FAKULTA STAVEBNÍ ústav stavební mechaniky

NDA015 Pružnost a plasticita

přednáška 5 (v.24/25.1)

Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

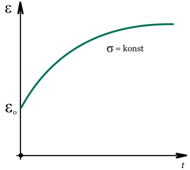
Brno, zimní semestr 2024/2025

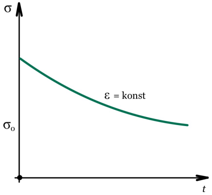
Obsah

Dotvarování a relaxace

Dotvarování lze definovat jako nárust deformace při konstantním napětí. V materiálech, které dotvarují dochází při konstantní deformaci k poklesu napětí – **relaxaci**. Oba jevy jsou úzce provázané.

- uvedené jevy lze řešit pomocí materiálových modelů, které zohledňují předcházející vývoj napětí a deformace – reologické modely
- nejjednodnušší jsou modely definované v rámci teorie viskoelasiticty (využití principu superpozice)





Boltzmanův princip superpozice

- $\varepsilon_1(t) \rightarrow \sigma_1(t)$
- $\varepsilon_2(t) \rightarrow \sigma_2(t)$

$$c_1\varepsilon_1(t) + c_2\varepsilon_2(t) \rightarrow c_1\sigma_1(t) + c_2\sigma - 2(t)$$

- funkce poddajnosti se označuje $J(t, t')$
- vyjadřuje podíl mezi deformací v čase t a velikostí napětí, které tuto deformaci vyvolalo, působícího od času t' konstantně

$$J(t, t') = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma'}$$

- kde napětí σ' je napětí, které začalo působit v čase t', platí tedy historie zatížení (napětí)[1]

$$\sigma = \sigma' H(t - t')$$

- pro materiály, u kterých se vlastnosti v čase **nemění**, jinými slovy pro **materiály bez stárnutí** platí

$$J(t, t') = J_0(t - t')$$

- o materiálech, kde se mění vlastnosti v čase (např. raná stádia betonu), hovoříme jako o **materiálech se stárnutím**

[1] H je tzv. Heavisidova funkce: $H(s < 0) = 0$ a $H(s \geq 0) = 1$

- reologické modely umožňují zjednodušeně aproximovat tvar funkce poddajnosti
- sestavují se ze základních reologických článků (pružiny a tlumiče)
- pro lineární tlumič platí:

$$\sigma_e = E\varepsilon_e$$

- pro lineární vazký tlumič platí[2]

$$\sigma_v = \eta\dot{\varepsilon}_v$$

- mezi základní relogické modely řadíme
  - Kelvinův model
  - Maxwellův model
  - Kelvinův řetězec
  - Maxwellův řetězec

[2] η je viskozita a $\dot{\varepsilon}_v$ je rychlost deformace $(\dot{\ })$ označuje derivaci podle času t

- sériové zapojení pružiny a tlumiče

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v$$

- pro výpočet deformace platí vztahy

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_e(t)}{E} = \frac{\sigma'}{E}$$

$$\dot{\varepsilon}_v = \frac{\sigma_v(t)}{\eta} = \frac{\sigma'}{\eta}$$

- deformaci ε_v získáme intergrací

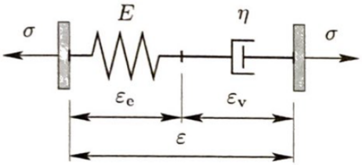
$$\varepsilon_v = \frac{\sigma'}{\eta} + C$$

- kde $\varepsilon_v(0) = 0$ a tedy $C = 0$

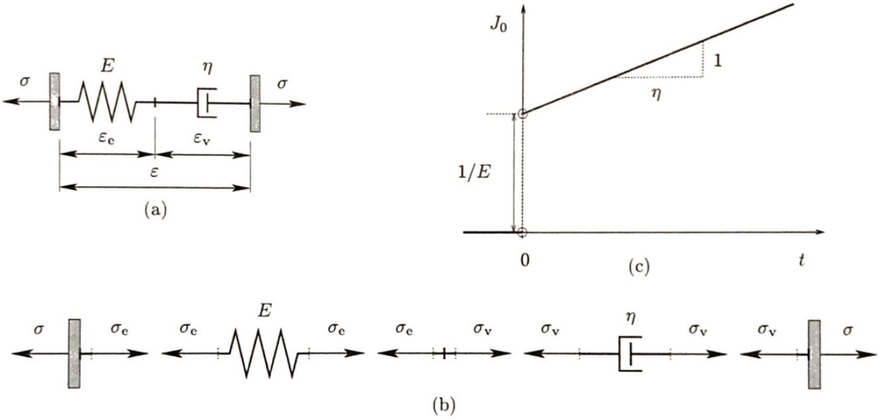
$$\varepsilon(t) = \sigma' \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}\right)$$

