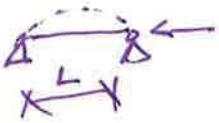
BD002
PRUŽNOSŤ A PEVNOSŤ

Zdeněk Kala

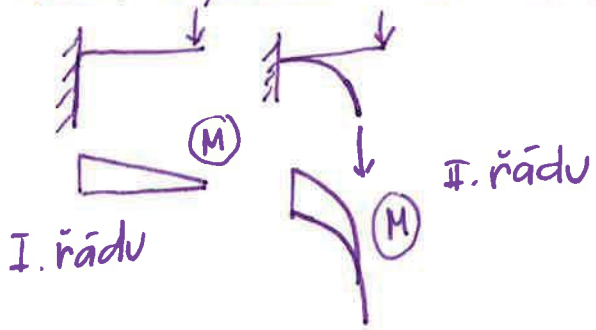
zimný semester 2017/2018

PRUŽNOST A PEVNOST

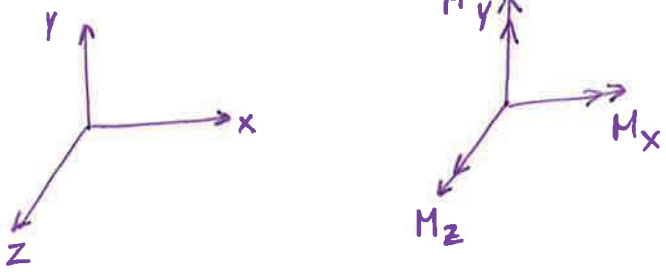
- napětí
- deformace
  - stabilita



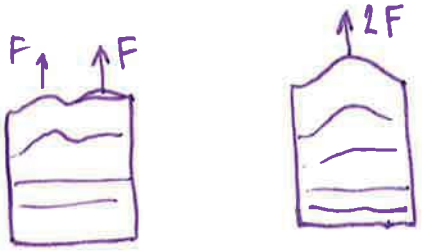
- pevnost - schopnost odporovat vnějším vlivům bez porušení
  - homobilní t. - stejné mechanické vlastnosti
  - izotropní t. - stejné mechan. vlastnosti ve všech směrech
  - malá a pružná deformace (nevnikají trvalé deformace)



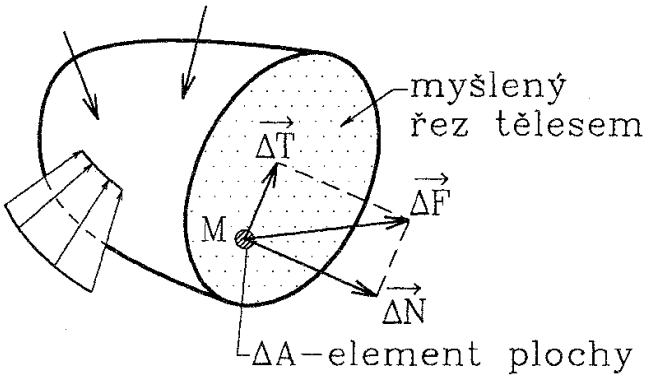
- vždy budeme předpokládat statické zatížení
- počáteční napjatost - předpokládáme 0



Saint Venantův princip lokálnosti



shodné deformace a napětí



$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

• normálové napětí

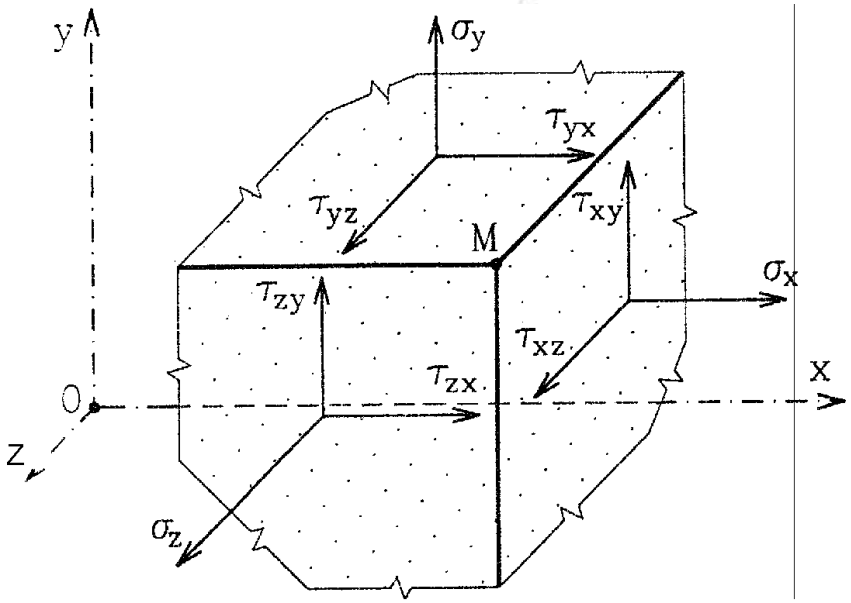
$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} \quad [N/m^2 = Pa]$$

• smykové napětí

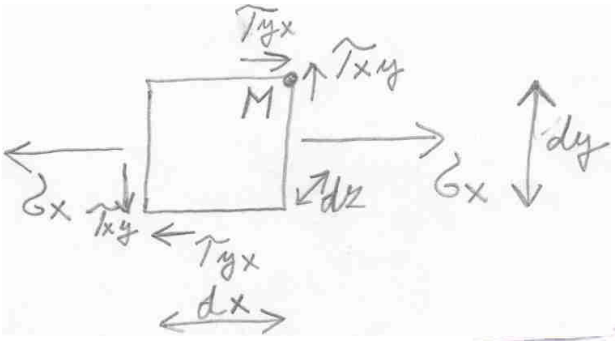
$$\tau = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} \quad [Pa] \quad [MPa]$$

Vzor napjatosti

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$



Věta o vzájomnosti smyk napětí



$$\Sigma M_z = 0$$

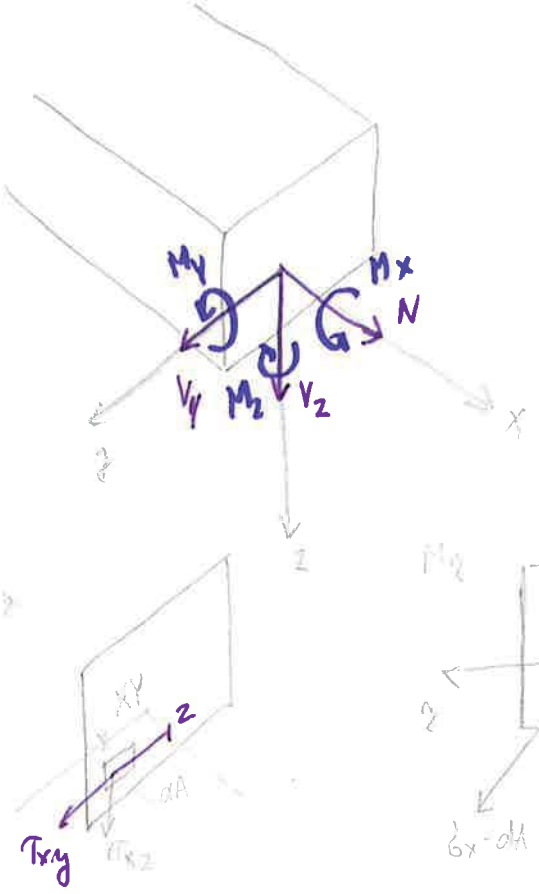
$$\sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dz}{2} - \sigma_x \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dy}{2}$$

F_x ... $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$

$$\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz \cdot dx - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0$$

$\tau_{xy} \cdot dy \cdot dz$ ... smyk síla

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$



$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA \qquad M_x = \int_A (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z)\, dA$$

$$V_y = \int_A \tau_{xy} \cdot dA \qquad M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} \cdot dA \qquad M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA$$

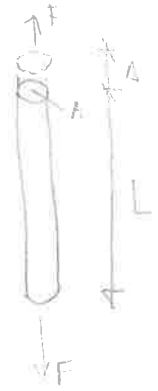
poměrné přetvoření

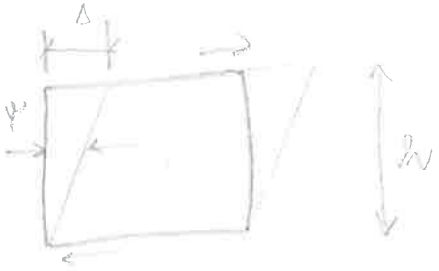
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l + \Delta l}$$

$$l + \Delta l \approx l$$

$$\sigma_n = \frac{F}{A}$$

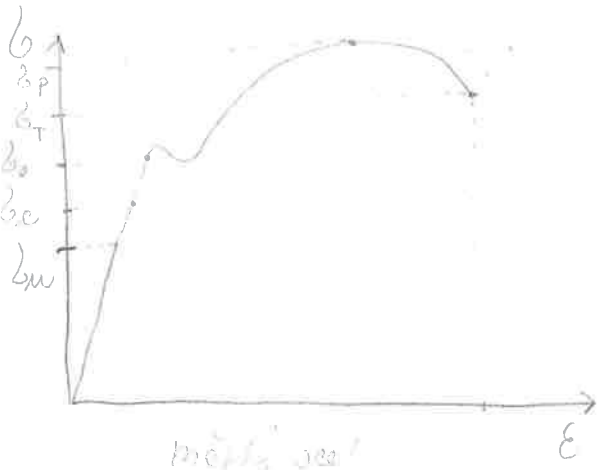




$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta}{h}$$

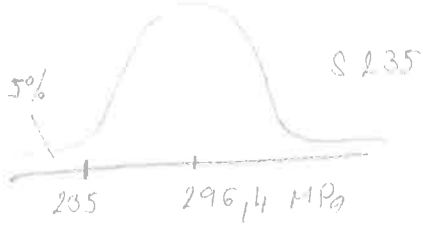
$$\gamma \approx \frac{\Delta}{h}$$

PRACOVNÍ DIAGRAM MATERIÁLU



mez kluzu f_y

S 235	f_y	= 235 MPa
S 355	f_y	= 355 MPa
S 420	f_y	= 420 MPa

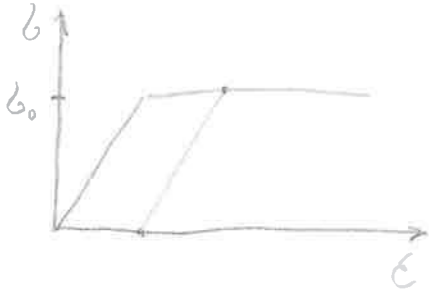


Hookův zákon (1676)

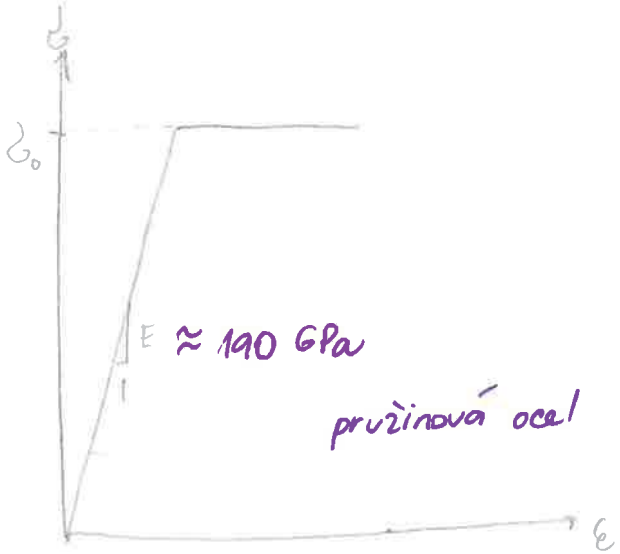
$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

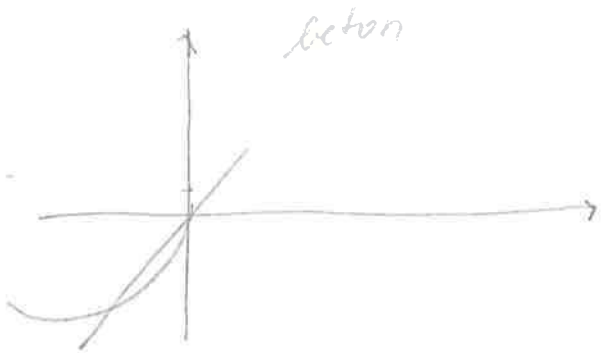
$$\tau = G \cdot \gamma$$

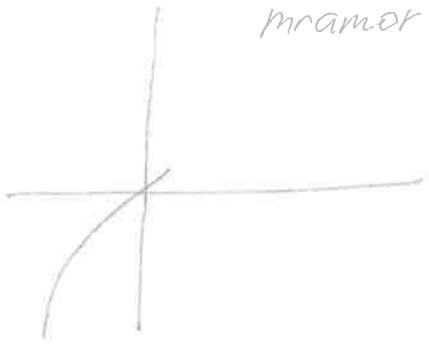
Idealizace

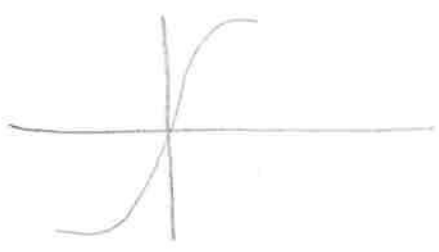


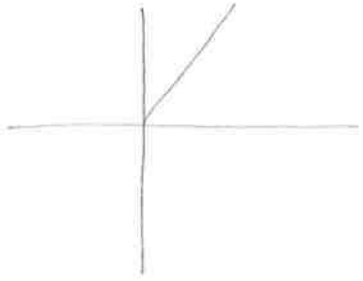






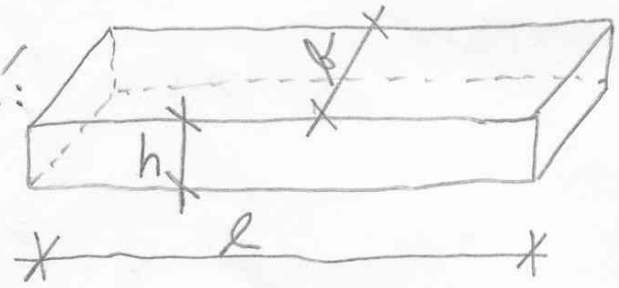






S 235 $E = 210\,GPa$

před deformací:

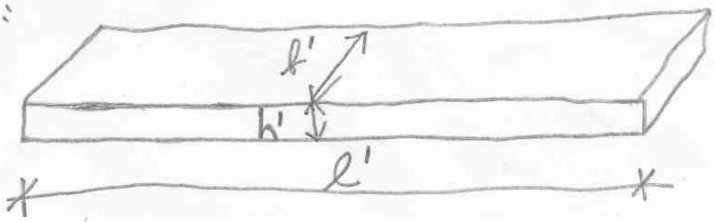


$l' > l \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{l} = \frac{l'-l}{l}$

$b' < b \quad \varepsilon' = \frac{\Delta}{b} = \frac{b'-b}{b}$

$h' < h \quad \varepsilon' = \frac{\Delta}{h} = \frac{h'-h}{h}$

po deformaci tahem:



Poissonův součinitel: $\boxed{\mu = \frac{-\varepsilon'}{\varepsilon}}$

$0 \leq \mu \leq 0{,}5$

↑ korek ↑ pryž

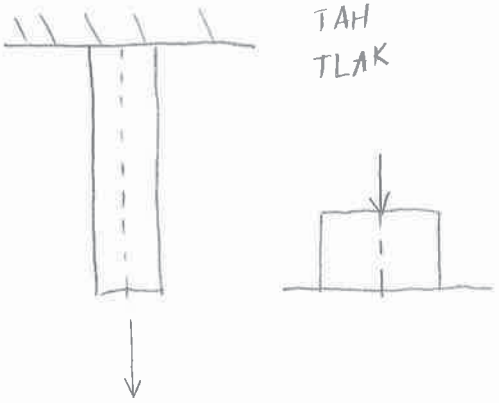
ocel $\mu = 0{,}3$

beton $\mu = 0{,}15 - 0{,}2$

pro izotropní látku

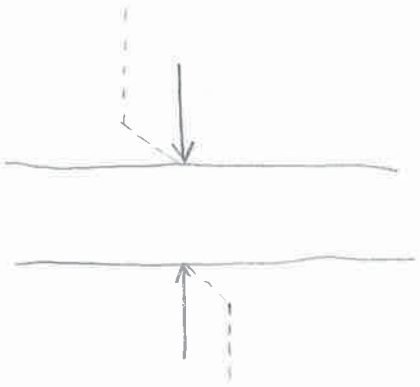
$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}$$

26.9.2017



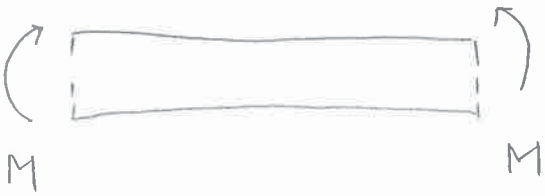
TAH
TLAK

PROSTÝ SMYK

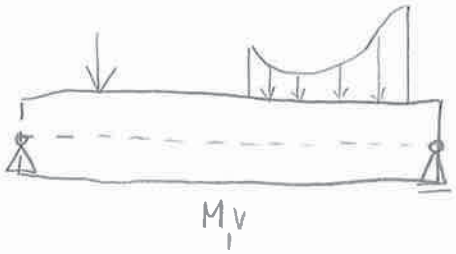




PROSTÝ OHYB

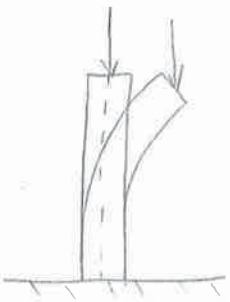


PŘÍČNÝ OHYB



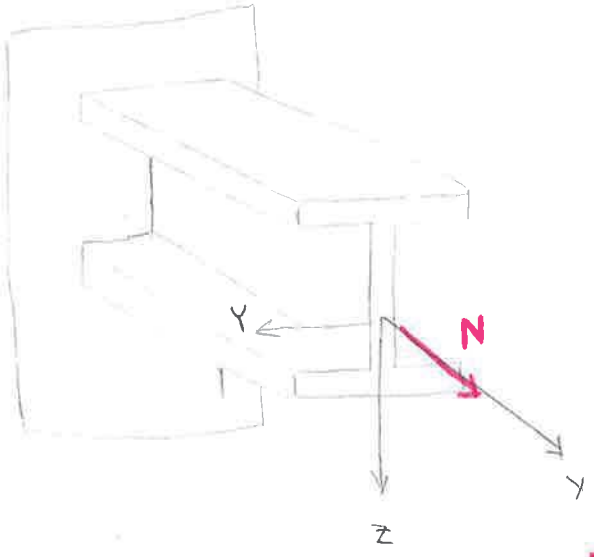
PROSTÉ KROUCENÍ





STABILITA
(VZPĚR)

PROSTÝ TAH A TLAK



$N \neq 0$

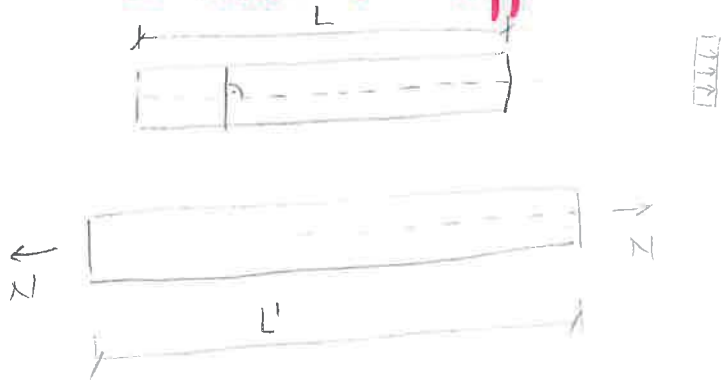
$V_y = V_z = 0$

$M_y = M_z = M_x = 0$

$N > 0$

$N < 0$

Bermoulliova hypotéza



$$\varepsilon = \frac{L' - L}{L} = \text{konst.} \rightarrow \sigma = E \cdot \varepsilon = \text{konst.}$$

- podélná vlákna na sebe netlačí

$\sigma_y = \sigma_z = 0$

$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$

$$N = \int_A \sigma_x \cdot dA = \sigma_x \cdot \int_A dA = \sigma_x \cdot A$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA = \sigma_x \cdot \int_A z\,dA = \sigma_x \cdot S_y = 0$$

$$M_z = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA = \sigma_x \cdot \int_A y\,dA = \sigma_x \cdot S_z = 0$$

$$\boxed{\sigma_x = \frac{N}{A}}$$

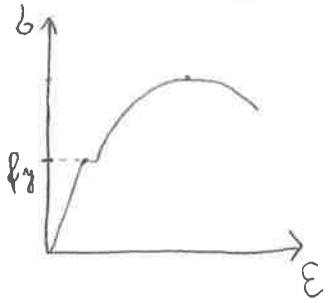
$p_a = \frac{N}{m^2}$; MPa, $\frac{kN}{mm^2}$

Při dimenzování prutů musí platit:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} \leq R_d$$

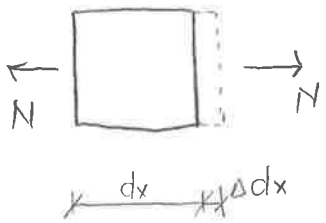
R_d ... návrhová pevnost

ocel $R_d = \frac{f_y}{\gamma_M} = \frac{235\ MPa}{1,0} = 235\ MPa$





$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{N}{EA}$$

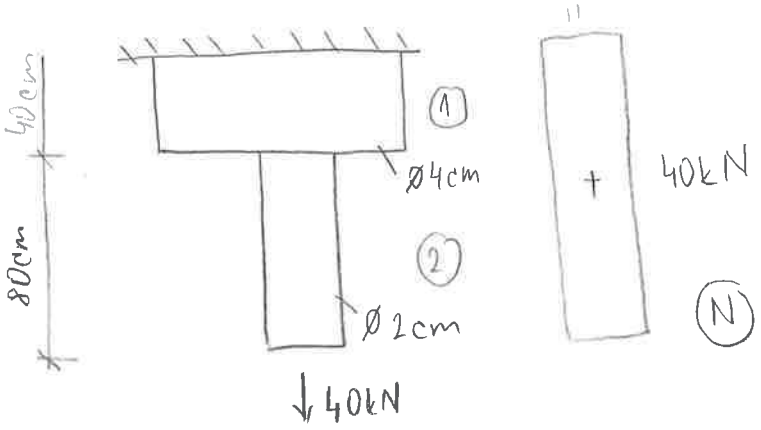


$$\Delta dx = \frac{N \cdot \Delta dx}{E \cdot A}$$

$$\Delta l = \int_0^l \Delta dx = \int_0^l \varepsilon_x \cdot dx = \int_0^l \frac{N}{E \cdot A}\, dx = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

$$\boxed{\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}}$$

Př. Určete napětí v obou částech ocelového prutu a jeho celkové přetvoření. OCEL $E = 210\ GPa$



$$^1\sigma_x = \frac{40 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,02^2} = 31,8 \cdot 10^6\ Pa = 31,8\ MPa$$

$$^2\sigma_x = \frac{40 \cdot 10^3}{\pi \cdot 0,01^2} = 127,3\ MPa$$

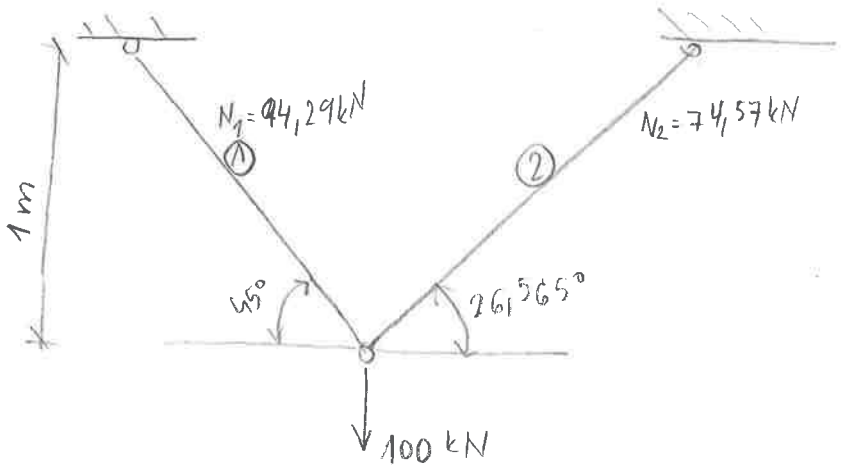
$$\Delta l_1 = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{210 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 0,02^2} = 0,0606\ mm$$

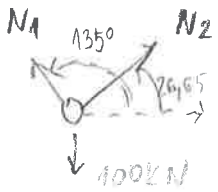
$$\Delta l_2 = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{210 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 0,01^2} = 0,48\ mm$$

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,0606 + 0,48 = 0,5406\ mm$$

Napětí první části 31,8 MPa druhé 127,3 MPa a celkové protažení 0,5406 mm.

