 33{,}33\ kPa$$



$a = (33{,}33 + 50) \cdot \cos 20° = 78{,}305\,k$

$\sigma = a \cdot \cos 20° - 50 =$

$= 23{,}582\ kPa$

$\tau = a \cdot \sin 20° =$

$78{,}305 \cdot \sin 20° = 26{,}782\ kPa$

$$\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma_1 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{7-6}{2} = \frac{1}{2} \qquad \alpha_1 = 26{,}57$$

$$\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma_2 \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}} = \frac{2-6}{2} = -2 \qquad \alpha_2 = -63{,}43$$

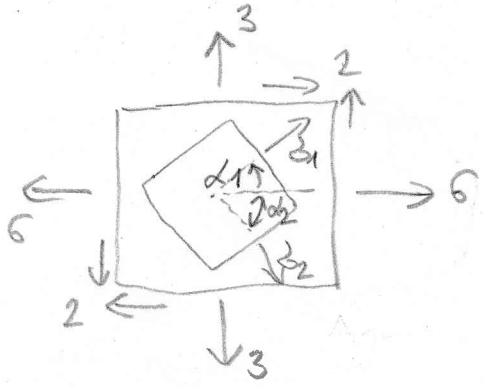
$$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma_1 \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{2}{7-3} = \frac{1}{2} \qquad \alpha_1 = 26{,}57$$

$$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma_2 \cdot \sin\alpha = 0$$

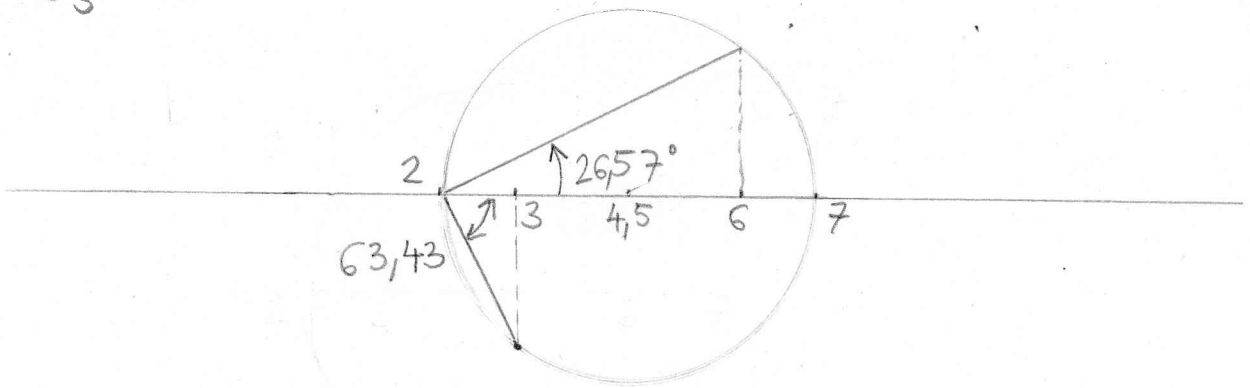
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y} = \frac{2}{2-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\alpha_2 = -63{,}43$$



$$\sigma_{1,2} = \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix}$$

$$\sigma_x = 6$$
$$\sigma_y = 3$$
$$\tau_{xy} = 2$$



$$\sigma^2 - I_1 \sigma + I_2 = 0$$

$$\sigma_{12} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2}$$

(3) $$\sigma_{1,2} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4 \cdot I_2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4 \cdot (\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2}$$

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Z rovnice (3) určíme velikost hl. napětí σ_1, σ_2
Dosadíme σ_1 do první rovnice a dostaneme
pro poměr $\sin\alpha_1 / \cos\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$

(4)
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$ kde σ_1 nemáme z (3)

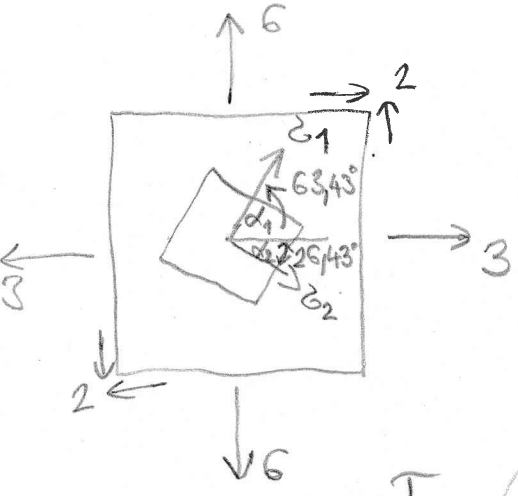
odvodíme σ_2 do první rovnice

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\sigma_2 - \sigma_x}{\tau_{xy}}$$

Z druhé rovnice

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} \qquad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y}$$

Z rovnic (4) určíme hlavní směry napětí.
Vztah (2) lze chápat jako rovnici kružnice,
zvané Mohrova kružnice. Mohrova kružnice
poskytuje grafické řešení transformace tenzoru
napětí pro rovinnou napjatost, tj. dovoluje
ze známých složek napětí $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ určit
velikost a směry hlavních napětí (viz. Orta
Pružnost a plasticita I).



$\sigma_{1,2} = \frac{7}{2}$

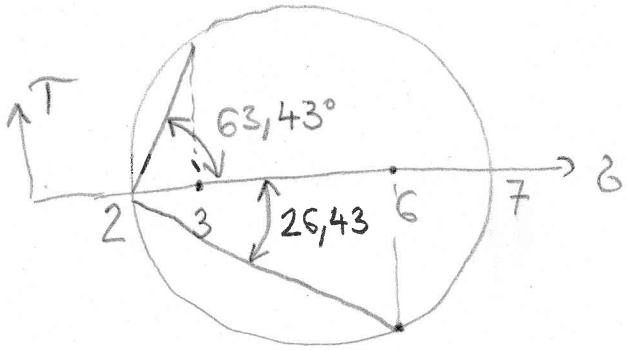
$\alpha_1 = 63,43°$

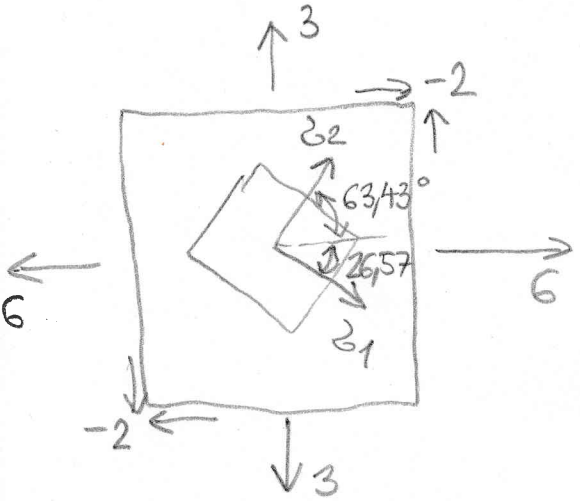
$\alpha_2 = -26,57°$

$\sigma_x = 3$

$\sigma_y = 6$

$\tau_{xy} = 2$





$\sigma_{1,2} = \frac{7}{2}$

$\alpha_1 = -26,57°$

$\alpha_2 = 63,43°$

$\sigma_x = 6$

$\sigma_y = 3$

$\tau_{xy} = -2$