Funkce podddajnosti

$$J_0(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{\eta}\right) H(t)$$



(a)



σ
E
η
σ
ε_e
ε_v
ε
(a)
J_0
1
η
1/E
0
(c)
t
σ
σ_e
σ_e
E
σ_e
σ_e
σ_v
σ_v
η
σ_v
σ_v
σ
(b)

- paralelní zapojení pružiny a tlumiče

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v$$

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v$$

- výsledná rovnice má tvar

$$\sigma' = E\varepsilon(t) + \eta\dot{\varepsilon}(t)$$

- řešení této diferenciální rovnice 1. řádu s konstantními koeficienty je ve tvaru

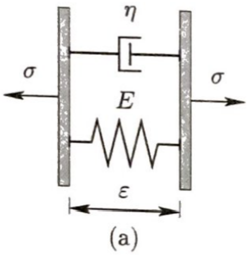
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma'}{E} + Ce^{-\frac{E}{\eta}t}$$

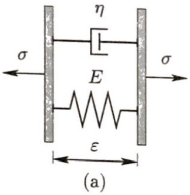
- kde konstanta C pro $\varepsilon(0) = 0$ má tvar $C = -\frac{\sigma'}{E}$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma'}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right)$$

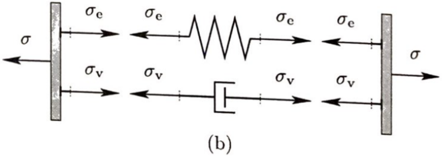
Funkce podddajnosti

$$J_0(t) = \frac{1}{E}\left(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}\right) H(t)$$

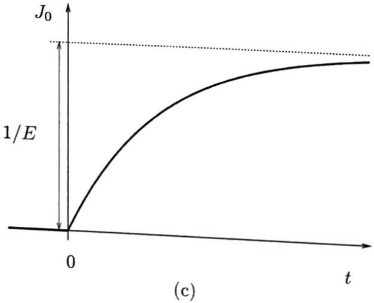




η
σ
σ
E
ε
(a)



σ
σe
σe
σe
σe
σ
σv
σv
σv
σv
(b)



J0
1/E
0
t
(c)

- skutečné viskoelastické chování (např. betonu) nelze s pomocí Kelvinova modelu aproximovat dostatečně přesně

$\rightarrow$ **Kelvinův řetezec**

- sériové zapojení několika Kelvinových modelů a pružiny
- máme-li Kelvinův řetezec tvořený n články a pružinou s modulem pružnosti E_0 pak platí

$$\varepsilon(t) = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j(t)$$

- každá dílčí část řetezce přenáší stejné napětí

$$\sigma(t) = \sigma_{0,e}(t), \;\; \sigma(t) = \sigma_{j,e}(t) + \sigma_{j,v} \; j = 1, 2, ..., n$$

- dosazením $\sigma_{j,e} = E_j \varepsilon_j$ a $\sigma_{j,v} = \eta_j \dot{\varepsilon}_j$ získáme soustavu rovnic

$$E_0 \varepsilon_0(t) = \sigma', \;\; E_j \varepsilon_j(t) + \eta_j \dot{\varepsilon}_j(t) = \sigma', \;\; j = 1, 2, ..., n$$

- obdobně jako v případě Kelvinova článku se vyřeší diferenciální rovnice a získáme vztah pro výpočet deformace[a]

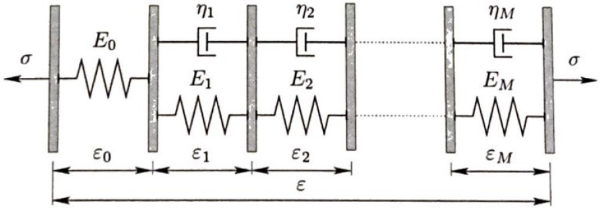
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma'}{E_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma'}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right)$$

Funkce podddajnosti

$$J_0(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{E_j} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right)\right] H(t)$$

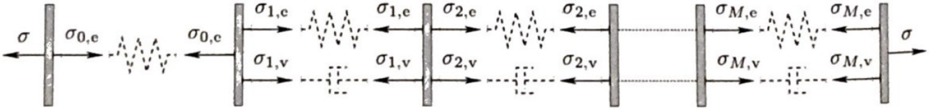
[a] $\tau_j = \frac{\eta_j}{E_j}$ jsou tzv. retardační časy