Navrhněte průřezy 1 a 2 z kruhové oceli, zjistěte protažení prutů a hodnotu poklesu konstrukce v místě působení síly





$\Sigma F_x = 0$

$N_1 \cdot \cos 135° + N_2 \cdot \cos 26,565° + 100 \cdot \cos 270° = 0$

$N_1 \cdot \sin 135° + N_2 \cdot \sin 26,565° + 100 \cdot \sin 270° = 0$



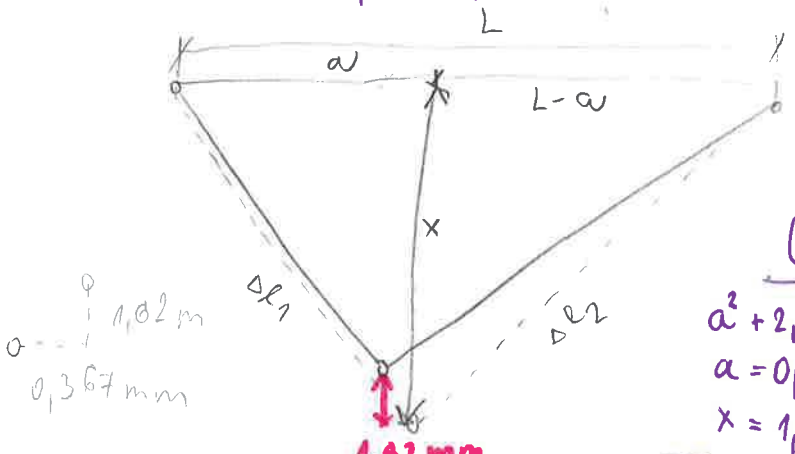
$R = 210 \text{ MPa}$

$A_1 \geq \frac{N_1}{R} = \frac{94,29 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 4,49 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \Rightarrow \varnothing 3 \text{ ; } A_1 = 7,068 \text{ cm}^2$

$A_2 \geq \frac{N_2}{R} = \frac{74,57 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 3,55 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \rightarrow \varnothing 3 \text{ ; } A_2 = 7,008 \text{ cm}^2$

$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{94,29 \cdot 10^3}{7,068 \cdot (0,01)^2 \text{ m}^2} = 133,4 \text{ MPa}$

$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{74,57 \cdot 10^3}{7,068 \cdot (0,01)^2} = 105,5 \text{ MPa}$



$a^2 + x^2 = (l_1 + \Delta l_1)^2$

$(L-a)^2 + x^2 = (l_2 + \Delta l_2)^2$

$a^2 + x^2 = 1,4151^2$

$(3-a)^2 + x^2 = 2,237122^2$

$a^2 + 2,237122^2 - (3-a)^2 = 1,4151^2$

$a = 0,999633 \text{ m}$

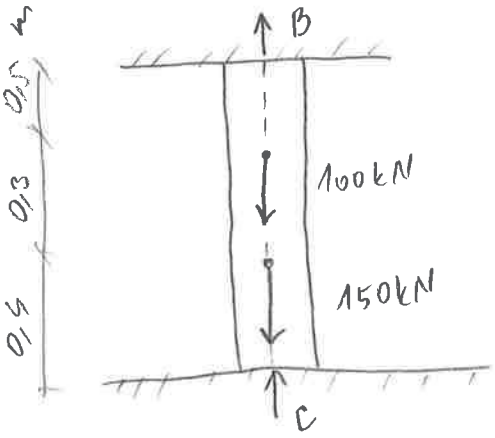
$x = 1,00162 \text{ m}$

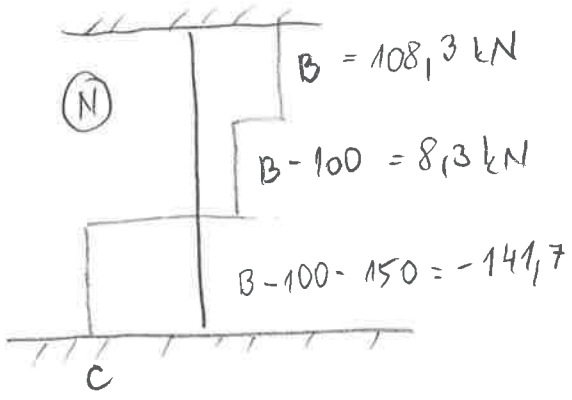
$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{94,29 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{1^2+1^2}}{210 \cdot 10^9 \cdot 7,068 \cdot 10^{-4}} = 0,9 \text{ mm}$

$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{74,57 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{1^2+2^2}}{210 \cdot 10^9 \cdot 7,068 \cdot 10^{-4}} = 1,12 \text{ mm}$

STATICKÝ NEURČITÝ TAH A TLAK

Prut s průřezovou plochou 10 cm² je vetknutý na obou koncích a je zatížený silami dle obrázku. Zjistěte napětí ve třech částech prutu.





1) $\Sigma F_x = 0 \qquad B - 100 - 150 + C = 0$

2) $\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0$

$$\frac{B \cdot 0{,}5}{E \cdot A} + \frac{(B - 100) \cdot 0{,}3}{E \cdot A} + \frac{(B \cdot 250) \cdot 0{,}4}{E \cdot A} = 0$$

$B = 108{,}3\ kN$

$C = 141{,}7\ kN$

$$\sigma_1 = \frac{108{,}3 \cdot 10^3}{0{,}001\ m^2} = 108{,}3\ MPa$$

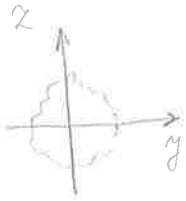
$$\sigma_2 = \frac{8{,}3 \cdot 10^3}{0{,}001\ m^2} = 8{,}3\ MPa$$

$$\sigma_3 = \frac{-141{,}7 \cdot 10^3}{0{,}001\ m^2} = -141{,}7\ MPa$$

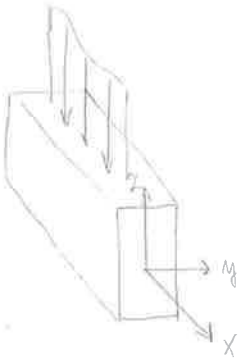
NAPÄTIE OHÝBANÝCH KONŠTRUKCII

3.10.

Priamy ohyb



$D_{yz} = 0$





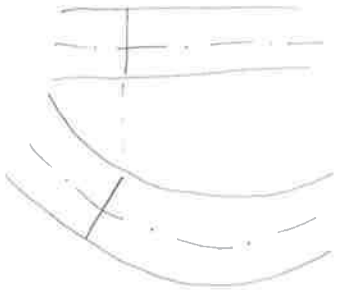
Priamy ohyb



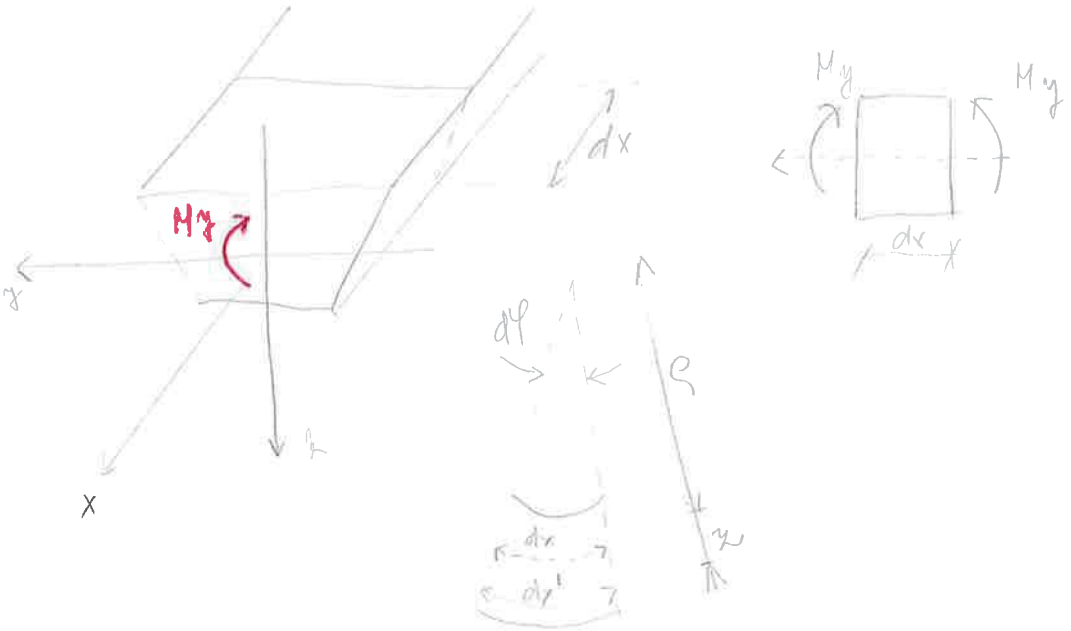


a) Bernoulliova hypotéza

- priečny prierez ...



b) $\sigma_y = \sigma_z = 0$



1) Geometrické podmínky

$$\varepsilon = \frac{\delta dx}{dx} = \frac{z \cdot d\varphi}{\rho \cdot d\varphi} = \frac{z}{\rho}$$

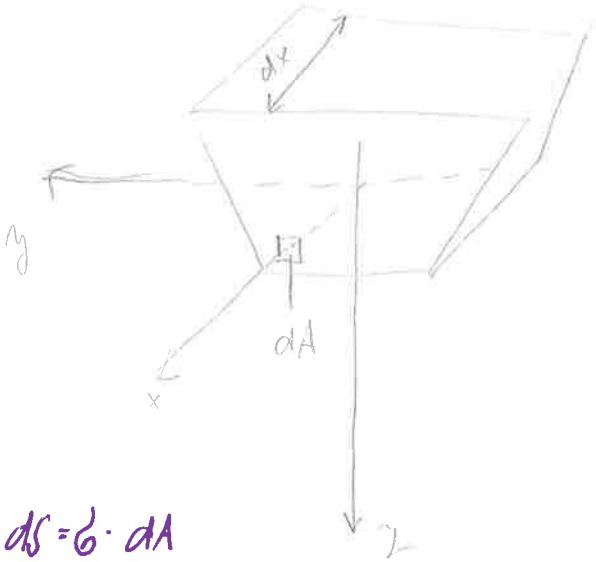
$$dx' = (\rho + z) \cdot d\varphi$$

$$\delta dx = dx' - dx = (\rho + z) \cdot d\varphi - \rho \cdot d\varphi = z \cdot d\varphi$$

2) Fyzikální podmínky

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{z}{\rho}$$





$dS = \sigma \cdot dA$

$[N] = [Pa] \cdot [m^2]$

3) statické podmínky

$\Sigma M_y = 0$

$$\boxed{M_y} = \int_A z \cdot dS = \int z \cdot \sigma \cdot dA =$$

$$= \int_A \frac{E}{\rho} \cdot z^2 dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A z^2 dA}_{I} =$$

$$= \boxed{\frac{E}{\rho} \cdot I_y} = \frac{1}{\rho} \cdot E \cdot I_y = \frac{\varepsilon}{z} \cdot E \cdot I_y =$$

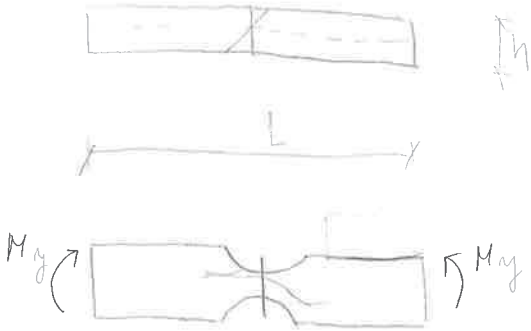
$$= \frac{\sigma}{z} \cdot I_y$$

$$\boxed{\sigma = \frac{M_y}{I_y} \cdot z}$$

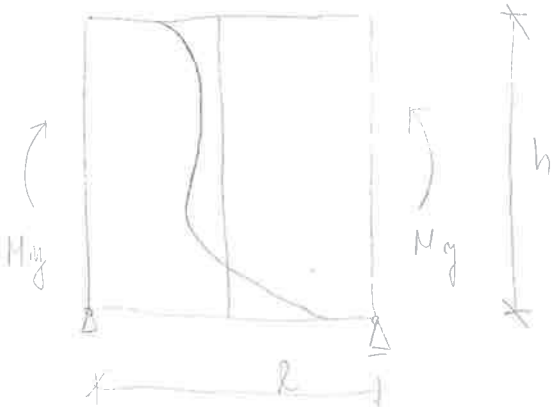


- normálová napětí v příčném průřezu probíhají lineárně ve výšce nosníku a extrémní hodnoty nabývají v krajních bodech (v krajních vláknech nosníku)

$$Pa = \frac{Nm}{m^3} \cdot m$$



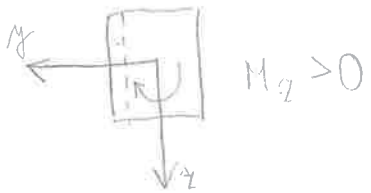
L : h
10 : 1



- odvozené řešení platí pro případ prostého ohybu
- v případě rovinného ohybu působí kromě ohybového momentu působí též posouvající síly, mají přijaté předpoklady a z nich odvozené závěry, poruchu příslušných vztahů
- smykové napětí vyvolává posouvajícími silami způsobují shození a tím stálou rovinnosti průřezu, střední Bern.. hypotéza o zachování rovinnosti průřezu již přesně neplatí

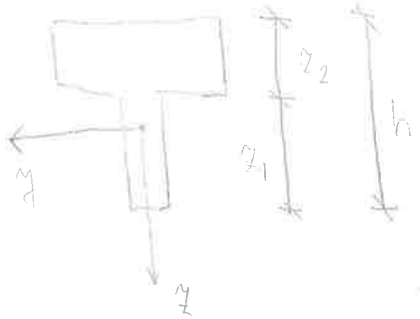


$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} \cdot y$$



Posouzení

$$\max|\sigma_x| = \left|\frac{M_y}{I_y} \cdot z\right| \leq R_d \; | \; z \in$$



$$\max|\sigma_x| = \frac{M_y}{W_y}$$

$$W_y = \min\{W_{y1} \; ; \; W_{y2}\}$$

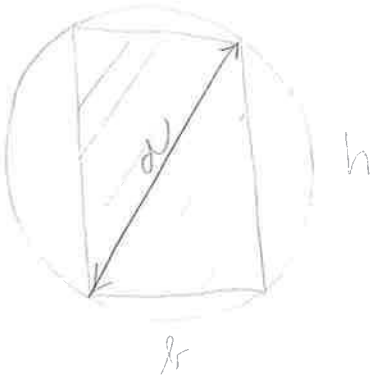
$$W_{y1} = \frac{I_y}{|z_1|} \; ; \; W_{y2} = \frac{I_y}{|z_2|}$$

Dimenzování

$$W_y \geq \left| \frac{M_y}{R_d} \right|$$

Př.

Určete při jaké ... strany a, b ...



$$b^2 + h^2 = d^2 \qquad h^2 = d^2 - b^2$$

$$W_y = \frac{I_y}{|z_1|} = \frac{\frac{1}{12} b \cdot h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b \cdot h^2 =$$

$$= \frac{1}{6} b \cdot (d^2 - b^2)$$

$$\frac{dW_y}{db} = \frac{1}{6}(d^2 - 3b^2) = 0 \qquad b = \frac{1}{\sqrt{3}} d = 0{,}777 \cdot d$$

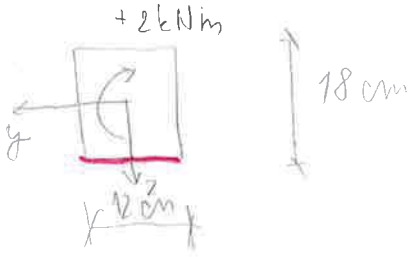
$$h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot d = 0{,}816 d$$

$$\frac{b}{h} = 0{,}707$$

$$5 : 7$$

Určete rozložení napětí na výšce obdélníkového průřezu. Určete maximální normálovou hodnotu konstrukce..





$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z = \frac{2 \cdot 10^3}{5{,}832 \cdot 10^{-5}} \cdot 0{,}09 = 3{,}086 \text{ MPa}$$

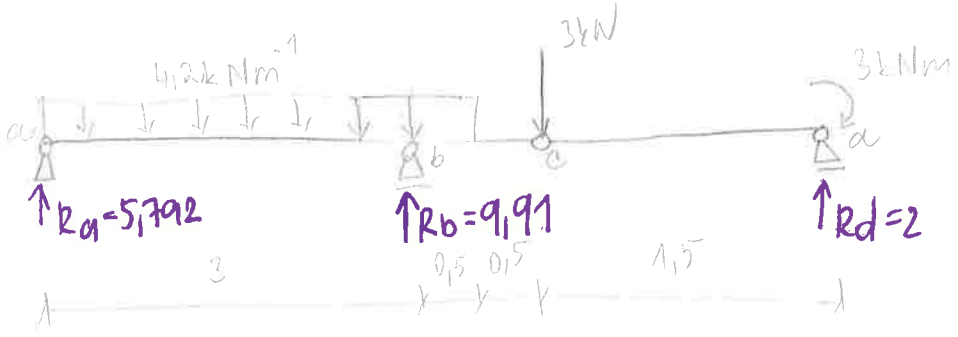
$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}18^3 = 5{,}832 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

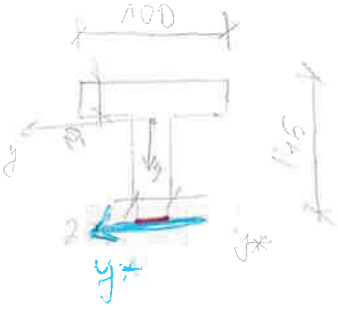
$$\min W_y = \frac{I_y}{|z_1|} = \frac{\frac{1}{12} b \cdot h^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6} b \cdot h^2 \qquad W_y = \frac{1}{6} b \cdot h^2 = \frac{1}{6} \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}18^2 = 6{,}48 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$$



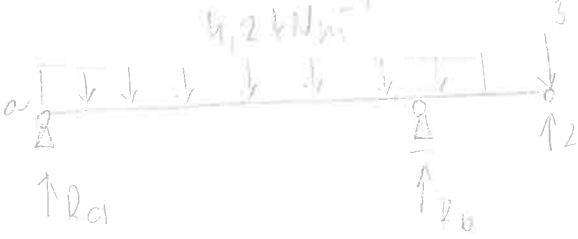
$$\max |\sigma_x| = \frac{M_y}{W_y} = \frac{2 \cdot 10^3}{6{,}48 \cdot 10^{-4}} = 3{,}086 \text{ MPa}$$

Př. Vypočtěte max absolutní hodnotu normálového napětí a ověřte že tato hodnota nepřesáhne návrhovou pevnost oceli S 235 která je 235 MPa
$\max |\sigma_x|$





1) $\Sigma M_c = 0 \qquad -3 + R_d \cdot 1{,}5 = 0 \qquad R_d = 2$

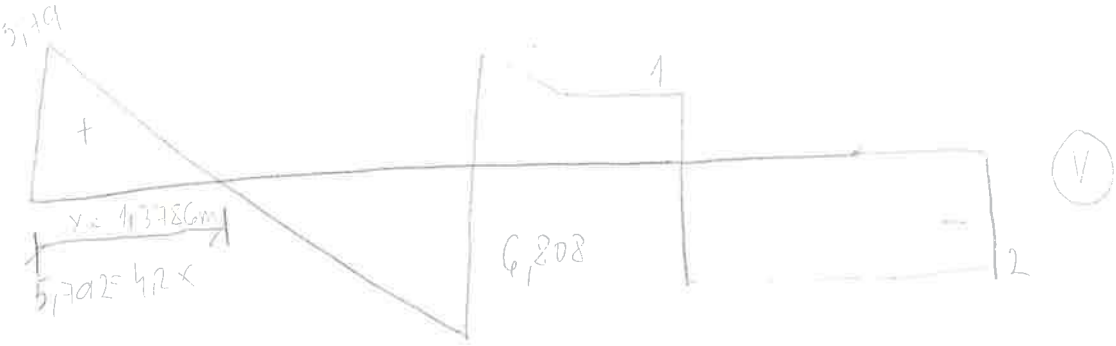


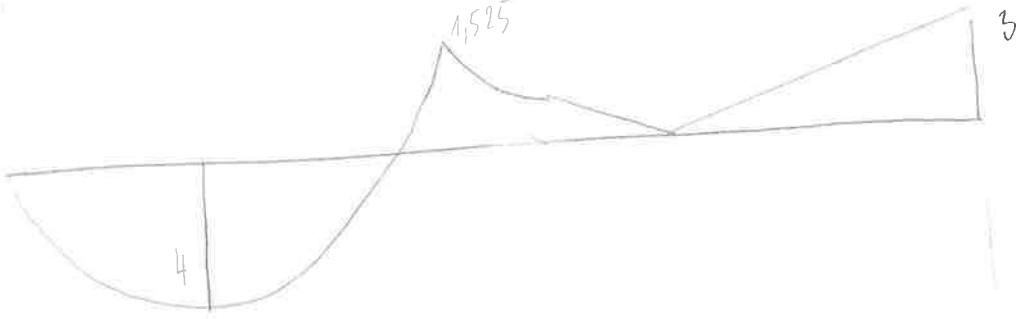
$$\Sigma M_a = 0 \qquad -1 \cdot 4 + R_b \cdot 3 - 4{,}2 \cdot 3{,}5 \cdot \frac{3{,}5}{2} = 0$$

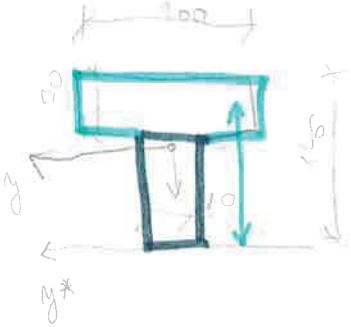
$$\Sigma F_z = 0 \qquad R_a - 4{,}2 \cdot 3{,}5 + 9{,}91 - 1 = 0$$

$$R_a = 5{,}792$$









$$z^* = \frac{S_{y^*}}{A} = \frac{116 \cdot 20 \cdot \frac{116}{2} + 100 \cdot 30 \cdot (146 - 15)}{116 \cdot 20 + 100 \cdot 30} = 99{,}165\,mm$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 20 \cdot 116^3 + 20 \cdot 116 \cdot \left(99{,}165 - \frac{116}{2}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 100 \cdot 30^3 + 100 \cdot 30 \cdot (131 - 99{,}165)^2 = 9{,}7983 \cdot 10^6\ mm^4 =$$

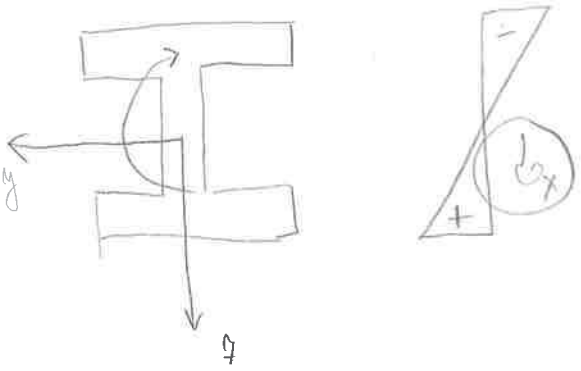
$$I_y = 9{,}7983 \cdot 10^{-6}\ m^4$$

$$\max |\sigma_x| = \frac{4 \cdot 10^3}{9{,}7983 \cdot 10^{-6}} \cdot 0{,}099165 = 40{,}38 \cdot 10^6\ Pa = 40{,}38\ MPa$$

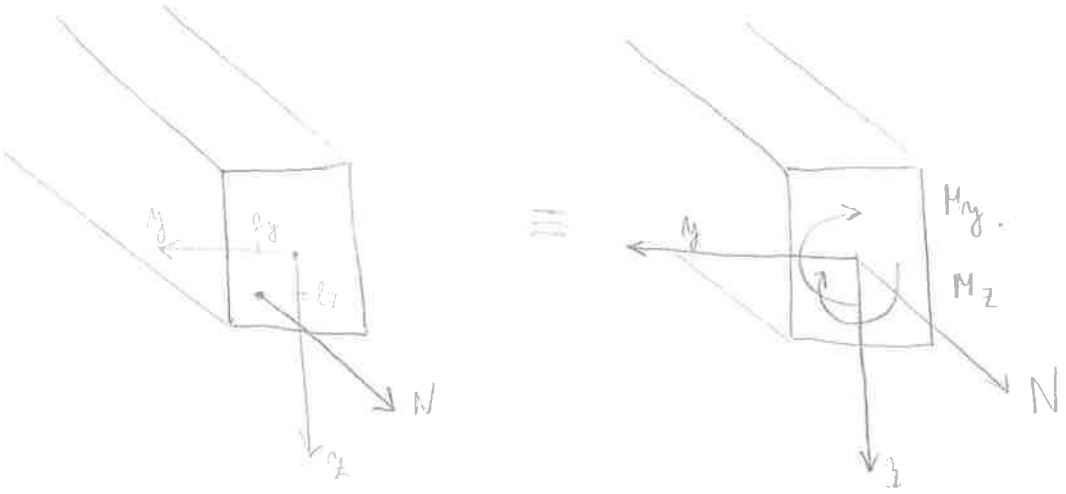
$$\max |\sigma_x| = 40{,}38\ MPa \leq 235\ MPa$$

Konštrukcia vyhovuje pretože je menšia ako návrhová hodnota.

