FAKULTA STAVEBNÍ ústav stavební mechaniky

NDA015 Pružnost a plasticita

Ritzova metoda: osově namáhaný prut (v.24/25.1)

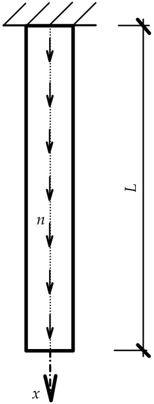
Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

Pomocí Ritzovy metody určete rovnici osového posunu u. Osovou tuhost prutu uvažujte konstantní.

$$EA = \text{konst.}$$



Uvažujme funkci aproximující posunutí $u(x) = u$ ve tvaru polynomu 3. stupně

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2$$

Potenciální energii vnitřních sil lze zapsat ve tvaru

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_0^L EA\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{EA}{2}\int_0^L (a_1^2 + a_1 2a_2 x + a_1 3a_3 x^2 + a_1 2a_2 x + 4a_2^2 x^2 + 6a_2 a3x^3 + a_1 3a_3 x^2 + 6a_2 a_3 x^3 +$$

$$+9a_3^2 x^4)\mathrm{d}x = \frac{EA}{2}\int_0^L \left(a_1^2 + (4a_1a_2)x + (4a_2^2 + 6a_1a_3)x^2 + (12a_2a_3)x^3 + (9a_3^2)x^4\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{EA}{2}\left[a_1^2 L + 2a_1a_2L^2 + \frac{4}{3}a_2^2L^3 + 2a_1a_3L^3 + 3a_2a_3L^4 + \frac{9}{5}a_3^2L^5\right]$$

Potenciální energie vnějších sil je vzhledem ke spojitému normálovému zatížení n dána tvarem

$$\Pi_e = -\int_0^L nu\mathrm{d}x = -\int_0^L n(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\mathrm{d}x = -na_1\frac{L^2}{2} - na_2\frac{L^3}{3} + -na_3\frac{L^4}{4}$$

Celková potenciální energie je dána součtem

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e$$

Celková potenciální energie systému mám být minimální

$$\Pi = \min$$

Provedeme tedy variaci funkcionálu potenciální energie a tedy

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}$$

A získáme soustavu algebraických rovnic

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = EA\left[a_1 L + a_2 L^2 + a_3 L^3\right] - n\frac{L^2}{2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = EA\left[a_1 L^2 + \frac{4}{3} a_2 L^3 + \frac{3}{2} a_3 L^4\right] - n\frac{L^3}{3} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_3} = EA\left[a_1 L^3 + \frac{3}{2} a_2 L^4 + \frac{9}{5} a_3 L^5\right] - n\frac{L^4}{4} = 0$$

$$EA\begin{bmatrix} L & L^2 & L^3 \\ L^2 & \frac{4}{3}L^3 & \frac{3}{2}L^4 \\ L^3 & \frac{3}{2}L^4 & \frac{9}{5}L^5 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n\frac{L^2}{2} \\ n\frac{L^3}{3} \\ n\frac{L^4}{4} \end{Bmatrix}$$

Například s pomocí Gaussovy eliminační metody lze získat řešení soustavy ve tvaru

$$EA\begin{bmatrix} L & L^2 & L^3 \\ 0 & -\frac{1}{3}L^2 & -\frac{1}{2}L^3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{30}L^3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n\frac{L^2}{2} \\ n\frac{L^2}{6} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Zpětným chodem tedy získáme

$$a_3 = 0$$

$$-\frac{EAL^2}{3}a_2 = \frac{L^2}{6}n$$

$$a_2 = -\frac{n}{2EA}$$

$$EALa_1 - \frac{nL^2}{2} = \frac{nL^2}{3}$$

$$EAa_1 = 2\frac{nL}{2}$$

$$a_1 = \frac{nL}{EA}$$

Výsledná rovnice osového posunu má tedy tvar

$$u(x) = \frac{n}{EA}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)$$