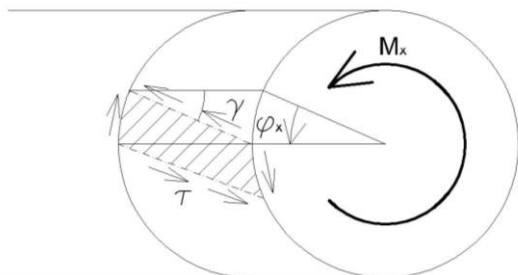


Volné kroucení prutů - teorie



Základní vztahy

Diferenciální podmínka rovnováhy pro namáhání prutu kroucením je

$$M'_x = -m_x$$

kde

M_x je kroučící moment (vnitřní síla)

m_x je spojité momentové zatížení kolem osy x

Poměrný úhel zkroucení (vzájemné natočení dvou průřezů vzdálených od sebe o délku 1 m) je dán fyzikální podmínkou

$$\theta_x = \frac{M_x}{GI_t}$$

kde

G je modul pružnosti ve smyku (materiálová charakteristika)

I_t je moment setrvačnosti průřezu v kroucení (průřezová charakteristika)

Vztah mezi poměrným úhlem zkroucení a pootočením φ_x je dán geometrickou podmínkou

$$\varphi'_x = \theta_x$$

Integrací vztahu se získá

$$\varphi_x = \int \theta_x dx + C$$

Integrační konstantu C je možné určit z okrajové podmínky a tou je známé pootočení pro bod a . Pomocí tohoto známého posunu v bodě a je možno vyjádřit pootočení v libovolném bodě b .

$$\varphi_b = \varphi_a + \int_a^b \theta_x dx = \varphi_a + \int_a^b \frac{M_t}{GI_t} dx$$

Pro veličiny M_x , G a I_t , konstantní v jednotlivých částech prutu, přejde integrál v sumační vyjádření

$$\varphi_b = \varphi_a + \sum_{i=1}^n \frac{M_{x,i} L_i}{G_i I_{t,i}}$$

Kroučící moment způsobuje v průřezu smykové napětí. Jeho rozložení po průřezu je poměrně odlišné pro různé typy průřezů. Obecně lze definovat maximální smykové napětí na průřezu.

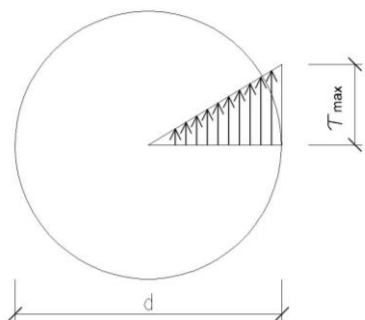
$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t}$$

kde

W_t je modul průřezu v kroucení (průřezová charakteristika)

Průřezové charakteristiky, rozložení napětí po průřezu

a) Kruhový průřez



U kruhového průřezu se předpokládá lineárně narůstající smykové napětí od středu (nulové) po okraj (maximální hodnota).

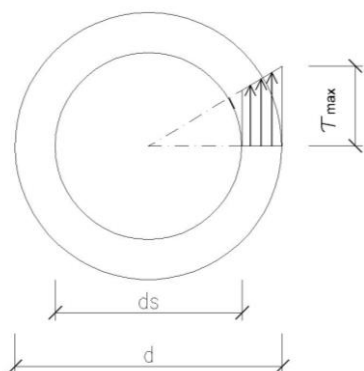
Moment setrvačnosti v kroucení je dán vztahem

$$I_t = \frac{\Pi d^4}{32}$$

Modul průřezu v kroucení je dán vztahem

$$W_t = \frac{\Pi d^3}{16}$$

b) Mezikružný průřez



U mezikružného průřezu se předpokládá stejné rozložení napětí jako u kruhového průřezu. Pouze v místě, kde není materiál, není samozřejmě žádné napětí.

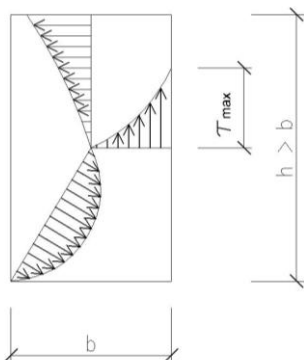
Moment setrvačnosti v kroucení je dán vztahem

$$I_t = \frac{\Pi}{32} (d^4 - d_s^4)$$

Modul průřezu v kroucení je dán vztahem

$$W_t = \frac{2I_t}{d}$$

c) Obdélníkový průřez



U obdélníkového průřezu napětí narůstá od těžiště směrem ke středům hran. Průběh ale není lineární.

V těžišti a v rozích průřezu je hodnota nulová, maximální hodnota je uprostřed delší hrany.