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z \leq R_d$$



MIMOSTREDNÝ ŤAH A TLAK



$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} \cdot z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

- vzorec odvozený za predpoklady M_y, M_z jsou kladné
- momenty a souřadnice bodů dosazujeme včetně znamének
- e_y, e_z jsou souřadnice bodů kde působí síla N, tah je ⊖ + tak je ⊕
- yaz souřadnice bodů, kde chci vypočítat na pátí, všechno dosazovat včetně znamének

$$M_y = N \cdot e_z \qquad M_z = -N \cdot e_y$$

neutrálna osa $\sigma_x = 0$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_z \cdot A}{I_y \cdot A} \cdot z - \frac{-N \cdot e_y \cdot A}{I_z \cdot A} \cdot y =$$

$$= \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_z}{A\, i_y^2} \cdot z + \frac{N \cdot e_y}{A\, i_z^2} \cdot y =$$

$$= \frac{N}{A} \cdot \left(1 + \frac{e_z}{i_y} z + \frac{e_y}{i_z^2} \cdot y\right)$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

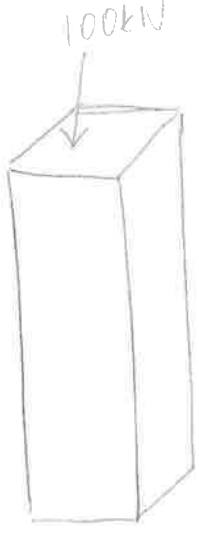
$$i_z^2 = \frac{I_z}{A}$$

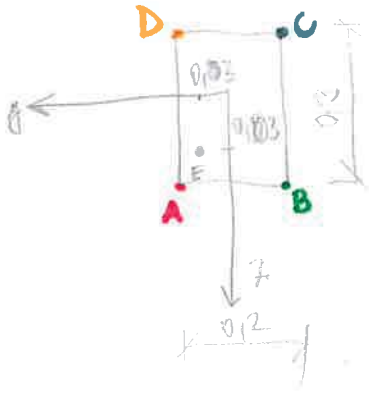
$$\frac{e_y \cdot y}{i_z^2} + \frac{e_z \cdot z}{i_y^2} + 1 = 0$$

$$z = 0 \rightarrow y_n = -\frac{i_z^2}{e_y}$$

$$y = 0 \rightarrow z_n = -\frac{i_y^2}{e_z}$$

Př. Průřez $0{,}3 \cdot 0{,}2$ m je namáhan v bodě E silou 100kN najdete polohu neutrálnej osy a určete napätí v krajních bodech





$N = -100\,kN$

$M_y = -100\,kN \cdot 0{,}03 = -3\,kNm$

$M_z = -(-100\,kN \cdot 0{,}03) = +3\,kNm$

$A = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06\,m^2$

$I_y = \frac{1}{12} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3^3 = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,m^4$

$I_z = \frac{1}{12} \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2^3 = 2 \cdot 10^{-4}\,m^4$

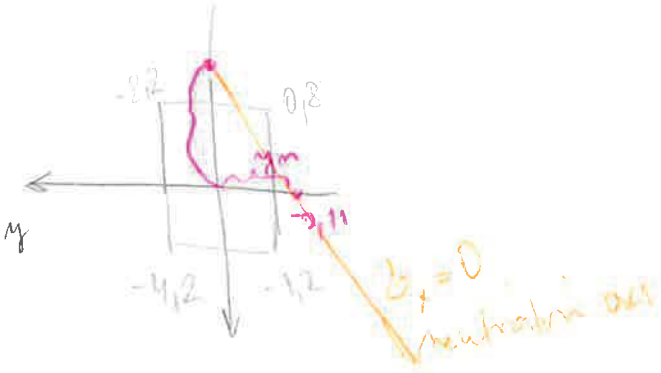
$$\sigma_x(y,z) = \frac{-100\cdot 10^3}{0{,}06} + \frac{-3\cdot 10^3}{4{,}5\cdot 10^{-4}}\cdot z - \frac{3\cdot 10^3}{2\cdot 10^{-4}}\, y$$

$$\sigma_x(0{,}1;0{,}15) = \frac{-100\cdot 10^3}{0{,}06} + \frac{-3\cdot 10^3}{4{,}5\cdot 10^{-4}}\cdot 0{,}15 - \frac{3\cdot 10^3}{2\cdot 10^{-4}}\cdot 0{,}1 = -4{,}16\overline{6}\ \text{MPa}$$

$-0{,}1;0{,}15 =$ —"— $\cdot 0{,}15$ $\cdot(-0{,}1) = 1{,}16\overline{6}$ MPa

$-0{,}1;-0{,}15 =$ $\cdot(-0{,}15)$ $\cdot(-0{,}1) = 0{,}833$ MPa

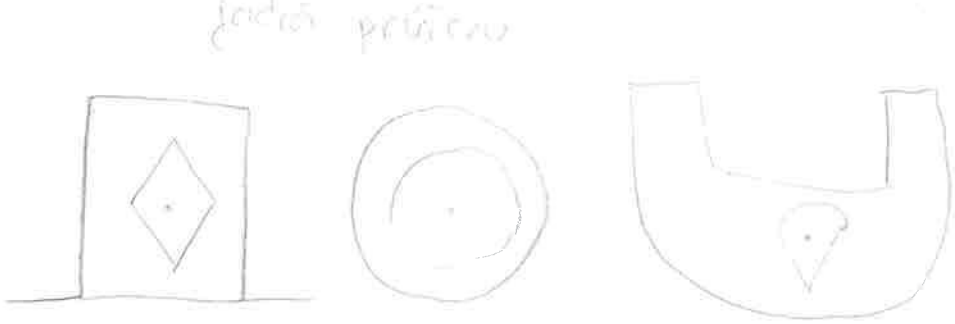
$-0{,}1;-0{,}15 =$ $\cdot(-0{,}15)$ $\cdot 0{,}1 = -2{,}166$ MPa



$$y_n = -\frac{i_z^2}{e_y} = -\frac{I_z/A}{e_y} = -\frac{2\cdot 10^{-4}/0{,}06}{0{,}03} = -0{,}1\overline{1}\ \text{m}$$

$$z_n = -\frac{i_y^2}{e_z} = -\frac{I_y/A}{e_z} = -\frac{4{,}5\cdot 10^{-4}/0{,}06}{0{,}03} = -0{,}25\ \text{m}$$





j. průřezu: - určitá oblast v okolí těžiště průřezu v níž musí působit výslednice vnitřních sil, aby v celém průřezu vznikala normálová napětí téhož znaménka

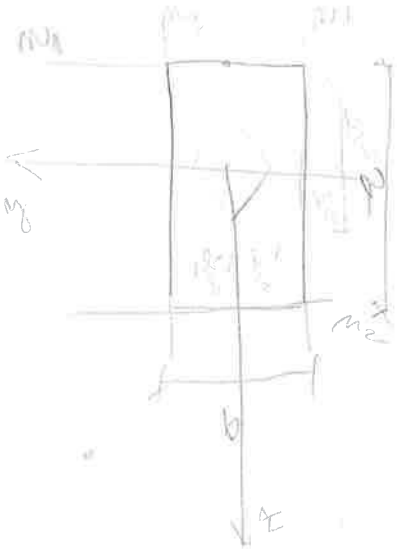
- vnitřní silou myslíme excentrickou sílu N

- j. p. je určeno svým podhybem tzv. jadrovou čárou

$$e_{yj} = -\frac{i_z^2}{y_{nj}}$$

$$e_{zj} = -\frac{i_y^2}{z_{nj}}$$

Př. Stanovte jádro průřezu obdélníku



$A = b\,h$

$I_y = \frac{1}{12} b\,h^3$ $\quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{1}{12} h^2$

$I_z = \frac{1}{12} h\,b^3$ $\quad i_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{1}{12} b^2$

n_1: $y_{n1} = \infty$ $\quad z_{n1} = -\frac{h}{2}$

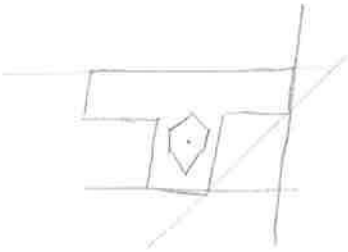
$e_{y1} = -\frac{-i_z^2}{y_{n1}} = \frac{-i_z^2}{\infty} = 0$ $\quad e_{z1} = -\frac{i_y^2}{z_{n1}} = -\frac{\frac{1}{12}h^2}{-\frac{h}{2}} = \frac{h}{6}$

$y_{n2} = \infty$ $\quad e_{y2} = \frac{12}{\infty} = 0$

$n_2: \quad z_{n2} = \frac{h}{2} \quad e_{z1} = \frac{i_y^2}{\frac{h}{2}} = -\frac{\frac{1}{12}h^2}{\frac{h}{2}} = -\frac{h}{6}$

$n_3: \quad y_{n3} = \frac{b}{2} \quad e_{y3} = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{\frac{b}{2}} = -\frac{b}{6}$

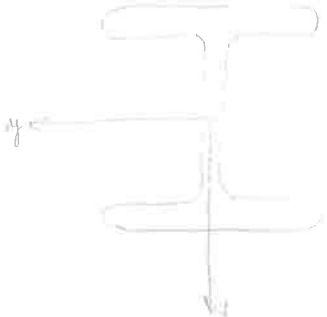
$z_{n3} = \infty \quad e_{z3} = 0$



$n_4: \quad y_{n4} = -\frac{b}{2} \quad e_{y4} = -\frac{\frac{1}{12}b^2}{-\frac{b}{2}} = \frac{b}{6}$

$z_{n4} = \infty \quad e_{z4} = 0$

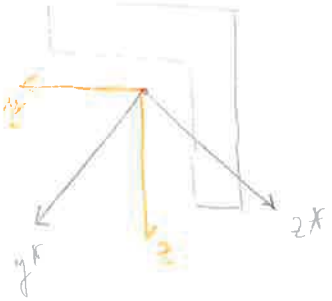
ŠIKMÝ OHYB



$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$

- zatížení leží v jedné společné rovině, která prochází osou prutu, ale není hlavní rovinou.
- pohybová čára je rovinnou křivkou, neleží však v rovině zatížení výbrž v rovině kolmé k neutrální ose

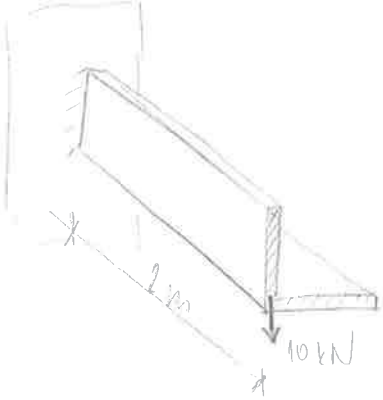
$$\sigma_x = -\frac{M_z \cdot I_y + M_y \cdot D_{yz}}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} \cdot y + \frac{M_z \cdot D_{yz} + M_y \cdot I_z}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} \cdot z$$



Pr. Stanovte rozložení normálového napětí na konzole ve vetknutí a rovnoramenného Δ $L\ 200 \times 200 \cdot 20$

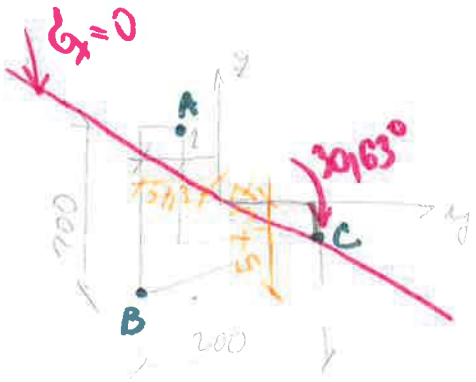
$D_{y^*z^*} = 0$

$D_{yz} \neq 0$



$M_y = 20\ kNm \quad D_{yz} = -1{,}7053 \cdot 10^{-5}\ m^4$

$I_y = I_z = 28{,}8 \cdot 10^{-6}\ m^4$



$$\bar{z}_T = \frac{S_{\bar{y}}}{A} = \frac{200\cdot 20\cdot 10 + 180\cdot 20\cdot\left(\frac{180}{2}+20\right)}{200\cdot 20 + 180\cdot 20} = 57{,}37 \text{ mm}$$

$$D_{yz} = 0 + 200\cdot 20\cdot(100-57{,}37)\cdot(10-57{,}37) + 180\cdot 20\cdot(10-57{,}37)\cdot(110-57{,}37) = -17{,}053\cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{12}\cdot 200\cdot 20^3 + 200\cdot 20\,(10-57{,}37)^2 + \frac{1}{12}\,20\cdot 180^3 + 20\cdot 180\cdot(110-57{,}37)^2 = 28{,}8\cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$D_{yz} = \int_A y\cdot z\cdot dA$$

$$\sigma_x = -\frac{20\cdot 10^3\cdot(-1{,}7053\cdot 10^{-5})}{(28{,}8\cdot 10^{-6})^2 - (-1{,}7053\cdot 10^{-5})^2}\cdot y + \frac{+20\cdot 10^3\cdot 28{,}8\cdot 10^{-6}}{-\!\!-\!\!-}\cdot z =$$

$$= 633{,}2\cdot 10^6\cdot y + 1069{,}4\cdot 10^6\cdot z \quad [Pa]$$

A) $\sigma_x(-0{,}03737;\ 0{,}1426) = 128{,}8\cdot 10^6 \text{ Pa} = 128{,}8 \text{ MPa}$

B) $\sigma_x(-0{,}05737;\ -0{,}05737) = -97{,}68\cdot 10^6 \text{ Pa} = -97{,}68 \text{ MPa}$

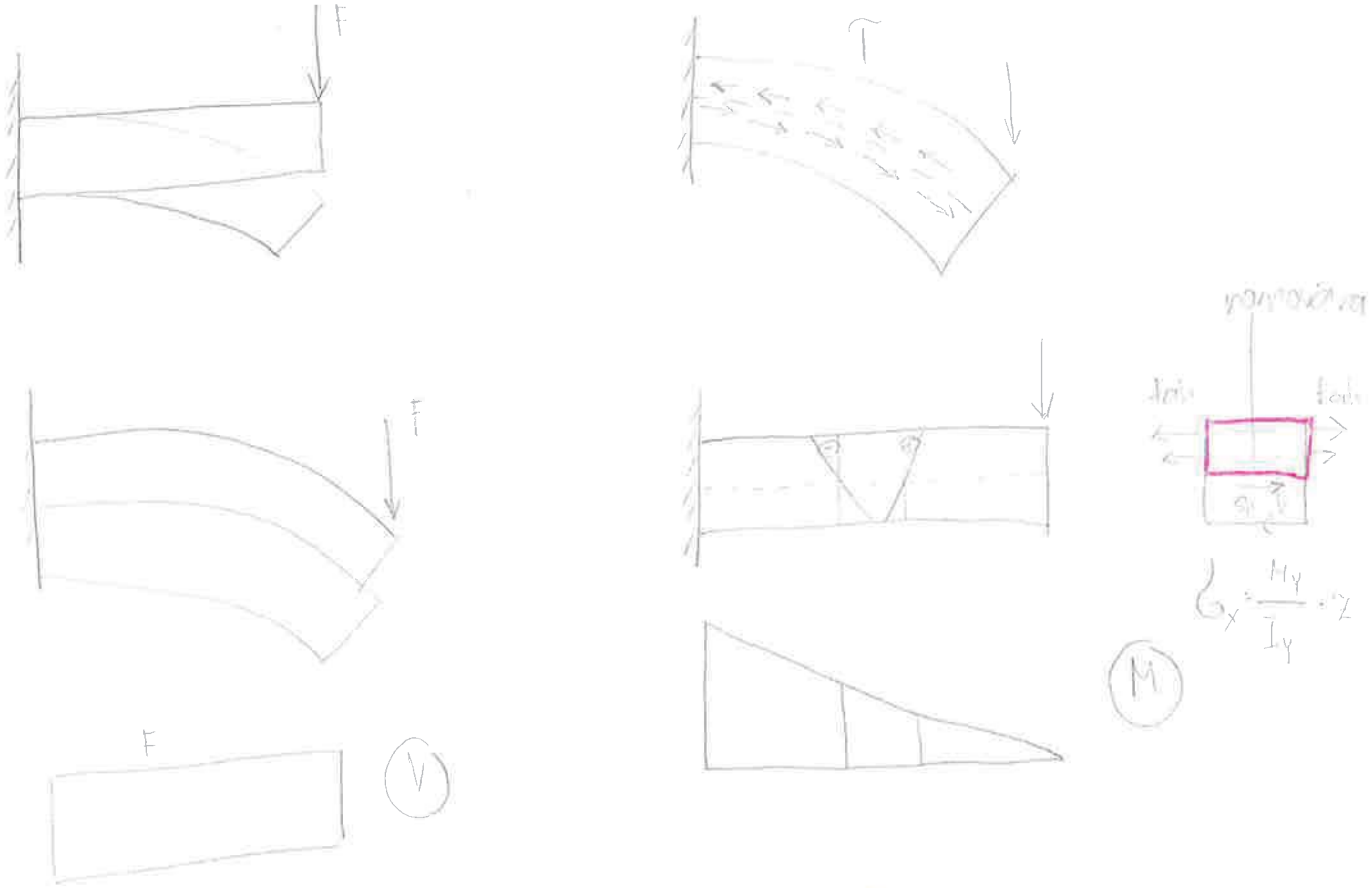
C) $\sigma_x(0{,}1426;\ -0{,}03737) = 50{,}34 \text{ MPa}$

$$\frac{z}{y} = \frac{-633{,}2}{1069{,}4} = -\operatorname{arctg}(\beta) =$$

$$\beta = -39{,}63°$$

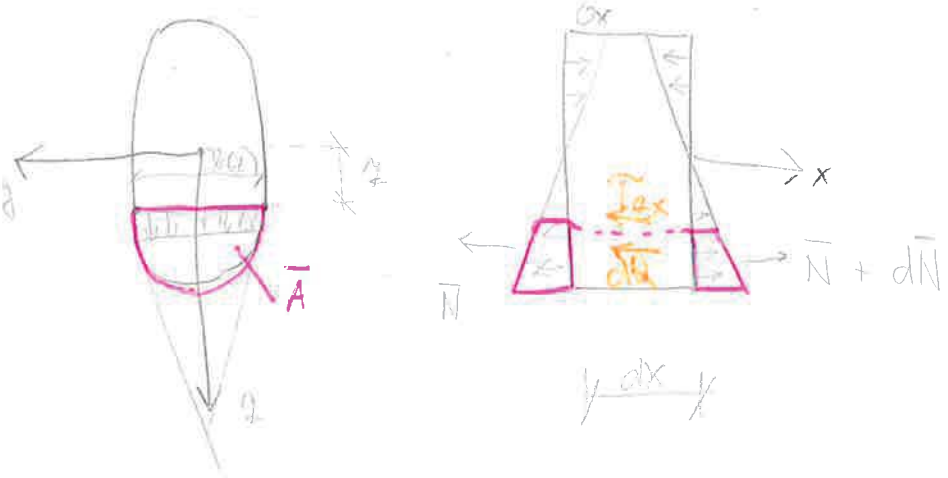
$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} \cdot y$$

SMYKOVÉ NAPĚTÍ



- tečna napětí při ohybu se snaží rovinu při ohybu sprohýbat takže hypotéza o rovinosti průřezu přesně nepsaté
- pro dlouhý a poddajný prut tato deklarace není významná
- vodorovná tečna napětí zabezpečují kompatibilní deformaci všech částí prutu při jeho ohybu
- přibližné tech. řešení smyku za ohybu (masitý průřezu) se opíra o tzv. Grashofovy předpoklady

1. smyková napětí na přímce z = konstanta (nemobéžka s neutrální osou) mají tyto vlastnosti
- smyslá složka napětí je po šířce průřezu konstantní,
- její výsledné vektory směřují do společného bodu na ose symetrie určeného průsečíkem tečen obrysu průřezu



$$\Sigma F_x = 0 \qquad -\bar{N} - dQ + \bar{N} + d\bar{N} = 0$$

$$\bar{N} = \int_{\bar{A}} \sigma_x \, dA = \int_{\bar{A}} \frac{M_y}{I_y} \cdot z \, dA = \frac{M_y}{I_y} \cdot \int_{\bar{A}} z \, dA = \frac{M_y}{I_y} S_y$$

statický moment odříznuté části průřezu V těžištní ose celého průřezu (v ose y)

$$d\bar{N} = \frac{d\bar{N}}{dx} \cdot dx = \frac{d}{dx}\left(\frac{M_y}{I_y} \cdot S_y\right) dx = \frac{dM_y}{dx} \cdot \frac{S_y}{I_y} dx = V_z \frac{S_y}{I_y} dx$$

$$dQ = b(z) \cdot dx \cdot \tau_{zx}$$

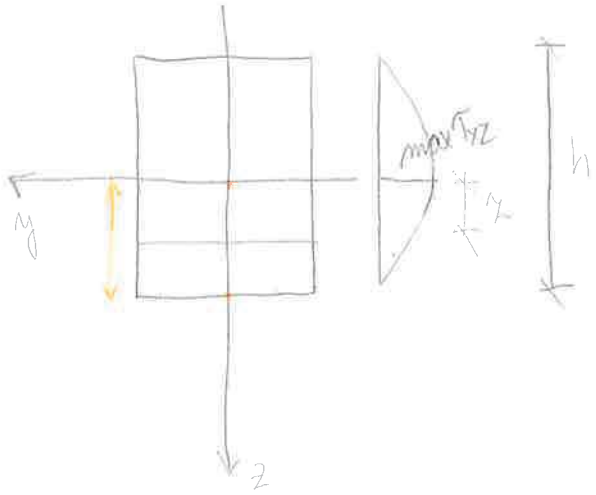
$$dQ = d\bar{N}$$

$$\tau_{zx} \cdot b(z) \cdot dx = V_z \cdot \frac{S_y}{I_y} \cdot dx$$

$$\tau_{zx} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b(z)} \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\boxed{\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b}}$$

(př) Vypočtěte průběh smykového napětí τ_{xz} u obdélníkového průřezu.



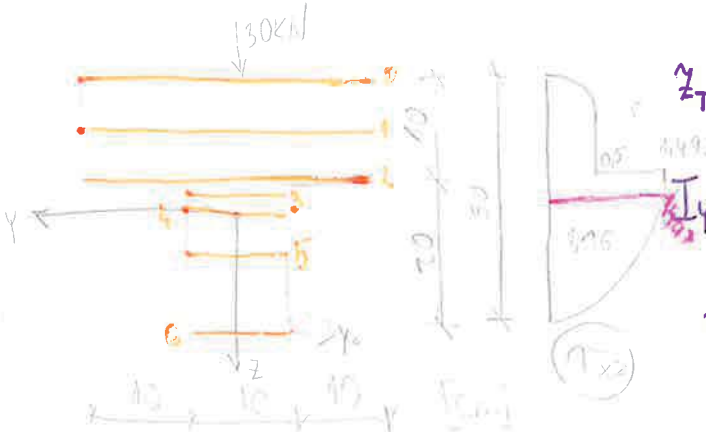
$$S_y = \underbrace{b \cdot \left(\frac{h}{2} - z\right)}_{A} \left(= + \frac{\frac{h}{2} - z}{2}\right) =$$

$$= \frac{b}{8} \cdot \left(h^2 - 4z^2\right)$$

$$I_y = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot \left[\frac{b}{8} \cdot (h^2 - 4z^2)\right]}{\frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \cdot b} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{V_z}{A} \cdot \left(1 - \frac{4z^2}{h^2}\right)$$



$$z_T = \frac{S_{y0}}{A} = \frac{10 \cdot 30 \cdot 25 + 10 \cdot 20 \cdot 10}{10 \cdot 30 + 10 \cdot 20} = 19 \text{ cm}$$

$$I_y = \frac{1}{12} 30 \cdot 10^3 + 30 \cdot 10 \cdot (30 - 19 - 5)^2 +$$

$$+ \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 20^3 + 10 \cdot 20 \cdot (19 - 10)^2 = 36\,166\,666\bar{6} \text{ cm}^4$$

$$= 3{,}616\bar{6} \cdot 10^{-4} \text{ m}^4$$

$^1\tau_{xz}$: $^1S_y = 0{,}05 \cdot 0{,}3 \,(0{,}3 - 0{,}025 - 0{,}19) = 1{,}27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$$^1\tau_{xz} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}27 \cdot 10^{-3}}{3{,}616\bar{6} \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3} = 0{,}353 \text{ MPa}$$

$^2\tau_{xz}$: $^2S_y = 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}3 - 0{,}19 - 0{,}05) = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$$^2\tau_{xz} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3}}{3{,}6167 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}3} = 0{,}498 \text{ MPa}$$

$^3\tau_{xz}$: $^3S_y = {}^2S_y = 1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$

$$^3\tau_{xz} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3}}{3{,}6167 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1} = 1{,}493 \text{ MPa}$$

$^4\tau_{xz}$: $^4S_y = 0{,}19 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}19 \cdot 0{,}5 = 1{,}805 \cdot 10^{-3}\ m^3$

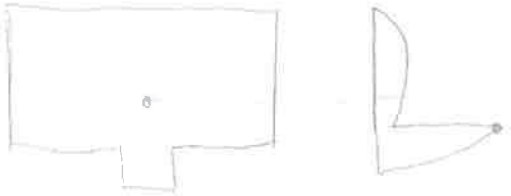
$$^4\tau_{xz} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}805 \cdot 10^{-3}}{3{,}6166 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1} = 1{,}497\ MPa$$

$^5\tau_{xz}$ $^5S_y = 0{,}1 \cdot 0{,}1\ (0{,}19 - 0{,}05) = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ m^3$

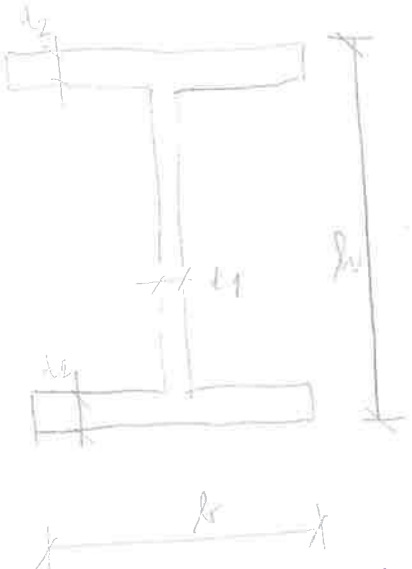
$$^5\tau_{xz} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-3}}{3{,}6167 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1} = 1{,}16\ MPa$$

$^6\tau_{xz}$ $^6S_y = 0$

$^6\tau_{xz} = 0$



(Př)



$t_1, t_2 \ll h, b$

a) otevřeného průřezu I, [, T, +

b) uzavřeného průřezu O, □

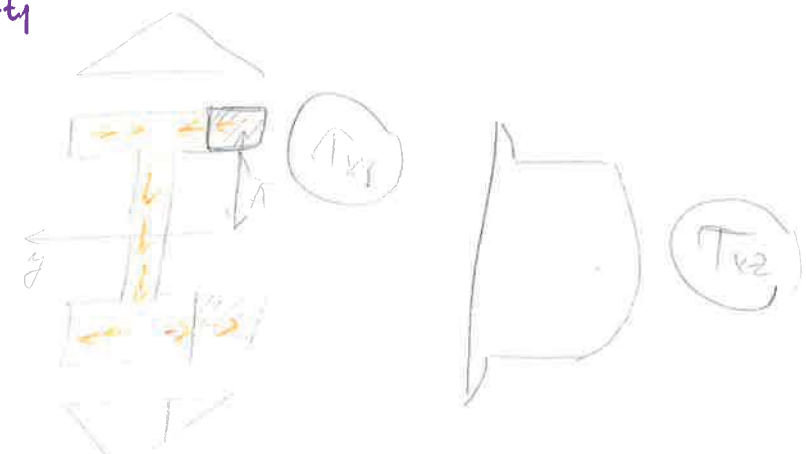
Předpoklady:

- smyková napětí jsou konstantní v řezu kolmo k dílčí stěně

$$\tau_{xz} \approx \frac{V_z}{A_s} \qquad A_s = (h - 2 \cdot t_2) \cdot t_1$$

$$\tau_{xy} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t_2}$$

$$\tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot b(t_1)}$$



b) uzavřené průřezy O, □



1) skoušky:

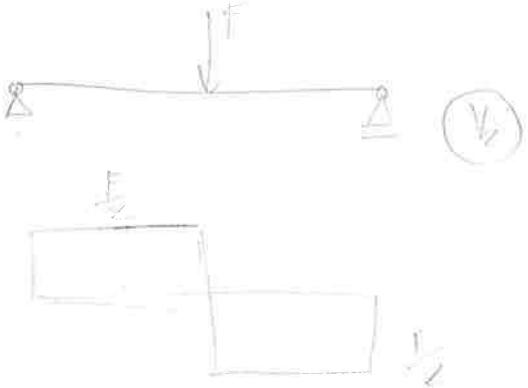


těžiště

I_y

$V_z \rightarrow \tau_{xz} = \frac{V_z S_y}{I_y \cdot b}$

$M_y \rightarrow \sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$



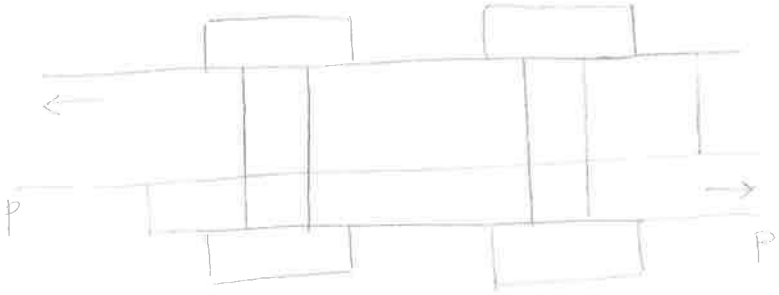
24.10.2017

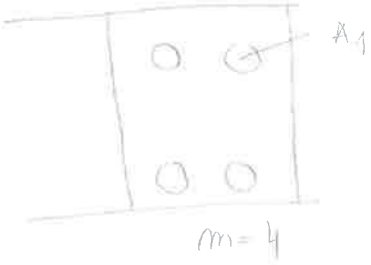
$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} \cdot x$ $\quad \tau_{xz} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t}$

PROSTÝ SMYK

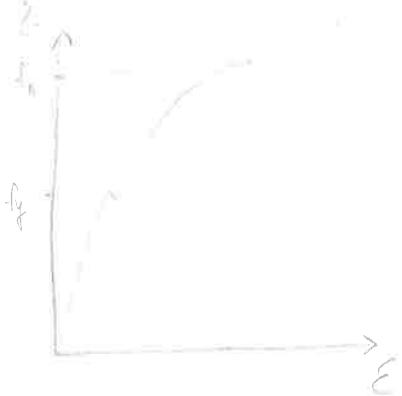
- měříme o něm tehdy je-li možné v uvažovaném bodě položit 3 vzájemně kolmé roviny tak, že na ně nepůsobí žádná složka normálových napětí výhradně je napětí smyková
- nevznikají podélné deformace, výhradně jen úhlové deformace

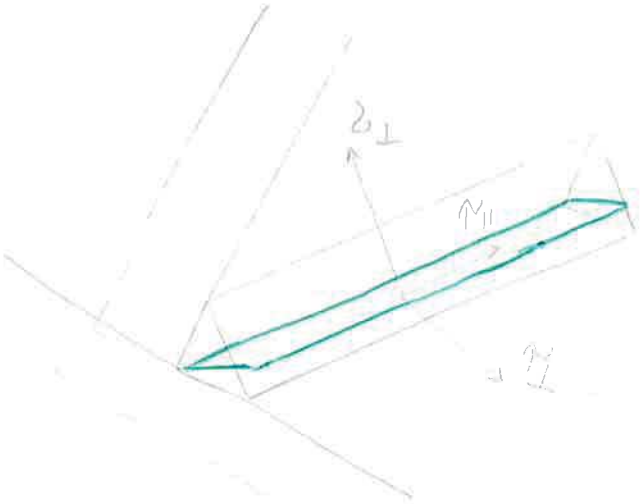
$$\tau = \frac{P}{A}$$





$$\tau = \frac{P_1}{A_1} \leq R_s \qquad P_1 = \frac{P}{m}$$

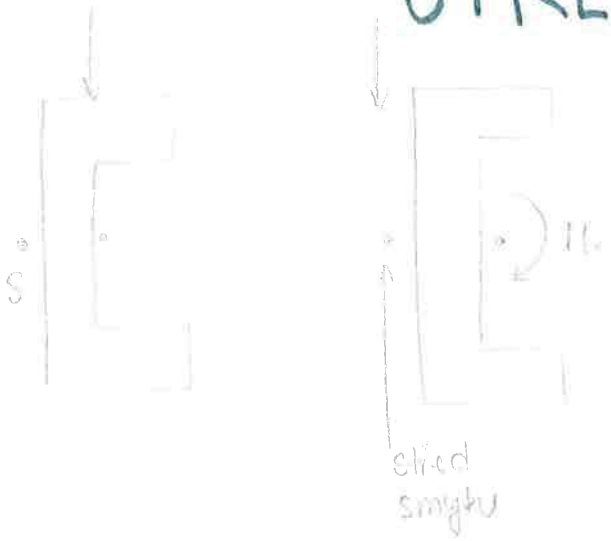




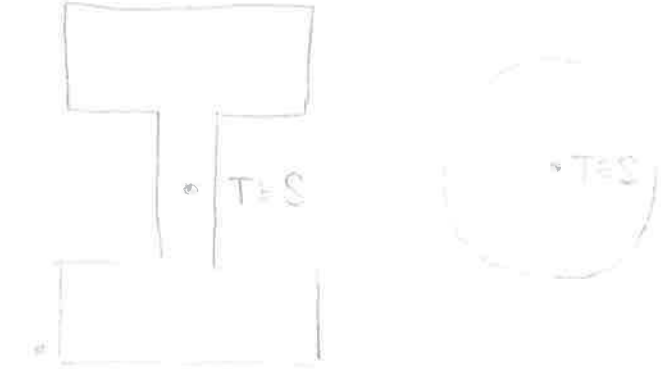
$$\sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 3\tau_{\parallel}^2 + 3\tau_{\perp}^2} \leq \frac{f_{km}}{\beta_w \cdot \gamma_{MW}}$$

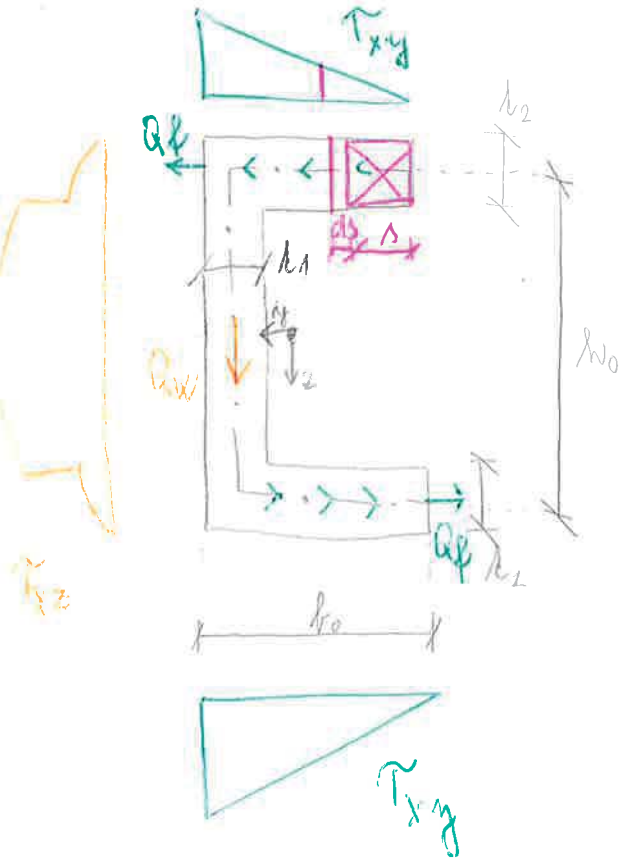
$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = R$$

STŘED SMYKU



- pokud nemá být prut kroucen musí výslednice vnějších sil procházet středem smyku
- v dvojnásobně symetrickém průřezu je střed smyku totožný s těžištěm průřezu
- průřez s jednou osou symetrie má střed smyku na této ose, ale není totožný s těžištěm průřezu





$$\tau_{xy} = \frac{V_z \cdot S_y}{I_y \cdot t} = \qquad S_y = t_2 \cdot s \cdot \frac{h_0}{2}$$

$$= \frac{V_z \cdot t_2 \cdot s \cdot h_0}{2 \cdot I_y \cdot t_2} = \frac{V_z \cdot t_2 \cdot h_0}{2 \cdot t_2 \cdot I_y} \cdot s$$

$$Q_f = \int_0^{b_0} \tau_{xy} \cdot t_2 \cdot ds = \int_0^{b_0} \frac{V_z \cdot h_0}{2 \cdot I_y} \cdot t_2 \cdot s \cdot ds =$$

$$= \frac{V_z \cdot h_0}{2 I_y} \cdot t_2 \cdot \int_0^{b_0} s \cdot ds = \text{—II—} \left[\frac{s^2}{2} \right]_0^{b_0} =$$

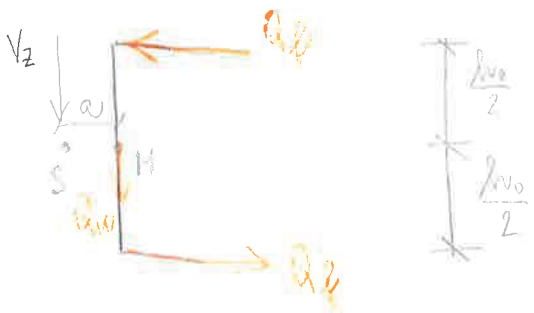
$$= \frac{V_z \cdot t_2 \cdot b_0^2 \cdot h_0}{4 I_y}$$

1. podmínka rovnováhy

$\Sigma F_z = 0 \qquad Q_w = V_z$

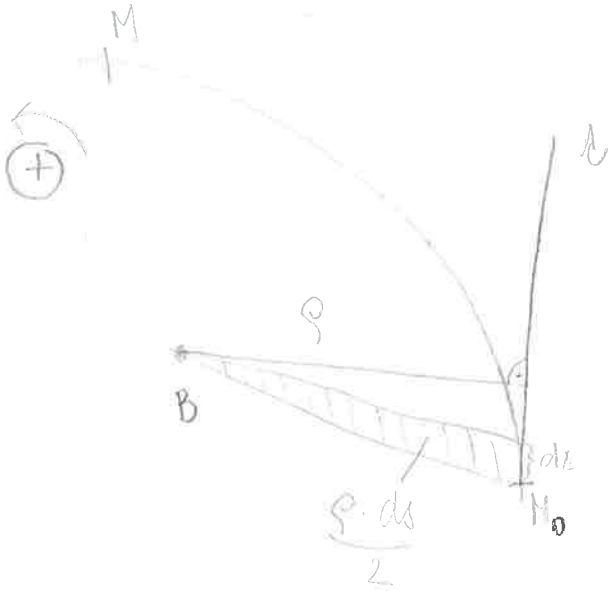
Momentová podmínka k bodu S

$\Sigma M_S = 0 \qquad Q_w \cdot a = Q_f \cdot h$



$$a = \frac{Q_f}{V_z} \cdot h = \frac{t_2 \cdot b_0 \cdot h_0}{I_y}$$

VÝSEČOVÉ SOUŘADNICE



$$W = \int_{M_0}^{M} \rho \, ds$$



- výsečová souřadnice bodu M je hodna dvojnásobku výsečé kterou opíše průvodič ρ pohybuje-li se počátku M_0 proti chodu hodinových ručiček do bodu M

$$I_w = \int_A w^2 \, dA \quad [m^6]$$

$$S_w = \int_A w \cdot dA \quad [m^4]$$

$$I_{yw} = \int_A w \cdot z \cdot dA \quad [m^5]$$

$$I_{zw} = \int_A w \cdot y \cdot dA \quad [m^5]$$

Poloha středu smyku:

$$y_{cs} = \frac{I_{yw_B} \cdot I_z - I_{zw_B} \cdot D_{yz}}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} + y_B = \alpha_y + y_B$$



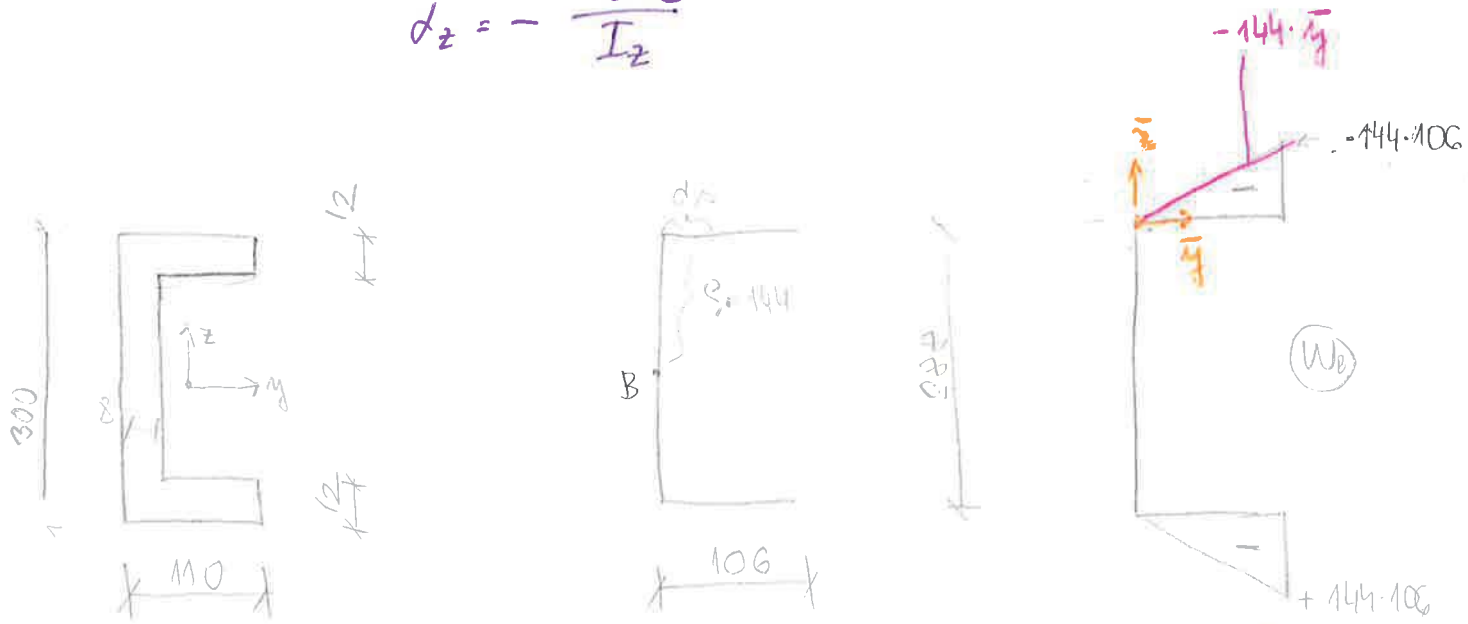
$$z_{cs} = \frac{I_{yw_B} \cdot I_z - I_{zw_B} \cdot I_y}{I_y \cdot I_z - D_{yz}^2} + z_B = \alpha_z + z_B$$

y_B, z_B - souřadnice pomocného bodu B od kterého integrujeme a odměřujeme souřadnice středu smyku