Moment setrvačnosti v kroucení je dán vztahem

$$I_t = \alpha b^3 h$$

Modul průřezu v kroucení je dán vztahem

$$W_t = \beta b^2 h$$

kde

$$h \geq b$$

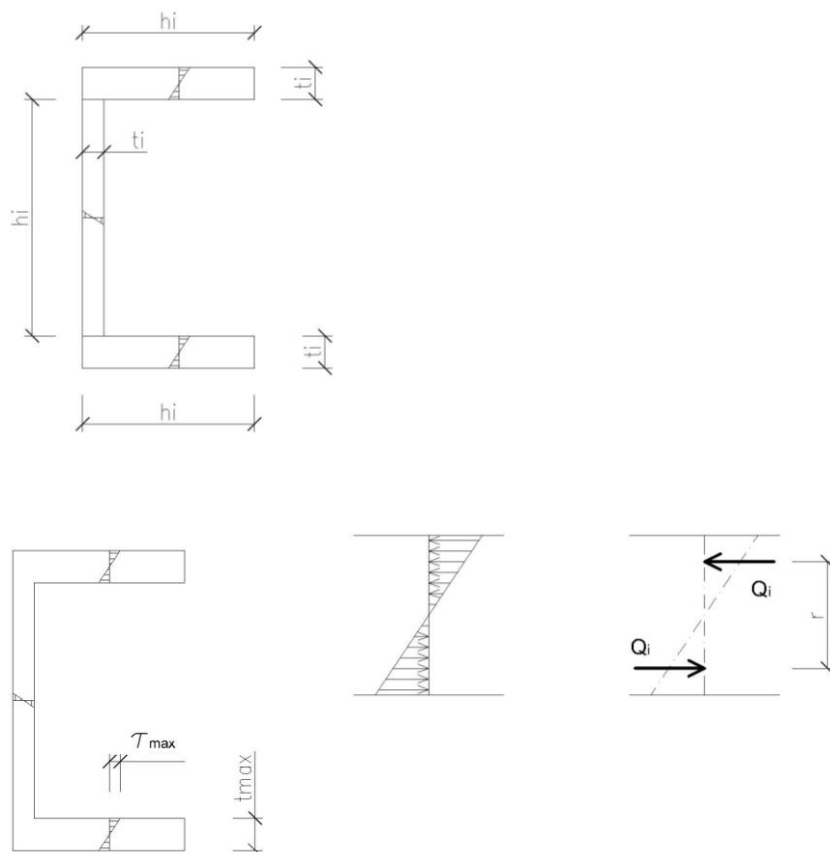
A α a β jsou součinitelé, které jsou tabelovány pro různé poměry hran průřezu (viz tabulka).

Součinitel α je také možno určit ze vztahu

$$\alpha = \frac{1}{3} - 0,21 \frac{b}{h} \left(1 - \frac{b^4}{12h^4} \right)$$

h/b	α	β
1	0,141	0,208
1,1	0,154	0,214
1,2	0,166	0,219
1,3	0,177	0,223
1,4	0,187	0,227
1,5	0,196	0,231
1,6	0,204	0,234
1,7	0,211	0,37
1,8	0,217	0,24
1,9	0,223	0,243
2	0,229	0,246
2,5	0,249	0,258
3	0,263	0,267
5	0,291	0,292
10	0,312	0,312
∞	0,333	0,333

d) Tenkostěnný otevřený průřez



Předpokládá se, že jednotlivé stěny průřezu se chovají jako samostatné obdélníky s nekonečným poměrem stran. Tzn., že průběh napětí přes tloušťku stěny je lineární, s extrémy na hranách a nulou na střednici stěny. Největší smykové napětí pak nastává v na hranách nejtlustší stěny.

Moment setrvačnosti v kroucení je dán vztahem

$$I_t = \frac{1}{3} \sum t_i^3 h_i$$

h_i délky jednotlivých stěn průřezu

t_i tloušťky jednotlivých stěn průřezu

Vzorec platí i pro průřezy se zakřivenou střednicí stěn, za h_i se dosazuje rozvinutá délka střednice stěny.

Modul průřezu v kroucení je dán vztahem

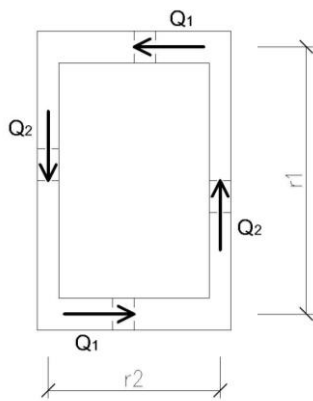
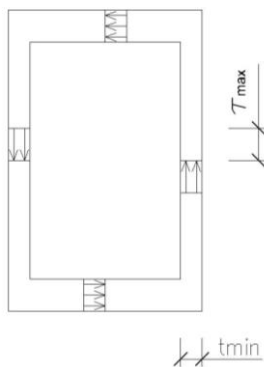
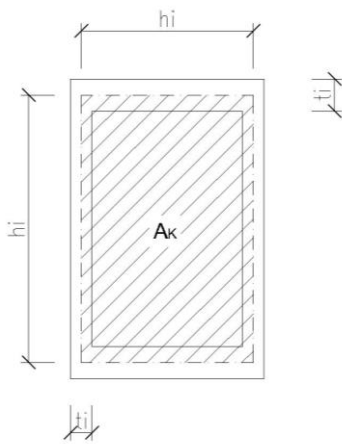
$$W_t = \frac{I_t}{t_{max}}$$

POZN: pro některé typy průřezů se používá korekční součinitel η upravující moment setrvačnosti kroucení následujícím způsobem

$$I_t = \frac{\eta}{3} \sum t_i^3 h_i$$

Součinitel η je např. pro válcované I profily uváděn hodnotou 1,2 pro válcované U profily hodnotou 1,12.

e) Tenkostěnný uzavřený průřez



Předpokládá se konstantní průběh smykového napětí po tloušťce stěny a konstantní smykový tok tloušťkou stěny. Tzn., že v nejtenčí stěně je největší napětí.

Moment setrvačnosti v kroucení je dán vztahem

$$I_t = \frac{4A_k^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{4A_k^2}{\sum \frac{h_i}{t_i}}$$

A_k plocha vymezená střednicemi jednotlivých stěn průřezu

h_i délky jednotlivých střednic stěn průřezu

t_i tloušťky jednotlivých střednic stěn průřezu

Modul průřezu v kroucení je dán vztahem $W_t = 2A_k t_{\min}$