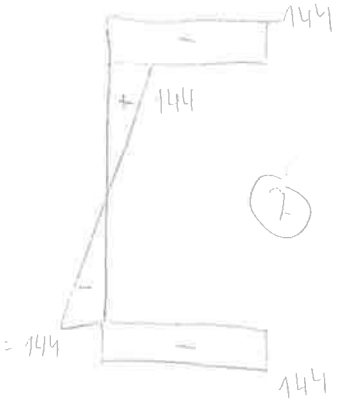
D_{yz} – deviační moment

$$D_{yz} = 0 \Rightarrow \alpha_y = \frac{I_{yw_B}}{I_y}$$

$$\alpha_z = -\frac{I_{zw_B}}{I_z}$$



$$I_y = 2 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 110 \cdot 12^3 + 12 \cdot 110 \cdot 144^2 \right) + \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 276^3 = 6{,}879 \cdot 10^7 \ mm^4$$



$$I_{yw_B} = \int_A w_B \cdot z \, dA$$

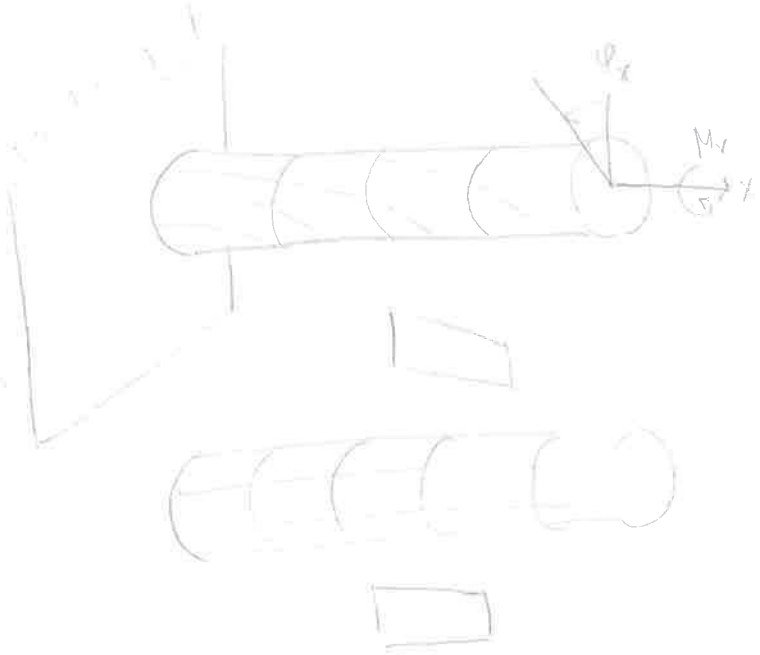
$$= 2 \cdot \int_{-6}^{6} \int_{0}^{106} \underbrace{-144 \cdot \bar{y}}_{w_B} \cdot 144 \cdot d\bar{y} \cdot d\bar{z}$$

$$= -144^2 \cdot 2 \cdot \int_{-6}^{6} \int_{0}^{106} \bar{y} \cdot d\bar{y} \, d\bar{z} = -144^2 \cdot 2 \int_{-6}^{6} \left[\frac{\bar{y}^2}{2} \right]_0^{106} d\bar{z} =$$

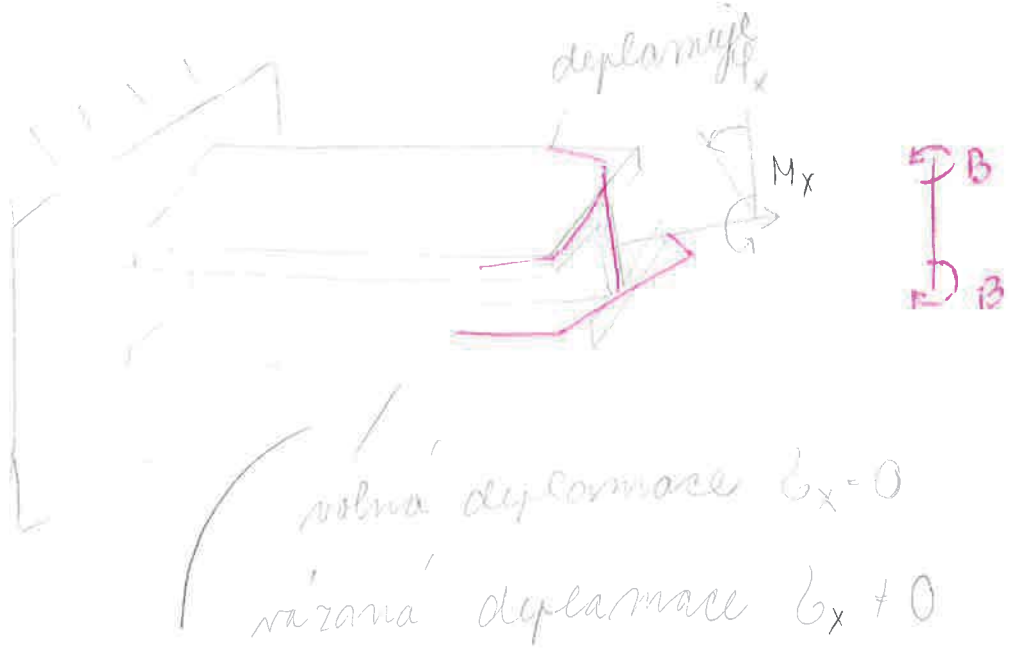
$$= -144^2 \cdot 2 \cdot \frac{106^2}{2} \cdot [z]_{-6}^{6} = -1{,}796 \cdot 10^9 \ mm^5$$

$$\alpha_y = \frac{I_{y\omega_B}}{I_y} = \frac{-2{,}796 \cdot 10^9\ mm^5}{6{,}879 \cdot 10^7\ mm^4} = -40{,}645\ mm$$

$$a = \frac{12 \cdot 106^2 \cdot 288^2}{4 \cdot 6{,}879 \cdot 10^7} = 40{,}6436\ mm$$



nedeplanace



volná deformace $\varepsilon_x = 0$

vázaná deplanace $\varepsilon_x \neq 0$

31. 10. 2017

VOLNÉ KROUCENÍ



KROUCENÍ KRUHOVÉHO A MEZIKRUHOVÉHO PRŮŘEZU

- prosté kroucení $M_x = M_k \Rightarrow \tau_{xs}$

kruhový průřez nedeplanuje

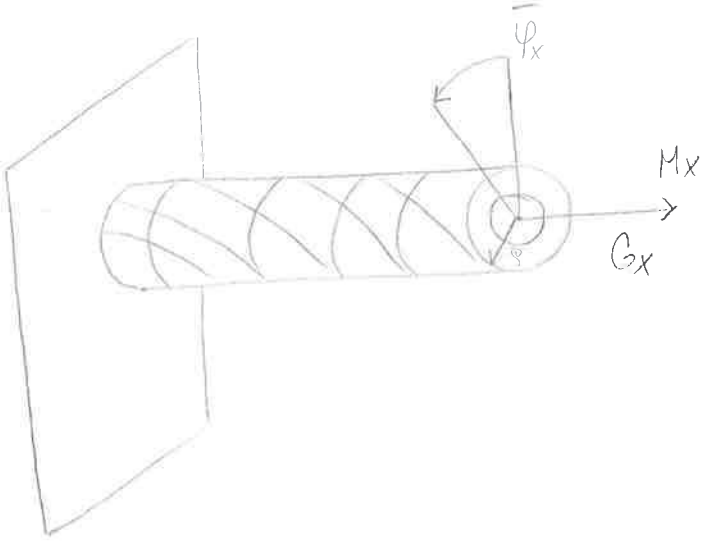
a) osa nosníku zůstane po deformaci přímá

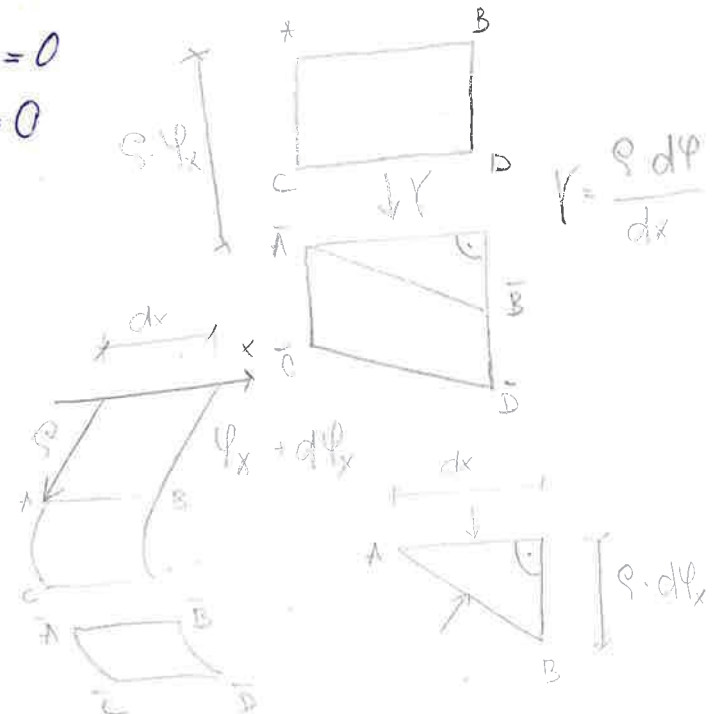
b) průřezy zůstanou rovinnými i po deformaci a vzájemně se nevzdálí

c) jednotlivé průřezy se otáčejí jako tuhé celky

z těchto předpokladů $\varepsilon_x = 0$

$\sigma_x = 0$





GEOMETRICKÉ A STATICKÉ PODMÍNKY

1) $\gamma = \frac{\rho \cdot d\varphi}{dx}$ $\quad \omega = \frac{d\varphi}{dx}$

2) $\tau_{xs} = G \cdot \gamma = G \cdot \rho \cdot \omega$ $\quad \gamma \ldots$ úhel skosení



3) $M_x = \int_A \rho \, ds = \int_A \rho \cdot \tau_{xs} \, dA = \int_A \rho \cdot G \cdot \rho \cdot \omega \, dA = G \cdot \omega \cdot \int_A \rho^2 \, dA = G \cdot \omega \cdot I_p$

moment setrvačnosti

$I_p = I_y + I_z$



4) ze 3) $\quad \omega = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_x}{G \cdot I_p}$

5) ze 4) do 2)

$$\tau_{xs} = \frac{M_x}{I_p} \cdot \rho$$



$$\varphi_x = \int \omega \, dx = \int \frac{M_x}{G \cdot I_p} \cdot dx$$



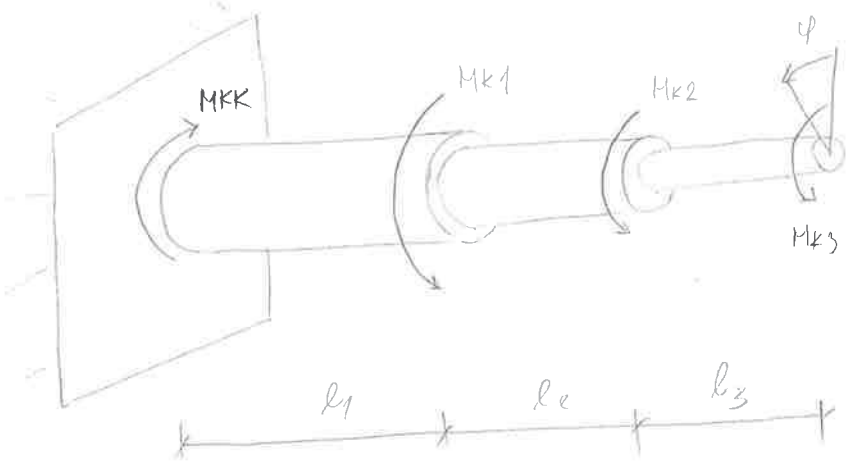
x = 0 $\quad \varphi_x = 0$

$$\varphi_x = \frac{M_x}{G \cdot I_p} \cdot x$$

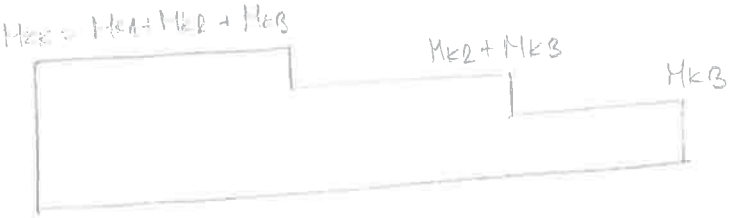


$$\varphi_{b-a} = \int_a^b \frac{M_x}{G \cdot I_p} \, dx = \frac{M_x}{G \cdot I_p} (b - a)$$

(Pr) Vypočítajte pootočenie konzoly vyrobenej z 3 valcov

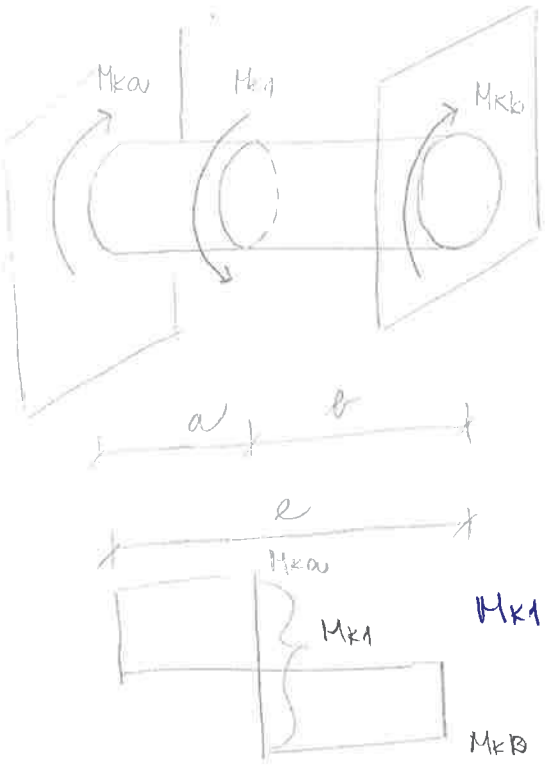


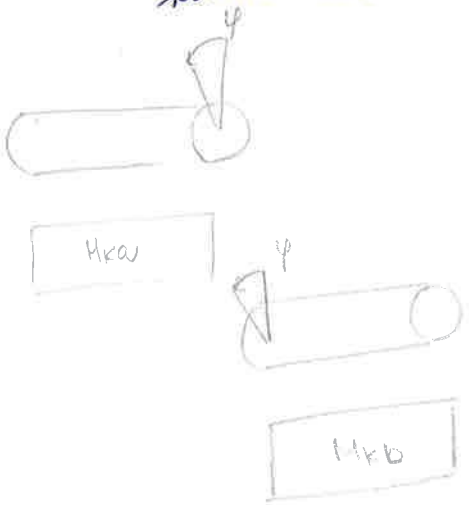
staticky určitá konštrukcia



$$\varphi = \frac{M_{kK} \cdot l}{G \cdot I_{p1}} + \frac{(M_{k2} + M_{k3}) \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_{k3} \cdot l_3}{G \cdot I_{p3}}$$

staticky neurčitá konštrukcia





$M_{k1} = M_{ka} + M_{kb}$

$\varphi = \varphi$

$$\frac{M_{ka} \cdot a}{G \cdot I_p} = \frac{M_{kb} \cdot b}{G \cdot I_p}$$

$M_{ka} \cdot a = M_{kb} \cdot b$

$M_{ka} = M_{kb} \cdot \frac{b}{a}$

$M_{ka} = (M_{k1} - M_{ka}) \frac{b}{a}$

$M_{ka} \cdot a = M_{k1} \cdot b - M_{ka} \cdot b$

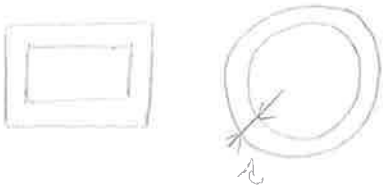
$M_{ka} \cdot a + M_{ka} \cdot b = M_{k1} \cdot b$

$M_{ka}(a+b) = M_{k1} \cdot b$

$M_{ka} \cdot l = M_{k1} \cdot b$

$$M_{ka} = M_{k1} \frac{b}{l}$$

TENKOSTENNÝ UZAVŘENÝ PRŮŘEZ

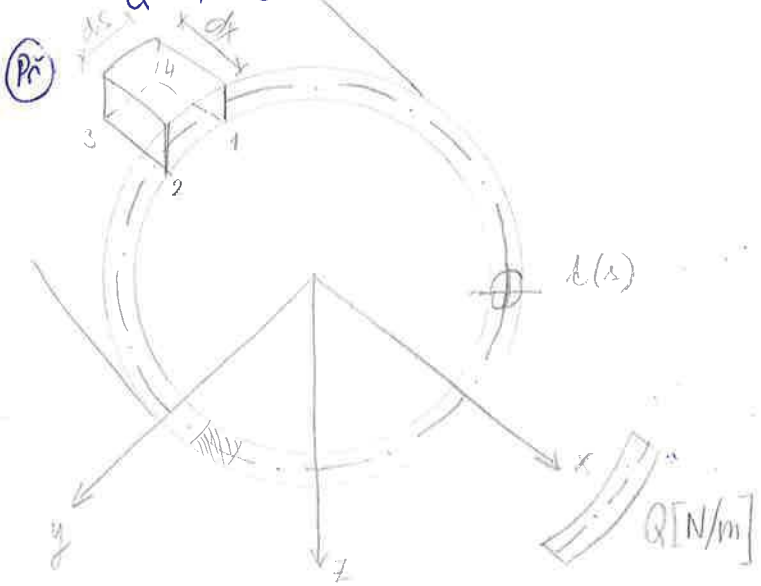


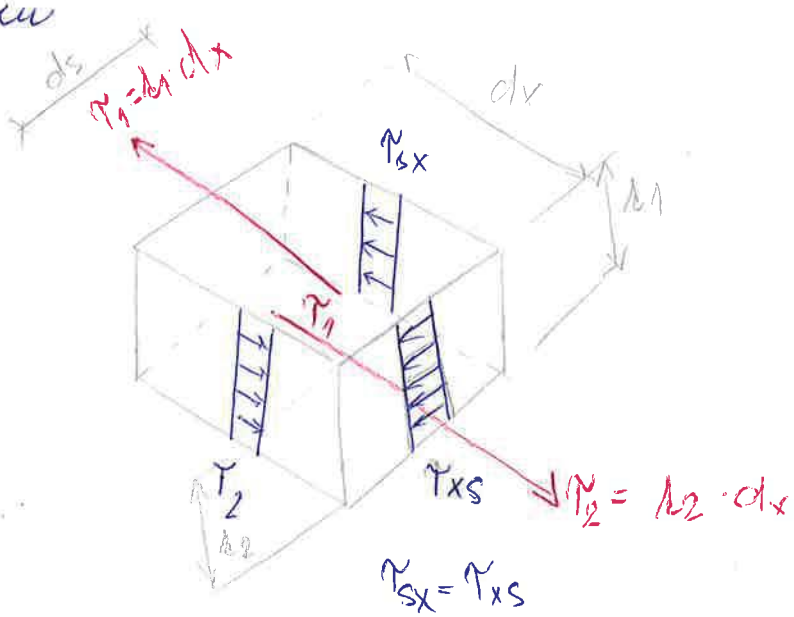
- tl. t ... relativně malá potom lze předpokládat, že smyková napětí jsou konstantní podél celé tloušťky
- směr napětí musí být tečný vůči obvodu přibližně ve střednici tečny průřezu
- výslednice smykového napětí $Q\,[Nm^{-1}]$ v libovolném řezu napříč řezu průřezu je konstantní podél celé uzavřené střednicové křivky průřezu

$F \cdot A \cdot t = Q$

$\tau \cdot t = Q$ [N/m]

$Q = \tau \cdot t$





$\tau_{sx} = \tau_{xs}$

$\sum F_x = 0$

$S_1 = S_2$

$\tau_1 \cdot t_1 \cdot dx = \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx$

$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2$

$Q = \tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 = \tau_{xs}(s)\, t(s) = \text{konstanta}$

$M_x = \oint_A dM_x = \oint_A dF \cdot r = \oint_A \tau_{xs} \cdot t \cdot r\, ds =$

$= \tau_{xs} \cdot t \cdot \oint_A r \cdot ds = \tau_{xs} \cdot t \cdot 2A_x$

$2 \cdot A_x$

$$\tau_{xs} = \frac{M_k}{2 A_k \cdot t}$$





$$\bar{M} = \frac{M_K}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

$$\bar{F} = \frac{\bar{M}}{r} = \frac{M_K}{2\pi r^2}$$

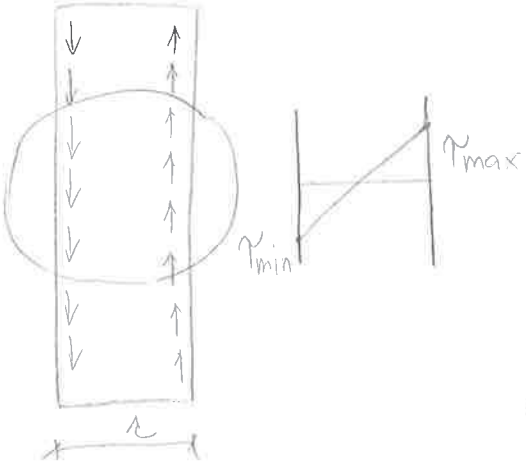
$$\tau_{xs} = \frac{\bar{F}}{\bar{A}} = \frac{M_K}{2\pi \cdot r^2 \cdot 1t}$$

TENKOSTENNÉ OTEVŘENÉ PRŮŘEZY



I_t .. moment tuhosti v prostém kroucení

$$I_t = \frac{1}{3} h \cdot t^3 \qquad \frac{t}{h} = 0$$



$$\max \tau_{xs} = \frac{M_K}{I_t} \cdot t$$

průřez	η
úhelník	1
I	1,2
L ⌐	1,12
I	1,5
T	1,4

> VALCOVANÉ

– SVAŘ. S VÝSTUŽKEM

pro průřez složený z obdélníků

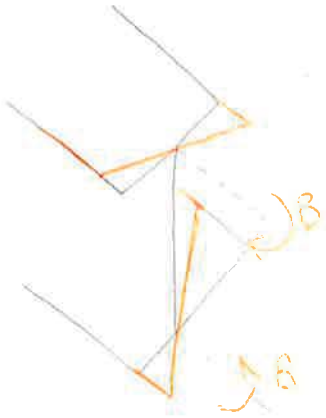
$$I_t = \eta \sum_{i=1}^{n} I_{t1} = \eta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} h \cdot t_1^3$$

$$\varphi_x = \frac{M_x \cdot l}{G \cdot I_t}$$

7. 11. 2017



$$\tau_{x\Delta} = \frac{M_k}{I_t} \cdot t$$



- bimoment B $\quad B = -E \cdot I_w \cdot \varphi''$
- moment ohybového kr.
$M_w = \frac{dB}{dx} = -E I_w \cdot \varphi'''$
- moment prostého kroucení
$M_k = G \cdot I_t \cdot \varphi'$

$M_x = M_w + M_k$

$M_x = -E \cdot I_w \cdot \varphi''' + G \cdot I_t \cdot \varphi'$

tělo
$\textcircled{\sim} = \frac{d\varphi}{dx}$

$$M_x = -E \cdot I_w \cdot \textcircled{\sim}'' + G \cdot I_t \cdot \textcircled{\sim}$$

$$\sigma_x = \frac{B \cdot w}{I_w}$$

$$\tau_w = \frac{M_w \cdot S_w}{I_w \cdot t}$$

$$\tau_t = \frac{M_k \cdot t}{I_t}$$

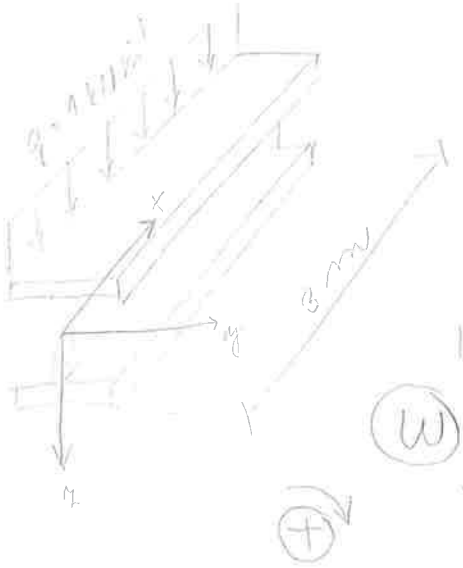
$$\textcircled{\sim}(x) = C_1 \cdot \sinh(\lambda \cdot x) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot x) - \frac{\lambda}{G \cdot I_t} \cdot \int_0 M_x(\xi) \cdot \sinh(\lambda \cdot (x - \xi))\, d\xi$$

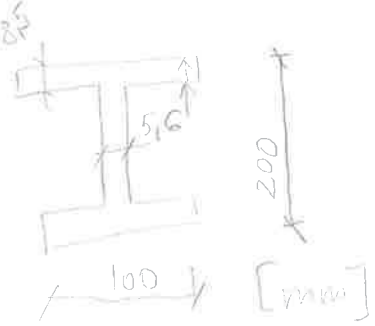
$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}} \; [m^{-1}]$$

 vetknutí $\textcircled{\sim} = 0$ volný konec $\frac{d\textcircled{\sim}}{dx} = 0$



Určete reakční ..... tělesa u konzoly na obrázku
s profilu IPE 200. Vykreslete průběhy momentů.





$G = 81\ GPa$

$I_t = 69{,}8 \cdot 10^3\ mm^4$

$E = 210\ GPa$

$$\omega = \int q \cdot ds = \int (100 - 4{,}25) \cdot ds = 95{,}75 \cdot y$$

$$I_w = \int \omega^2 dA = 2 \cdot \int_{91{,}5}^{100} \int_{-50}^{50} (95{,}75\,y)^2 ds \cdot dz = 13 \cdot 10^9\ mm^6$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{G \cdot I_t}{E \cdot I_w}} = \sqrt{\frac{81 \cdot 10^9 \cdot 69{,}8 \cdot 10^{-9} \cdot 0{,}001^4}{210 \cdot 10^9 \cdot 13 \cdot 10^9 \cdot 0{,}001^6}} = 1{,}43082\,24$$

$$\textcircled{\sim}(x) = c_1 \cdot \sin h(\lambda \cdot x) + c_2 \cdot \cos h(\lambda x) - \frac{\lambda}{G \cdot I_t} \int_0^x -q \cdot \{ \cdot 0{,}05 \cdot \sin h(\lambda \cdot (x - \{)) \cdot d\{$$



$$\textcircled{\sim}(x) = c_1 \cdot \sin(\lambda x) + c_2 \cdot \cos h(\lambda x) + \frac{q}{20 \cdot G I_t} \cdot \left(\frac{\sin h(\lambda x)}{\lambda} - x \right)$$

pro $x = 0$ $\quad \frac{d\textcircled{\sim}}{dx} = 0$ ... $\sigma_x = 0$ $(B = 0)$

$x = 3$ $\quad \textcircled{\sim} = 0$ ... $\sigma_x \neq 0$ není deplanace

$$\frac{d\textcircled{\sim}}{dx} = c_1 \cdot \lambda \cdot \cos h(\lambda x) + c_2 \cdot \lambda \sin h(\lambda x) + \frac{q}{20 \cdot G \cdot I_t} \cdot (\cos h(\lambda \cdot x) - 1)$$

$$c_1 \cdot \lambda \cos h(\lambda \cdot 3) + c_2 \cdot \lambda \cdot \sin h(\lambda \cdot 3) + \frac{q}{20 \cdot G \cdot I_t} \cdot (\cos h(\lambda \cdot 3) - 1) = 0 \quad c_1 = 0$$

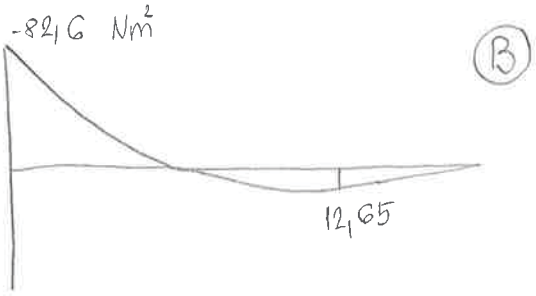
$$0 \cdot \sin h(\lambda \cdot 3) + C_2 \cdot \cosh(\lambda \cdot 3) + \frac{qr}{10 \cdot G \cdot I_t} \cdot \left(\frac{\sin(\lambda \cdot 3)}{\lambda} - 3\right) = 0$$

$$C_2 \cdot \cosh(1{,}4308 \cdot 3) + \frac{1 \cdot 10^3}{20 \cdot 81 \cdot 10^9 \cdot 69{,}8 \cdot 10^3 \cdot (0{,}001)^4} \cdot \left(\frac{\sin h(1{,}4308) \cdot 3}{1{,}4308} - 3\right) = 0$$

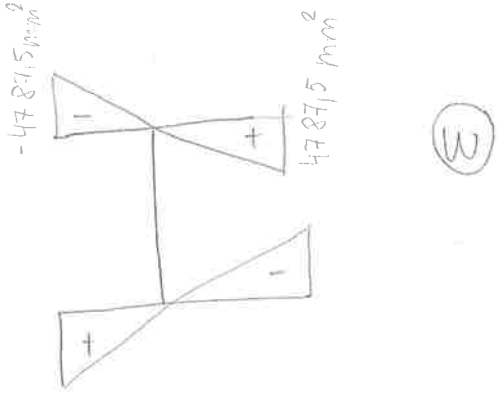
$$C_2 = -5{,}43557 \cdot 10^{-3}$$

$$B(x) = -E \cdot I_w \cdot \frac{d\varphi}{dx} = -2730 \cdot (-5{,}43557 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}43082 \cdot \sin h(1{,}4308 \cdot x) +$$

$$+ \frac{1 \cdot 10^3}{20 \cdot 81 \cdot 10^9 \cdot 69{,}8 \cdot 10^3 \cdot 0{,}0014} \cdot (\cosh(1{,}4308 \cdot x) - 1)$$

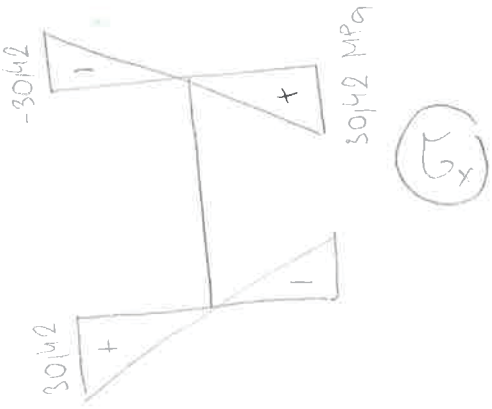


(B)



(W)

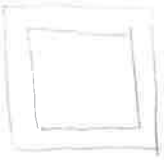
$$\sigma_x = \frac{B \cdot w}{I_w}$$



(σ_x)

TENKOSTIENNÉ UZAVŘENÉ PRŮŘEZY



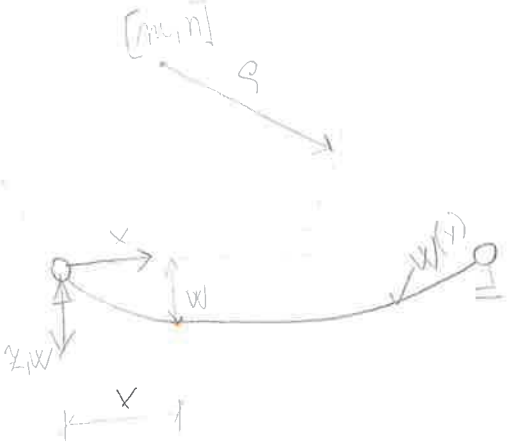


$$\tau_x = \frac{M_k}{I_t} \cdot t \qquad \tau_x = \frac{M_k}{I_p} \cdot \rho \qquad \tau_x = \frac{M_k}{\partial \cdot A_k \cdot t}$$

$$\varphi = \frac{M_k \cdot l}{G \cdot I_t} \qquad I_t = I_p$$

$$I_t = \frac{4 \cdot A_k^2}{\sum \frac{h_i}{t_i}}$$

PŘETVOŘENÍ OHYBANÝCH NOSNÍKŮ



1) $(x-m)^2 + (z-n)^2 = \rho^2$

2) $2\cdot(x-m) + 2\cdot(z-n)\cdot z' = 0$

3) $1 + z'^2 + (z-n)\cdot z'' = 0$

4) $z - n = -\frac{1+z'^2}{z''}$

5) $x - m = z' \cdot \frac{1+z'^2}{z''}$

6) $\left(z' \frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 + \left(-\frac{1+z'^2}{z''}\right)^2 = \rho^2$

$$\left(\frac{1+z'}{z''}\right)^2 \cdot (z'^2 + 1) = \rho^2$$

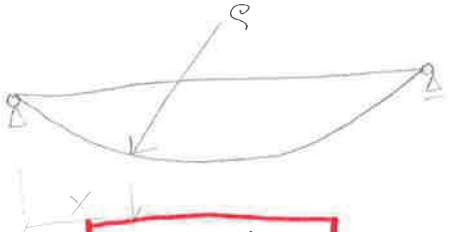
$$\rho = \pm \frac{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}{z''}$$

$$M_y = \frac{1}{\rho} \cdot E \cdot I_y$$

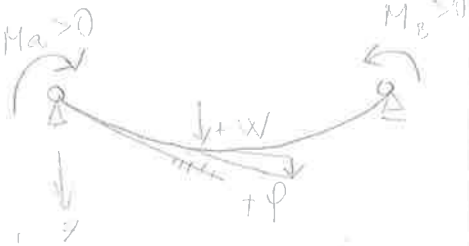
$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{w''}{(1+z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$z'^2 \ll 1$

$$\frac{1}{\rho} = -z'' \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{E \cdot I_y}$$



$$w'' = -\frac{M_y}{E \cdot I_y}$$



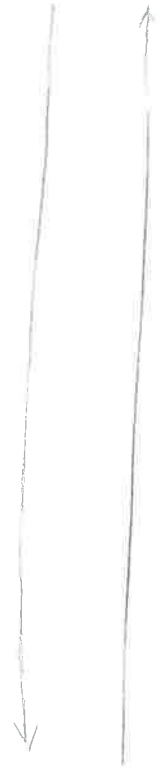
pro otáčení $\varphi = 0$

$w = 0$

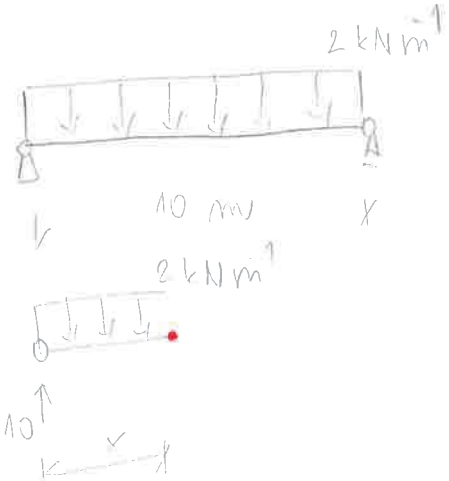
$w = 0$
$\varphi = 0 \cdot w$

Dif. a

Označení ①	Veličina	Obecně	$E \cdot I$ = konst.
	průhyb	w	
	pootočení	$\varphi = w'$	
	ohyb. moment	$M = -E \cdot I \cdot w''$	
	pos. síla	$V = (-E \cdot I \cdot w'')'$	$V = -E \cdot I \cdot w'''$
	příčné zat.	$q = (-E \cdot I \cdot w'')'$	$q = E \cdot I \cdot w^{IV}$



Metodou integrace diferenciální rovnice určete ohybovou čáru nosníku



$E \cdot I = \text{konst.}$

$M_y(x) = 10 \cdot x - 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 10x - x^2$

$w'' \cdot E \cdot I = -10x + x^2$

$w' \cdot E \cdot I = C_1 - 10\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

$w \cdot E \cdot I = C_1 \cdot x + C_2 - 10\frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12}$

$x = 0 \quad w = 0 \quad w(0)\,E \cdot I = C_1 \cdot 0 + C_2 - 10 \cdot \frac{0^3}{6} + \frac{0^4}{12} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

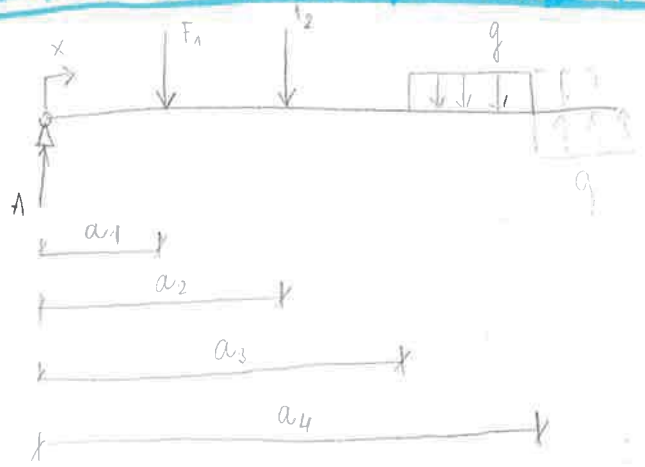
$x = 10 \quad w(10)\,E \cdot I = C_1 \cdot 10 - 10 \cdot \frac{10^3}{6} + \frac{10^4}{12} = 0 \Rightarrow C_1 = 83{,}33\ \text{kN/m}^2$

$w(x) = \frac{1 \cdot 10^3}{EI}\left[83{,}33 \cdot x - \frac{10x^3}{6} + \frac{x^4}{12}\right]$

$W'' = -\frac{M_y}{E I_y}$

CLEBSCHOVA METODA

14. 11. 2017



$$M_y = A\cdot x - \underset{x>a_1}{|}F_1\cdot(x-a_1) - \underset{x>a_2}{|}F_2\cdot(x-a_2) - \underset{x>a_3}{|}q\cdot\frac{(x-a_3)^2}{2} + \underset{x>a_4}{|}q\frac{(x-a_4)^2}{2}$$

a) nosník rozdělím na části (úseky)

b) všechny členy (výrazy) pro ohybový moment v k-tém úseku musí zůstat i v k+tém úseku, přidává další člen

c) při integraci neodstraňujeme závorky dvojčlenů

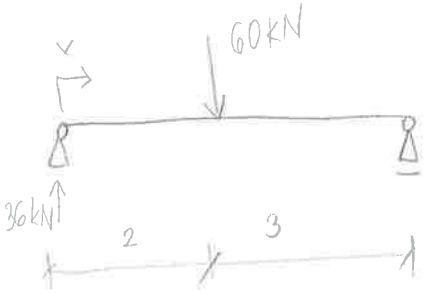
$$\int(x-2) = \frac{(x-2)^2}{2}$$

$$-\cancel{\frac{x^2}{2}} \cancel{-2x}$$

(PŘ) u nosníku vypočtěte průhyb tuhosti hřídele a maximální ohyb.

$E = 210\ GPa$

$I_y = 7590\cdot10^{-8}\ m^4$



$$M(x) = 36\cdot x - \underset{x>2}{|}60\cdot(x-2)$$

$$W'' = -\frac{M_y}{E\cdot I_y}$$

$$EI_y\cdot W'' = -36\cdot x + \underset{x>2}{|}60\cdot(x-2)$$

$$EI_y\cdot W' = C_1 - 36\frac{x^2}{2} + \underset{x>2}{|}60\cdot\frac{(x-2)^2}{2}$$

$$EI_y\cdot W = C_1 x - 36\frac{x^3}{6} + \underset{x>2}{|}60\cdot\frac{(x-2)^3}{6}$$

$x = 0$, $w = 0$: $\quad c_1 \cdot 0 + c_2 - 36\frac{0^3}{6} = 0$

$$c_2 = 0$$

$x = 5$, $w = 0$: $\quad c_1 \cdot 5 - 36\frac{5^3}{6} + 60 \cdot \frac{(5-2)^3}{6} = 0$

$$c_1 = 96\ kNm^2$$

$$w(x) = \frac{1 \cdot 10^3}{EI_y}\left[96 \cdot x - 6x^3 + \underset{x>2}{\boxed{\ }} 10 \cdot (x-2)^3\right] \quad [m]$$

Určení maximálního průhybu v místě, kde je pootočení nulové.

$w' = 0$

$$EI_y \cdot w' = 96 - 36\frac{x^2}{2} + \underset{x>2}{\boxed{\ }} 60\frac{(x-2)^2}{2} = 0$$

$$96 - 18x^2 + 30x^2 - 120x + 120 = 0$$

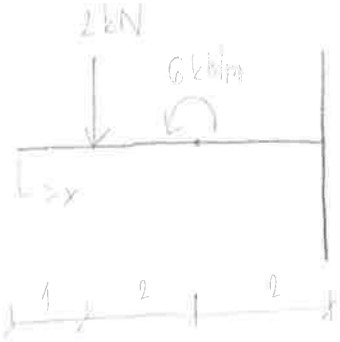
$$12x^2 - 120x + 216 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot 12 \cdot 216}}{2 \cdot 12} = \begin{cases} x_1 = 2{,}36\ m \\ \text{mimo nosník} \end{cases}$$

$$w_{max} = w(2{,}36) = 0{,}00929\ cm$$

$$\approx 1\ cm$$

(Př)



$EI_y = konst$

$M_y = -\underset{x>1}{2} \cdot (x-1) - \underset{x>3}{6}$

$EI_y \cdot w'' = \underset{x>1}{2} \cdot (x-1) + \underset{x>3}{6}$

$EI_y \cdot w' = c_1 + \underset{x>1}{2} \frac{(x-1)^2}{2} + \underset{x>3}{6}(x-3)$

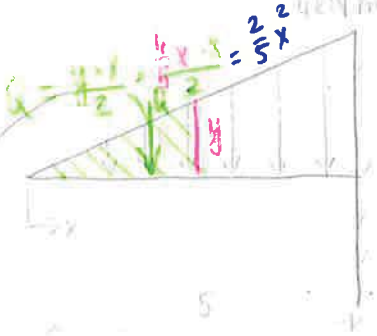
$EI\,w = c_1 \cdot x + c_2 + \underset{x>1}{2} \cdot \frac{(x-1)^3}{6} + 6 \cdot \frac{(x-3)^2}{2}$

$x = 5,\ w = 0$

$x = 5,\ w' = 0$

$\Big\} \; c_1, c_2$

(Př)



$E \cdot I_y = konst$

$M_y = -\frac{2}{5}x^2 \cdot \frac{x}{3} = -\frac{2}{15}x^3$

$EI_y \cdot w'' = \frac{2}{15}x^3$

$EI_y \cdot w' = c_1 + \frac{2}{15} \cdot \frac{x^4}{4}$

$EI_y \cdot w = c_1 \cdot x + c_2 + \frac{2}{15} \cdot \frac{x^5}{20}$

$W(x) = \frac{1}{E \cdot I_y} \cdot \left[c_1 \cdot x + c_2 + \frac{x^5}{150} \right]$

$\frac{4}{5} = \frac{y}{x}$

$y = \frac{4}{5}x$

$\frac{4}{10}x^2 = \frac{2}{5}x^2$

MOHROVA METODA

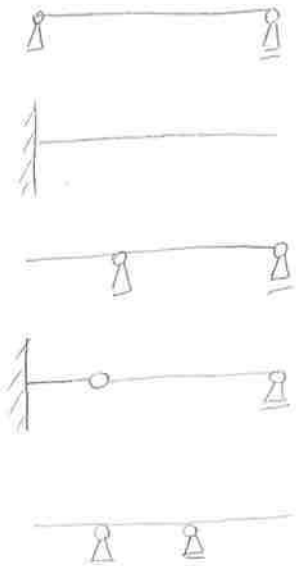
$$\frac{d^2M}{dx^2} = -q \quad \text{analogicky} \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I_y} \cdot x - \bar{q}$$

$$\bar{q} = \frac{M}{EI_y}$$

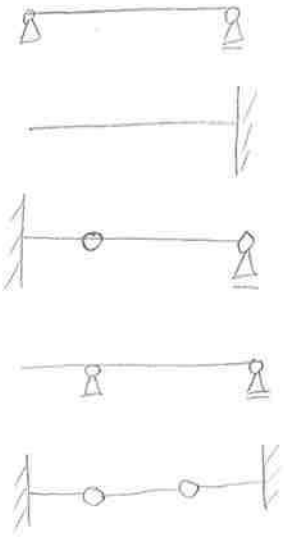
- zavedeme-li fiktivní zatížení $\bar{q} = \frac{M}{EI_y}$ kterým zatížíme fiktivní nosník
- fiktivní nosník musí být podepřen takovým způsobem aby byli vůči ohybovému momentu a posouvající síly splněny tylež okrajové podmínky, případně podmínky spojitosti jaké plní skutečný nosník vůči průhybu a pootočení

SKUTEČNÝ NOSNÍK		FIKTIVNÍ NOSNÍK	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi = 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} = 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} \neq 0$ $\bar{V} \neq 0$	
$w = 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} = 0$ $\bar{V} \neq 0$	
$w \neq 0$ $\varphi \neq 0$		$\bar{M} \neq 0$ $\bar{V} \neq 0$	

SKUTEČNÉ



FIKTIVNÍ



1. Na daném staticky určitém nosníku vyřeším průběh ohybového momentu
2. Vytvořím fiktivní nosník a ten zatížím přetvářejícím momentovým obrazcem. Pokud platí:
   a) nosník má všude stejný průřez
      $I_y = konst.$
   b) nosník je celý ze stejného materiálu
      $E = konst.$

- hodnotou $EI_y = konst.$ dělím vypočítaný fiktivní moment, čili fiktivní posouvající sílu až na konec

$$w = \frac{\bar{M}}{EI_y} \qquad \varphi = \frac{\bar{V}}{EI_y}$$

- neplatí-li a) či b) musím momentový obrazec napřed upravit podílem $E_i \cdot I_{yi}$ čili počítat přímo se zatížením $\bar{q}$

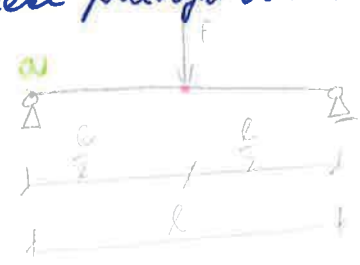


3.) Tam kde chci určit průhyb vypočítám na fiktivním nosníku moment.

Tam kde chci určit stočení vypočítám na fiktivním nosníku posouvající sílu.

4) Když platilo a) a b) tak skutečné hodnoty deformací získám dělením $E \cdot I_y$.

(Př) Prostý nosník stálého průřezu je ...
Určete průhyb od břemene a pootočení ...





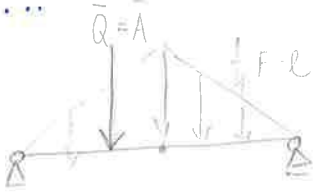
$E \cdot I_y = konst.$

$\bar{M}\left(\frac{l}{2}\right) = \bar{A} \cdot \frac{l}{2} - \bar{Q} \cdot \frac{l}{2 \cdot 3} = \uparrow \bar{A}$

$= F \cdot \frac{l^3}{48}$

$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\bar{M}\left(\frac{l}{2}\right)}{E \cdot I} = F \cdot \frac{l^3}{48 \cdot E \cdot I}$

$\varphi\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\bar{A}}{E \cdot I} = F \cdot \frac{l^2}{16 \cdot E \cdot I}$



$\bar{A} = \frac{1}{4} F \cdot l \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$\bar{A} = \frac{F l^2}{16}$

$\bar{Q} = \bar{A} = F \cdot \frac{l^2}{16}$

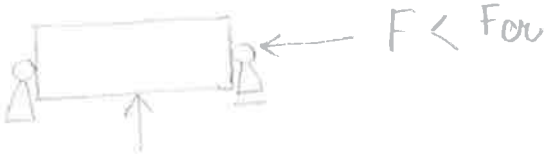
21. 11. 2017

STABILITA

stav stabilní

1)



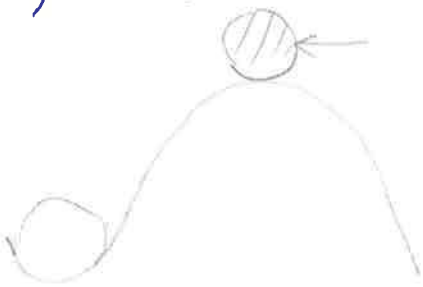


2) stav indiferentní





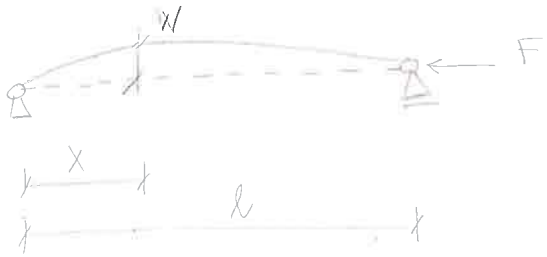
3) stav nestabilní





Stabilita je schopnost soustavy vracet se do původního stavu jakmile pomine příčina, která změnu stavu vyvolala.

Př.



$$M = F \cdot w$$

$$w'' = \frac{-M}{E \cdot I} = -\frac{F \cdot w}{E \cdot I}$$

$$F = \alpha^2 \cdot E \cdot I$$

$$w'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot w = 0 \qquad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$w'' + \alpha^2 w = 0$$

1) $w(x) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) \Rightarrow$ **$w(x) = c_1 \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right)$**

$w(0) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot 0) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot 0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$w(\ell) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot \ell) = 0$

$\neq 0 \quad = 0$

$\alpha \cdot \ell = k \cdot \pi \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \alpha = \frac{k \cdot \pi}{\ell}$

$w(x) = c_1 \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi}{\ell} \cdot x\right)$

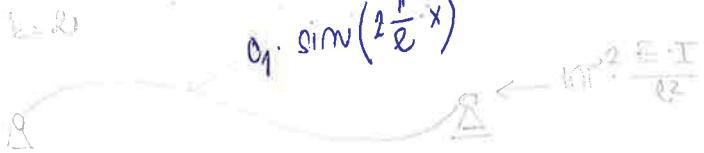
$F_{cr} = \alpha^2 \cdot E \cdot I = \left(\frac{k \cdot \pi}{\ell}\right)^2 \cdot E \cdot I$

$F_{cr} = k^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$

$w' = c_1 \cdot \cos(\alpha x) \cdot \alpha + c_2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) \alpha$

$w'' = c_1 \cdot \alpha^2 \cdot \sin(\alpha \cdot x) - c_2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha \cdot x)$





$F < F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$ stabilní stav

$F = F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$ indiferentní stav

$F > F_{cr}$ nestabilní stav



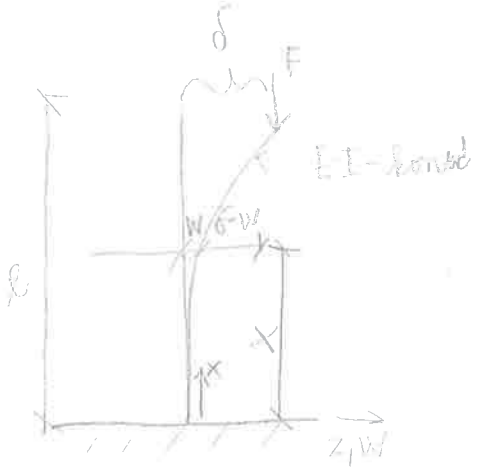


$$\sigma_x = \frac{F}{A} \leq f_y \quad (235\ MPa)$$

$$F \leq f_y \cdot A$$

$$F \leq F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$$

(Pr)



$$M = -F \cdot (\delta - w)$$

$$w'' = \frac{-M}{E \cdot I} = \frac{F}{E \cdot I}(\delta - w) \qquad \alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$w'' + \alpha^2 w = \alpha^2 \cdot \delta$$

$$w(x) = c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot x) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot x) + \delta$$

$w(0) = 0$ $\quad c_1 \cdot \sin 0 + c_2 \cdot \cos 0 + \delta = 0$

$w'(0) = 0$ $\quad \alpha \cdot c_1 \cdot \cos 0 - \alpha \cdot c_2 \cdot \sin 0 = 0$

$w(\ell) = \delta$ $\quad c_1 \cdot \sin(\alpha \cdot \ell) + c_2 \cdot \cos(\alpha \cdot \ell) + \delta = \delta$

$$\left.\begin{array}{l} c_2 + \delta = 0 \\ \alpha \cdot c_1 = 0 \\ c_1 \cdot \sin(\alpha\ell) + c_2 \cdot \cos(\alpha\ell) = 0 \end{array}\right\}$$

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 + 2 \cdot x_2 = 0$$

$$\det = \underset{\neq 0}{\delta} \cdot \underset{=0}{\cos(\alpha \cdot \ell)} = 0$$

$$\alpha \cdot \ell = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = \frac{\pi}{2 \cdot \ell}$$

$$\alpha^2 = \frac{F}{E \cdot I}$$

$$F_{cr} = \alpha^2 \cdot EI = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{E \cdot I}{\ell^2}$$

$$c_2 = \delta$$

$$w = c_2 \cdot \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2\ell}\right)$$

IZPĚRNÁ DÉLKA

- Ve znaze zobecnit základní typy Eulerova případu je možné kritickou sílu pružného prutu stálého průřezu s různými okrajovými podmínkami vyjádřit souhrnně ve tvaru $F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$ kde L_{cr} je tzv. <u>vzpěrná délka</u>, která záviší na okrajových podmínkách prutu.



$$F_{cr} = \pi^2 \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

$$L_{cr} = l$$



$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2}$$

$$= \frac{1}{4} \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

$$\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{L_{cr}^2} = \frac{1}{4} \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

$$L_{cr} = 2\,l$$



$$4\pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$



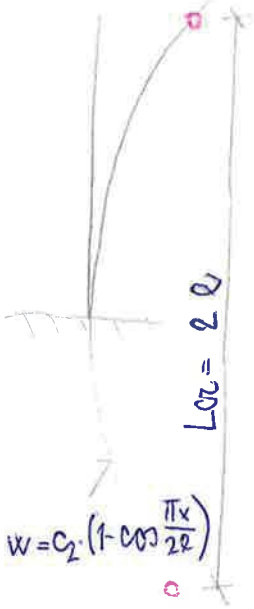
$$20{,}19 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

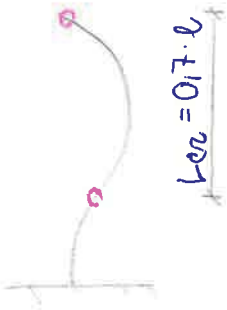
$$L_{cr} = 0{,}5 \cdot l$$

- délka kloubově uloženého prutu z hodné ohybové tuhosti $E \cdot I$, který ztratí stabilitu při kritické síle vyčíslené na prutu s řešenými okrajovými podmínkami
- VD lze definovat jako vzdálenost inflexních bodů na vypočteném prutu

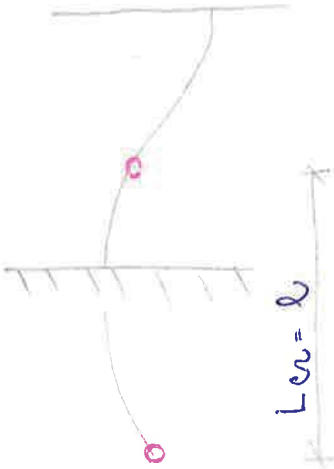


$L_{cr} = l$





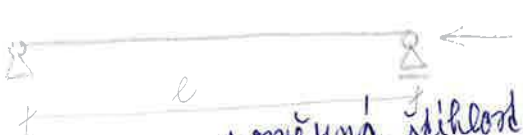




(Př) Průřez 1. třídy S 235

$F \leq F_d$

$F_d = \chi \cdot A \cdot f_y$



poměrná štíhlost: $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{\lambda}{93{,}9}$ ← štíhlost

← S 235



štíhlost: $\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$

- stabilitní pojetí vzpěru
  - přímý centricky zatížený prut



- pevnostní pojetí vzpěru
  - imperfekce

1)





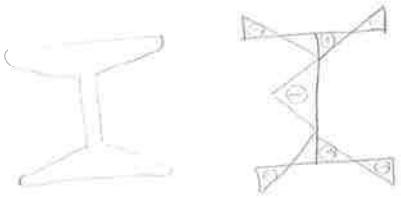


2)



$t_2 = \sqcup \pm \Delta$

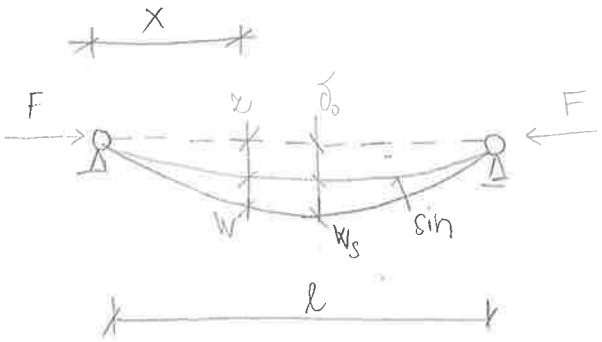
3) Vlastní pnutí



4) Fyzikální mechanické vlastnosti oceli mají určité odchylky $E = 210$ GPa

5) Zatížení nepůsobí ideálně v předpokládané pozici

28.11.2017



$F_d = \chi \cdot A \cdot f_y$
$\uparrow \lambda$





$$w = w_s \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$M = F \cdot (z + w) = F \cdot (\delta_0 + w_s) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$w'' = \frac{-M}{E \cdot I}$$

$$-w_s \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} = -\frac{F}{E \cdot I} (\delta_0 + w_s) \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$-w_s \cdot \frac{\pi^2}{l^2} = -\frac{F}{E \cdot I} (\delta_0 + w_s)$$

$$w_s = \frac{F \cdot l^2}{\pi^2 \cdot E \cdot I} (\delta_0 + w_s) = \frac{F}{F_{cr}} (\delta_0 + w_s)$$

$$w_s = \delta_0 \cdot \frac{F}{F_{cr} - F}$$

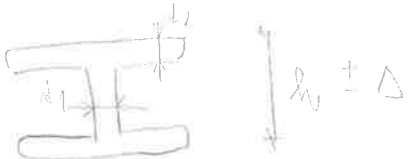
$$\delta = \delta_0 + w_s = \delta_0 + \delta_0 \cdot \frac{F}{F_{cr} - F} = \delta_0 \frac{1}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}$$

$$\boxed{\delta = \frac{\delta_0}{1 - \frac{F}{F_{cr}}}}$$

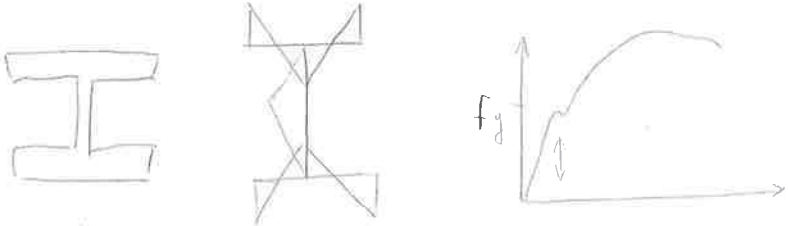
1)



2)



3)



4) $E = 210 \pm 10$ GPa

5)

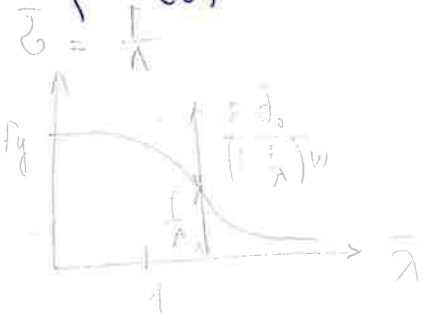


δ_0 ←

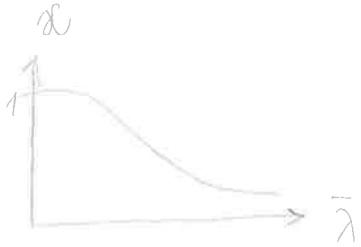
$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \frac{M}{W} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot \delta}{W} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot \delta_0}{\left(1 - \frac{F}{F_{cr}}\right) \cdot W} = f_y$$

$$F_{cr} = \pi^2 \cdot \frac{E \cdot I}{l^2}$$

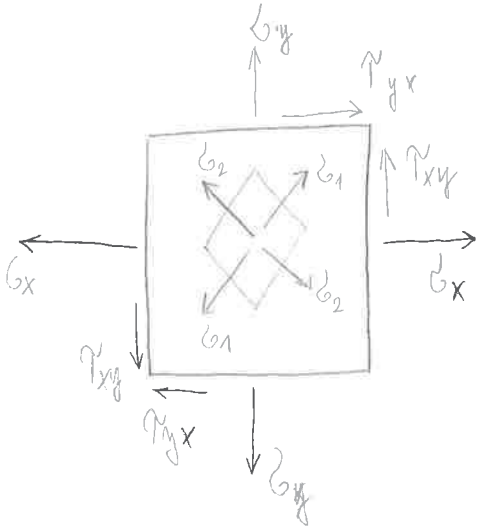
$$\bar{\sigma} = \frac{F}{A} = f_y - \frac{F \cdot \delta_0}{\left(1 - \frac{F}{F_{cr}}\right) \cdot W}$$



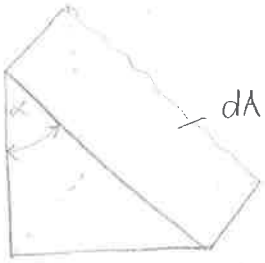
$$F_d = \varkappa \cdot A \cdot f_y$$



HLAVNÍ NORMÁLOVÉ NAPĚTÍ



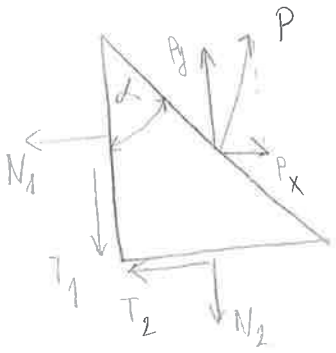
V každém bodě tělesa existují 3 kolmé složky (hlavní) kde $\sigma_n = \sigma$ i $\tau = 0$, kde $\sigma_1 | \sigma_2$ je extrém



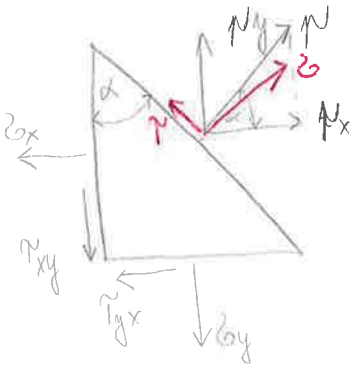
$dA_y = dA \cdot \sin\alpha$

$dA_x = dA \cdot \cos\alpha$

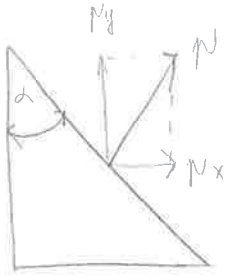
obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

CÍL: nalézt α

$\nu = \sigma_i$ $\tau = 0$

$$\nu_x = \frac{P_x}{dA} \quad , \quad \nu_y = \frac{P_y}{dA}$$

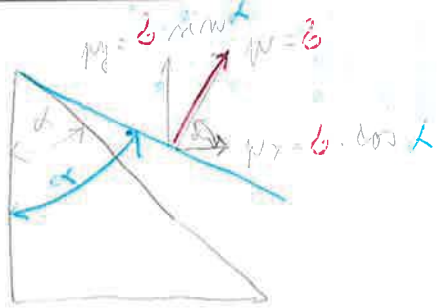
obr. 2: $P_x = N_1 + T_2$

$P_y = N_2 + T_1$

$\nu_x \cdot dA = \sigma_x \cdot dA \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot dA \cdot \sin\alpha$ → $\nu_x = \sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha$

$\nu_y \cdot dA = \tau_{xy} \cdot dA \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot dA \cdot \sin\alpha$ → $\nu_y = \tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha$

Hledáme α pro který $\tau = 0$; $p = \sigma$



$$p_x = p \cdot \cos\alpha = \sigma \cdot \cos\alpha$$

$$\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma(\alpha) & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

- u úhlu α jsme zavedli předpoklad že je to takový úhel kterého na ploše dA platí že $\tau = 0$
- u soustavy rovnic neexistuje řešení $\cos\alpha = 0 \wedge \sin\alpha = 0$ je tedy nutno hledat hodnotu σ (závislou na α), aby rovnice byly lineárně závislé

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 0$$
$$2x + 4y = 0$$

$$det = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

je tedy nutno hledat aby determinand byl $= 0$

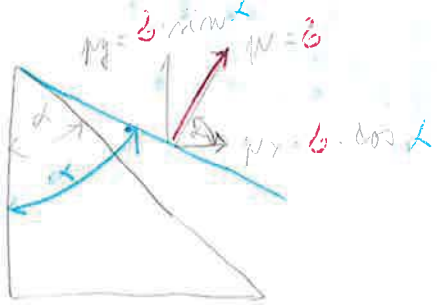
$$det. = (\sigma_x - \sigma) \cdot (\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = \sigma^2 - \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y)}_{I_1} \cdot \sigma + \underbrace{(\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}_{I_2} = 0$$

$$\sigma^2 - I_1 \cdot \sigma + I_2 = 0$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2} =$$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

hledáme α pro který $\tau = 0$; $p = \sigma$



$$p_x = p \cdot \cos\alpha = \sigma \cdot \cos\alpha$$

$$\sigma_x \cdot \cos\alpha + \tau_{xy} \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\tau_{xy} \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot \sin\alpha - \sigma \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma(\alpha) & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \emptyset \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

- u úhlu modré α sme zavedli předpoklad že je to takový úhel kterého na ploše dA platí že $\tau = 0$
- u soustavy rovnic neexistuje řešení $\cos\alpha = 0 \wedge \sin\alpha = 0$ je tedy nutno hledat hodnotu σ (závislou na α), aby rovnice byly lineárně závislé

$$1 \cdot x + 2 \cdot y = 0$$
$$2x + 4y = 0$$

$$\det = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$$

je tedy nutno hledat aby determinand byl = 0

$$\det = (\sigma_x - \sigma) \cdot (\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = \sigma^2 - \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y)}_{I_1} \cdot \sigma + \underbrace{(\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}_{I_2} = 0$$

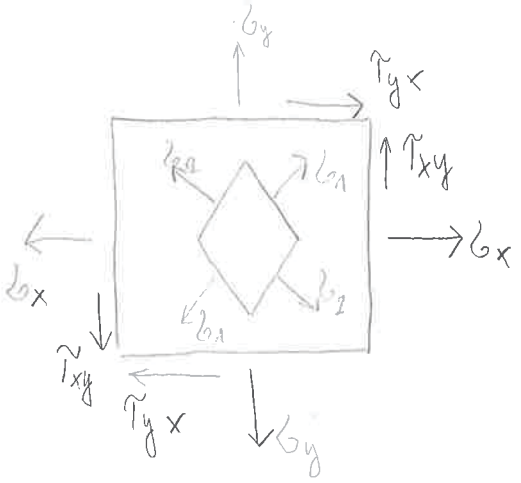
$$\sigma^2 - I_1 \cdot \sigma + I_2 = 0$$

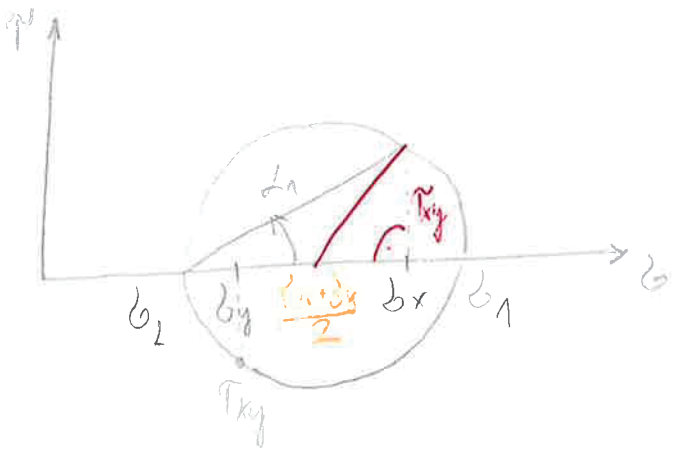
$$\sigma_{1,2} = \frac{I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y)^2 - 4(\sigma_x \cdot \sigma_y - \tau_{xy}^2)}}{2} =$$

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}$$

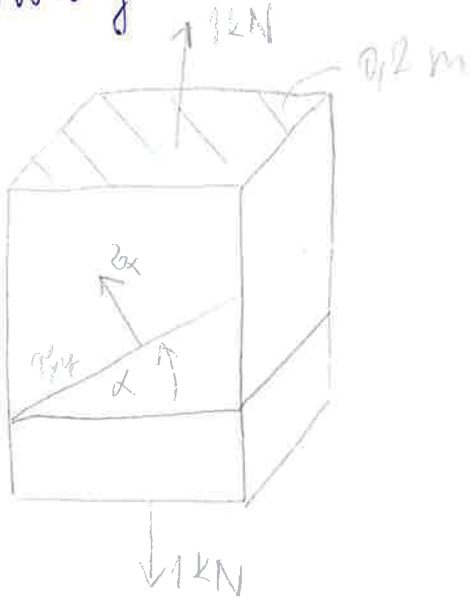
5. 11. 2017

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$





Př Zobrazte normálové a smykové napětí v řezu vedeném pod úhlem α a to graficky pomocí Mohrovy kružnice



$$\sigma_1 = \frac{1\,kN}{0{,}2\,m^2} = 5\,kPa$$

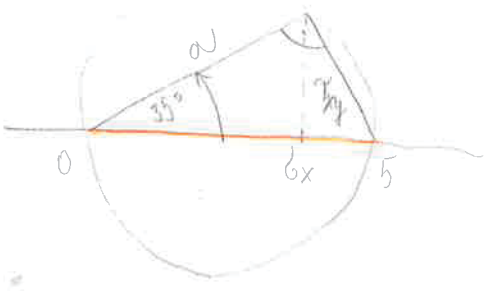
$$\sigma_2 = 0$$

$$a = 5 \cdot \cos 35° = 4{,}09576\ kPa$$

$$\sigma_x = a \cdot \cos 35° = 3{,}355\ kPa$$

$$\tau_{xy} = a \cdot \sin 35° = 2{,}349\ kPa$$

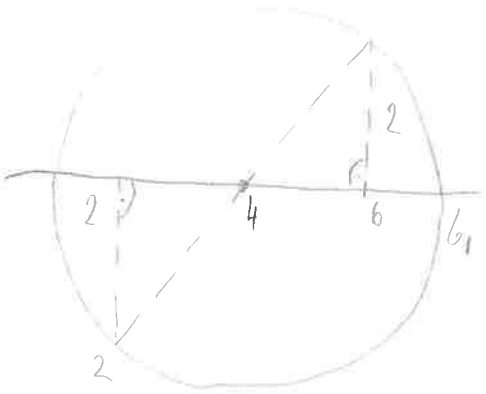
$\alpha = 35°$



(Př) Graficky určete velikost hl. napětí pokud víte, že

$\sigma_x = 6$ kPa, $\sigma_y = 2$ kPa, $\tau_{xy} = 2$ kPa ...

$$\sigma_{1,2} = \frac{6+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6-2}{2}\right)^2 + 2^2} = \begin{cases} 6,82843 \\ 1,17157 \end{cases}$$

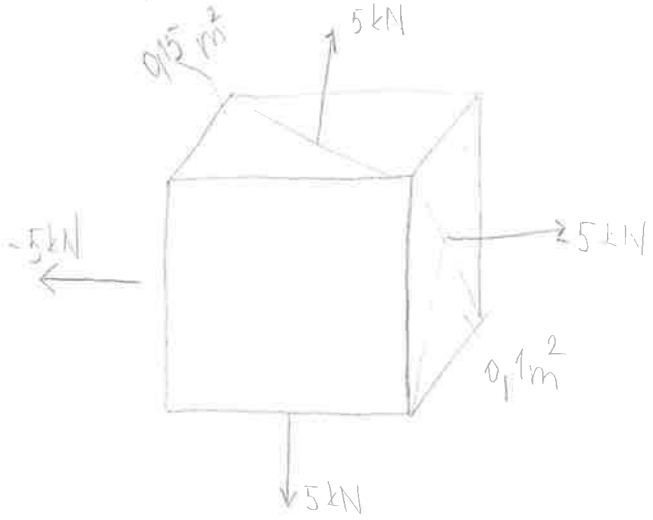


$$det = (\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma) - \tau_{xy}^2 = 0$$

✓ $(6 - 6,82843)\cdot(2 - 6,82843) - 2^2 = 0$

✓ $(6 - 1,17157)\cdot(2 - 1,17157) - 2^2 = 0$

(Př) Vypočtěte normálové a smykové napětí v řezu pod úhlem 20° ...



$$\sigma_1 = \frac{5\,kN}{0,15\,m^2} = 33,33\ kPa$$

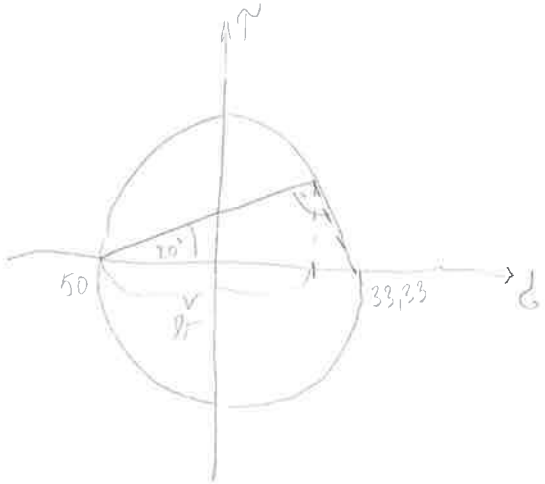
$$\sigma_2 = \frac{-5\,kN}{0,1\,m^2} = -50\ kPa$$

$a = (33,33 + 50)\cdot \cos 20° = 78,305$ kPa

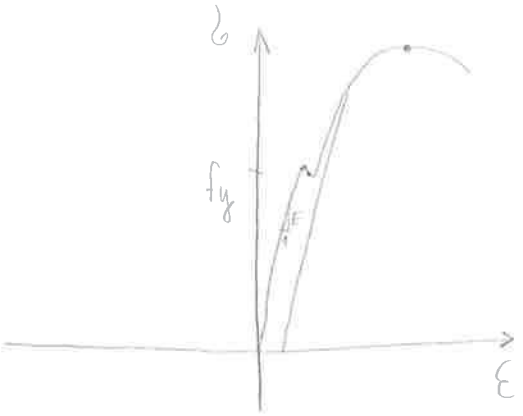
~~σ_x~~ $= b = a \cos 20°$

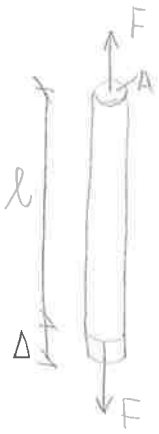
$\sigma_x = b - 50 = a\cdot\cos 20° - 50 = 23,582$ kPa

$T = a \cdot \sin 20° = 26,782$ kPa



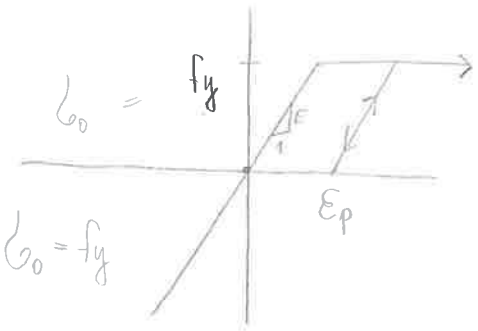
ZÁKLADY TEORIE PLASTICITY





$$\sigma = \frac{F}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{l}$$



$$f = \sigma^2 - \sigma_0^2 = 0$$

$f < 0$ ... materiál se chová pružně

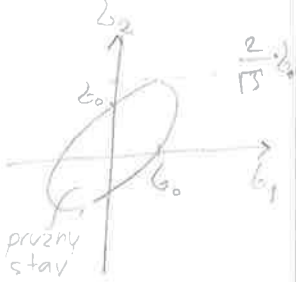
$f \geq 0$ ... není možné

Mizesova podmínka plasticity

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

$$f = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2 \cdot \sigma_0^2 = 0$$

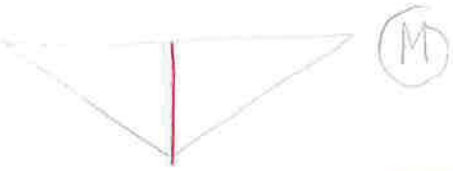
$\sigma_3 = 0$ $\quad f = \sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$ ... rovnice elipsy



SROVNÁVACÍ NAPĚTÍ $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_y$







$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$$

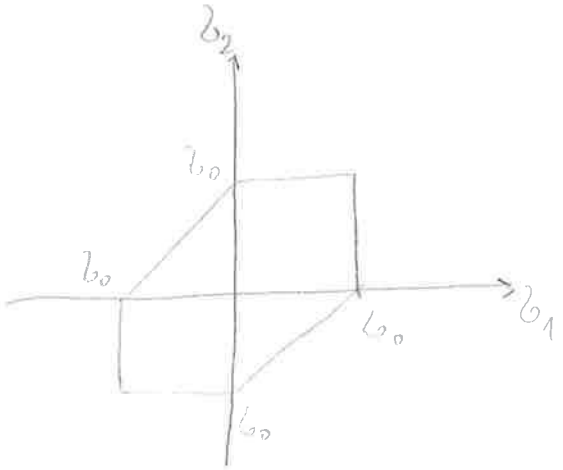
$$\left(\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)\left(\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\sigma_x^2}{4} + 2\frac{\sigma_x}{2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} + \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 - \left[\frac{\sigma_x^2}{4} - \left(\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2\right)\right] + \frac{\sigma_x^2}{4} -$$

$$- 2\frac{\sigma_x}{2}\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} + \frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2 = \sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_0^2$$

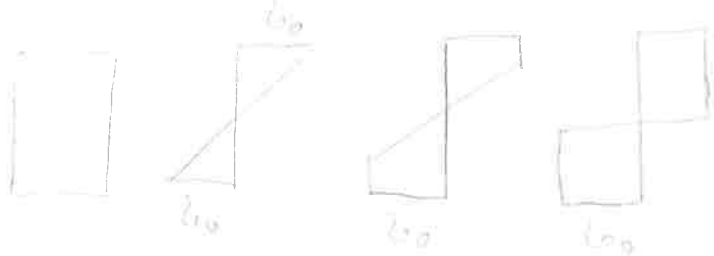
Trescova podmínka plasticity



$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

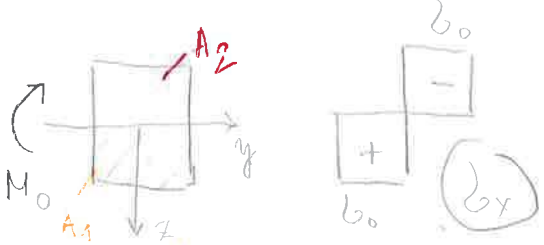
$$f = \sigma^2 + 4\tau^2 - \sigma_0^2 = 0$$

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau^2} \leq f_y$$



M_y M_{yk}





$$M_0 = \int_A \sigma_0 \cdot z \, dA = \sigma_0 \int_{A_1} z \, dA + \sigma_0 \int_{A_2} z \, dA$$

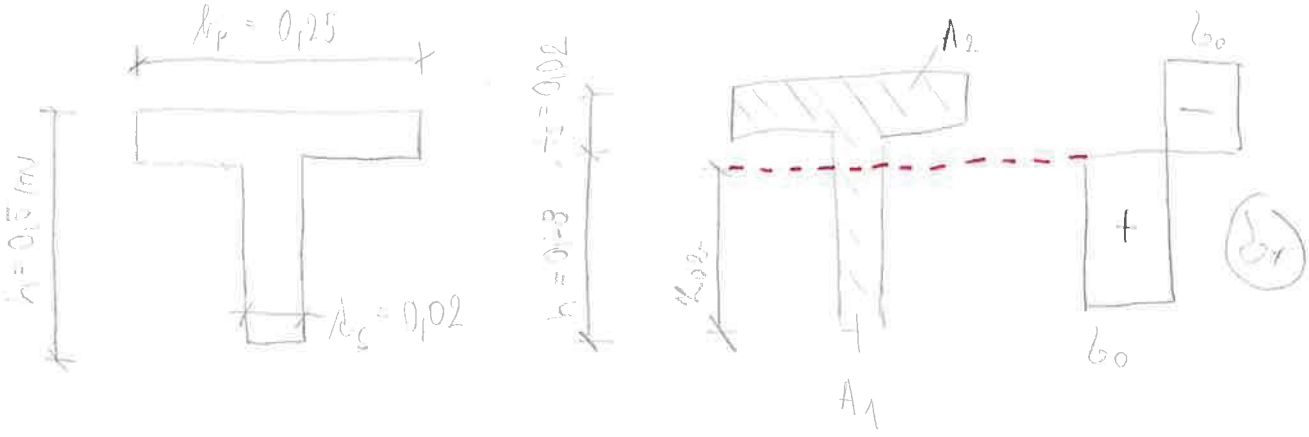
$$= \sigma_0 \cdot S_{1y} + \sigma_0 \cdot S_{2y} = \sigma_0 \cdot W_0$$

$+ \quad + \quad - \quad -$

$$W_0 = |S_{1y}| + |S_{2y}|$$

$$\boxed{M_0 = \sigma_0 \cdot W_0}$$

(Př) Vypočtěte mezní plastický moment M_0



$$A_s \cdot z_{ok} = A_s \cdot (h_s - z_{ok}) + b_p \cdot A_s$$

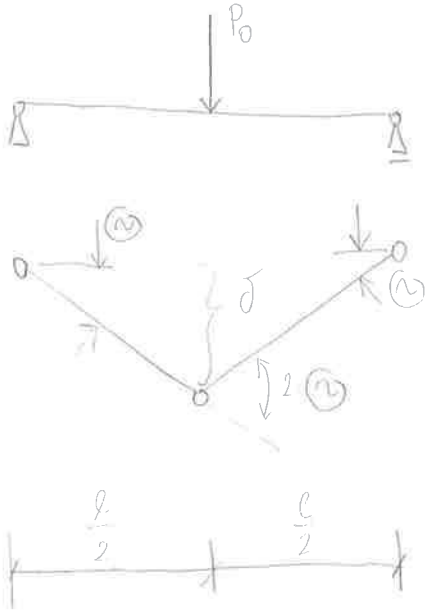
$$z_{ok} = 0{,}365 \text{ m}$$

$$\boxed{W_0} = |S_1| + |S_2| = 2{,}0895 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$|S_1| = z_{ok} \cdot A_s \cdot \frac{z_{ok}}{2}$$

$$|S_2| = A_s \cdot \frac{(h_s - z_{ok})^2}{2} + b_p \cdot A_s \cdot \left(h - z_{ok} - \frac{A_s}{2}\right)$$

Kinematická metoda



M_0

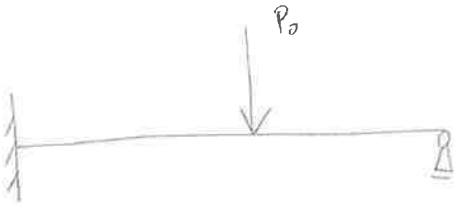
$$P_0 \cdot \delta = M_0 \cdot 2 \cdot \varphi$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\delta}{\frac{l}{2}} = \frac{2 \cdot \delta}{l} \qquad \operatorname{tg}\varphi \approx \varphi \approx \frac{2 \cdot \delta}{l}$$

$$P_0 \cdot \delta = M_0 \cdot 2 \cdot \frac{2 \cdot \delta}{l}$$

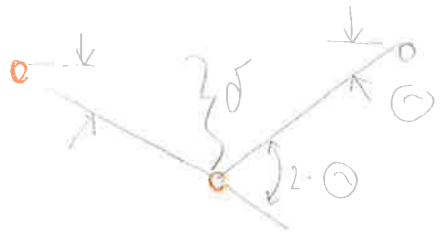
$$P_0 = \frac{4 \cdot M_0}{l}$$

Pr



$$\operatorname{tg}\alpha - \frac{\sigma}{\frac{\ell}{2}} = \frac{2\cdot\sigma}{\ell} \qquad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$$

$$\alpha \approx \frac{2\cdot\sigma}{\ell}$$



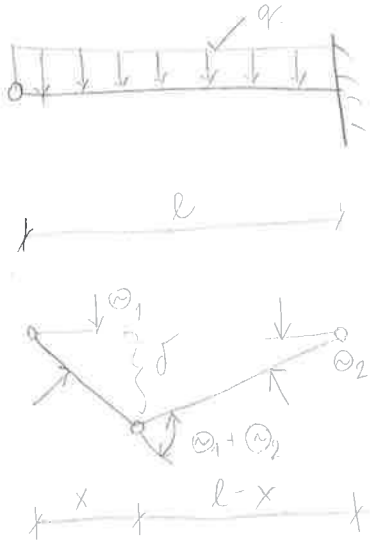
$$P_0\cdot\sigma = M_0\cdot 2\cdot\alpha + M_0\cdot\alpha$$

$$P_0\cdot\sigma = M_0\cdot 3\cdot\alpha = M_0\cdot 3\cdot\frac{2\cdot\sigma}{\ell}$$



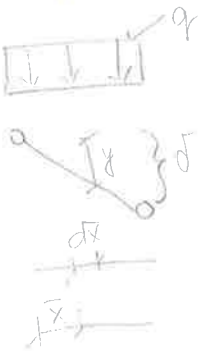
$$\boxed{P_0 = \frac{6\cdot M_0}{\ell}}$$

12. 12. 2017



$$\frac{1}{2} q \cdot \delta \cdot l = M_0 \cdot (\omega_1 + \omega_2) + M_0 \cdot \omega_2$$

práce zatížení



$$\frac{\delta}{x} = \frac{y}{\bar{x}} \qquad y = \bar{x} \cdot \frac{\delta}{x}$$

$$q \cdot d\bar{x} \cdot y = q \cdot d\bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \frac{\delta}{x}$$

$$\int_0^x q \cdot \bar{x} \cdot \frac{\delta}{x} \, d\bar{x} = \left[q \cdot \frac{\bar{x}^2}{2} \cdot \frac{\delta}{x} \right]_0^x =$$

$$= q \frac{x^2}{2} \cdot \frac{\delta}{x} = \frac{1}{2} q \cdot x \cdot \delta$$

$$\omega_1 = \frac{\delta}{x}$$

$$\omega_2 = \frac{\delta}{l-x}$$

$$\frac{dq}{dx} = 0$$

$$q \cdot \delta \cdot l \cdot \frac{1}{2} = M_0 \cdot \left(\frac{\delta}{x} + 2 \cdot \frac{\delta}{l-x} \right)$$

$$q = \frac{2M_0}{l} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{l-x} \right) = \frac{2M_0}{l} \cdot \frac{l-x+2x}{x \cdot (l-x)} = \frac{2M_0}{l} \cdot \frac{l+x}{x \cdot (l-x)}$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{x \cdot (l-x) - (l+x) \cdot (l-2x)}{[x \cdot (l-x)]^2} = 0$$



$$l \cdot x - x^2 - l^2 + 2lx - lx + 2x^2 = 0$$

$$x^2 + 2lx - l^2 = 0$$

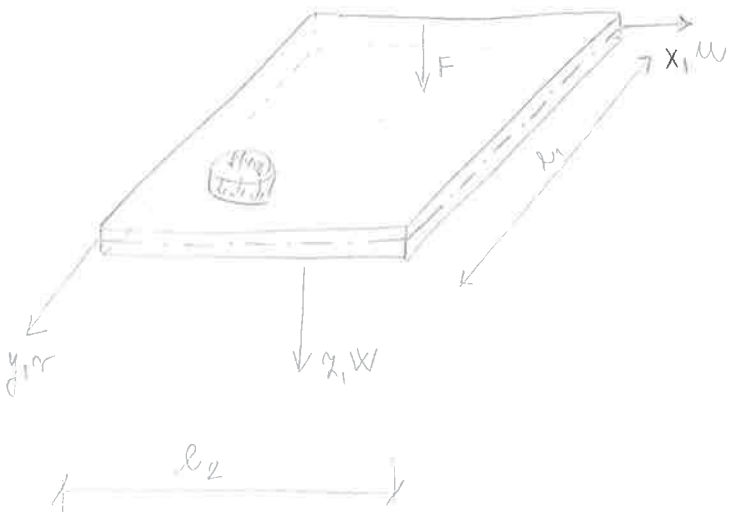
$$x_{1,2} = \frac{-2l \pm \sqrt{4l^2 + 4l^2}}{2} = l \cdot (-1 \pm \sqrt{2})$$

$$x = (\sqrt{2} - 1) \cdot l$$

$$M_0 = f_y \cdot W_0 = f_y \cdot (S_1 + S_2) = f_y \cdot \left(b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} + b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{4} \right)$$



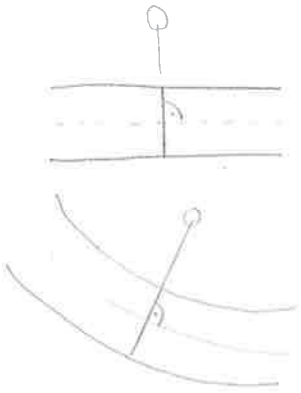
DESKY



1. tenké desky $\frac{1}{50} < \frac{h}{\ell} < \frac{1}{10}$
2. silné desky $\frac{1}{10} < \frac{h}{\ell} < \frac{1}{5}$
3. tělesa $\frac{h}{\ell} > \frac{1}{5}$

Kirchhoffova teorie tenkých desek

1)



2) $\zeta_2 = 0$

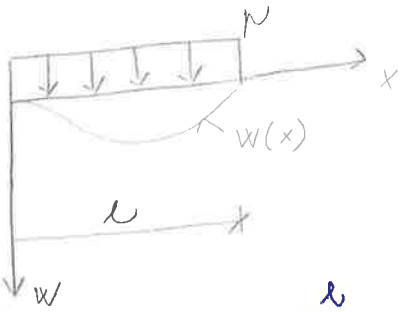
3) $u(x, y, 0) = v(x, y, 0) = 0$

$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

- klasickým pohybem kterým se zabývá matematická analýza je reálná funkce

$$y(x) \rightarrow F(y(x))$$

$$D(F)$$

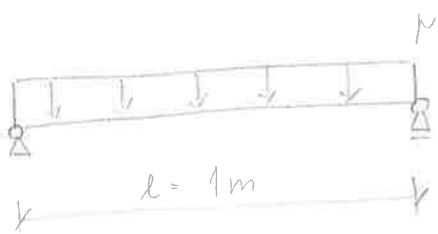


$$E = E_i + E_e = F(w(x)) = \frac{1}{2}\int_0^l E \cdot I \,(w'')^2\, dx - \int_0^l p \cdot w \, dx$$

VARIACE PRŮHYBOVÉ KŘIVKY



Př. Řešte průhyb nosníku



$$\tilde{w}(x) = w_1 \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l}$$

$$F(\tilde{w}(x)) = \frac{1}{2}\int_0^l E \cdot I (\tilde{w}'')^2 dx - \int_0^l 1 \cdot \tilde{w}\, dx =$$

$$\tilde{w}'' = \frac{-\pi \cdot w_1 \cdot \sin\frac{\pi \cdot x}{l}}{l^2} \cdot (l-1) = -\pi^2 w_1 \cdot \sin(\pi \cdot x)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 E \cdot I \cdot (-\pi^2 \cdot w_1 \cdot \sin(\pi \cdot x))^2 dx - \int_0^1 1 \cdot w_1 \cdot \sin(\pi \cdot x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} E \cdot I \cdot \frac{\pi^4 \cdot w_1^2}{2} - \frac{2 \cdot w_1}{\pi}$$

$$\frac{dF(\tilde{w}(x))}{dw_1} = 0$$

$$\frac{\pi^4 \cdot E \cdot I \cdot w_1}{2} - \frac{2}{\pi} = 0 \rightarrow w_1 = \frac{4}{\pi^5 \cdot E \cdot I}$$

$$\tilde{w}(x) = \frac{4}{\pi^5 \cdot E \cdot I} \cdot \sin(\pi \cdot x) \qquad w_{max} = \frac{0{,}01307 \cdot 1}{E \cdot I}$$

ENERGETICKÉ METODY V OHYBU PEVNÝCH DESEK

(1) $\Delta\Delta = \frac{N}{D}$ $\qquad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{N}{D}$

$D = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-m)}$

Δ = Laplaceův operátor

$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$

(2) $\tilde{w}(x,y) = \sum_k w_k \varphi_k(x,y)$

- součinitele lineární konštanty...

$E = E_i + E_e$

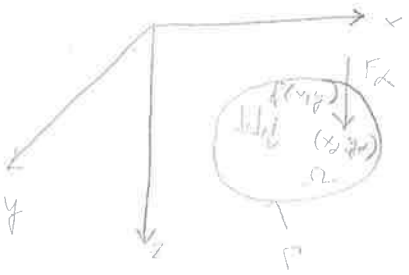
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial w_1} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial w_2} &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial w_k} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(4) $E_i = \frac{D}{2} \iint_\Omega \left\{ (\Delta w)^2 - 2(1-m)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 \right] \right\} dx\,dy =$

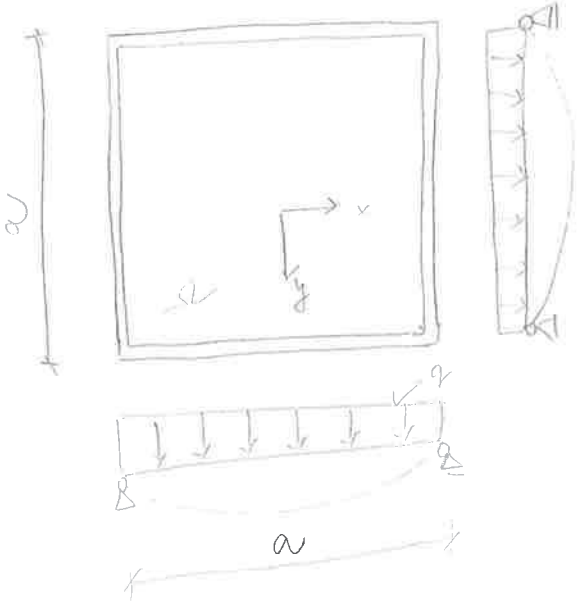
$= \frac{D}{2} \iint_\Omega (\Delta w)^2 \,dx\,dy - \frac{D}{2}(1-m) \int_\Gamma \left[\frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) \right] ds$

- v případě že je deska po celem obvodu podepřená nebo je-li derivace průhybu ve směru normály k nepodepřenému okraji rovná 0 je křivkový integrál rovem 0

$$E_e = -\iint_\Omega p(x,y)\, w(x,y)\, dx\, dy - \sum_\alpha F_\alpha\, w(x_\alpha, y_\alpha)$$



(Př.) Obdélníkovou desku dle obrázku řešte Ritzovou metodou



$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial x^2} = -\pi^2 \cdot w_1 \cdot \frac{\cos\frac{\pi\cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi\cdot y}{a}}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial y^2} = -\pi^2 \cdot w_1 \cdot \frac{\cos\frac{\pi\cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi y}{a}}{a^2}$$

$$\tilde{E}_i = \frac{D}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (\Delta \tilde{w})^2\, dx\, dy = \frac{D}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} -2\, \frac{\pi^2 w_1 \cos\frac{\pi\cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi\cdot y}{a}}{a^2}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{D}{2} \pi^4 \frac{w_1^2}{a^2}$$

$$\tilde{E}_e = -\iint_\Omega q\, \tilde{w}\, dx\, dy = -\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} q \cdot w_1 \cdot \cos\frac{\pi\cdot x}{a} \cdot \cos\frac{\pi\cdot y}{a}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{-4 \cdot a^2 \cdot q \cdot w_1}{\pi^2}$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}_i + \tilde{E}_e = \frac{D}{2} \pi^4 \frac{w_1^2}{a^2} - \frac{4 a^2 \cdot q \cdot w_1}{\pi^2}$$

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial w_1} = D \frac{\pi^4 \cdot w_1}{a^2} - 4 \frac{a^2 \cdot q}{\pi^2} = 0 \Rightarrow w_1 = q \frac{4 \cdot a^4}{\pi^6 \cdot D}$$

$$\tilde{w} = q \frac{4 \cdot a^4}{\pi^6 D} \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{a}\right)$$