(a)



σ
E_0
η_1
E_1
η_2
E_2
η_M
E_M
σ
ε_0
ε_1
ε_2
ε_M
ε

(b)



σ
$\sigma_{0,e}$
$\sigma_{0,e}$
$\sigma_{1,e}$
$\sigma_{1,e}$
$\sigma_{1,v}$
$\sigma_{1,v}$
$\sigma_{2,e}$
$\sigma_{2,e}$
$\sigma_{2,v}$
$\sigma_{2,v}$
$\sigma_{M,e}$
$\sigma_{M,e}$
$\sigma_{M,v}$
$\sigma_{M,v}$
σ

- relaxační proces lze definovat jako časově závislá změna napětí při konstantní deformaci
- při relaxaci uvažujeme, že od určitého časového okamžiku t' je konstrukce zatížena konstantní deformací ε'
- průběh deformace je tedy popsán funkcí

$$\varepsilon(t) = \varepsilon' H(t - t')$$

- průběh napětí lze tedy zapsat ve tvaru

$$\sigma(t) = \varepsilon' R(t, t'),$$

- kde $R(t, t')$ je **relaxační funkce**, charakterizující časově proměnlivou tuhost materiálu
- tato funkce je v určitém smyslu *inverzní* k funkci poddajnosi

- pro Maxwellův článek platí sumační vztah

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_v(t)$$

- pro účely vyjádření deformací pomocí napětí $\sigma(t)$ přepíšeme výše uvedenou rovnici na tvar

$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_e(t) + \dot{\varepsilon}_v(t)$$

- dosazením získáme diferenicální rovnici

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{E}\dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta}\sigma(t)$$

- která má řešení ve tvaru[a]

$$\sigma(t) = Ce^{-\frac{Et}{\eta}} = Ce^{-\frac{t}{\tau}}$$

[a] $\tau = \frac{\eta}{E}$ je tzv. relaxační čas

- integrační konstanta se určí z pružné deformace na počátku spojitého vývoje $\sigma(0) = E\varepsilon'$ a tedy $C = E\varepsilon'$
- vývoj napěti tedy popisuje funkce

$$\sigma(t) = E\varepsilon' e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Relaxační funkce

Maxwellův článek

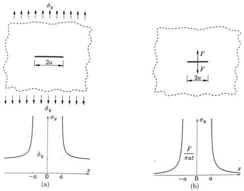
$$R_0(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}}H(t)$$

Maxwellův řetezec (paralelní zapojení více článků)

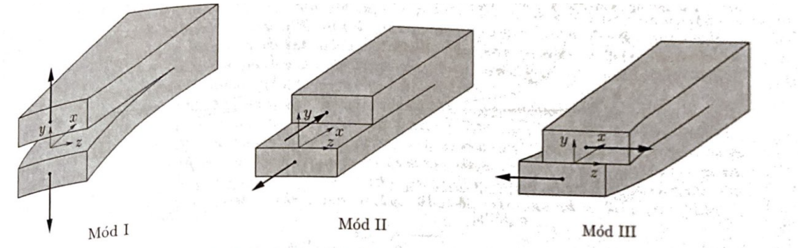
$$R_0(t) = \left(\sum_{j=1}^{n} E_j e^{-\frac{t}{\tau_j}}\right) H(t)$$

- opouští předpoklad spojitého materiálu při přetváření a zabývá se popisem trhlin, které vznikají v důsledku existence defektů v mikrostruktuře materiálu
- defekty v materiálu způsobují změnu rozložení pole napětí
- u **kořene trhliny** dochází k nárustu napětí
- podoba pole napětí je ovlivněna tvarem trhliny, velikostí tělesa a způsobem namáhání, ve všech případech je však nepřímo úměrné odmocnině vzdálenosti od kořene trhliny r
- pro různé konfigurace tedy stačí znát konstantu úměrnosti mezi σ_y a $\frac{1}{\sqrt{r}}$
- tato konstanta vynásobená $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ se nazývá **faktor intenzity napětí**

$$\sigma_y(r) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$



- faktor intenzity napětí lze vyčíslit pro různé způsoby namáhání (rozevírání trhliny)
- hovoříme o **módech lomového námáhání**: mód I, mód II, mód III



Nelineární procesní zóna

Kolem kořene trhliny, kde napětí vzrůstá nade všechny meze vzniká **nelineární procesní zóna**. V této oblasti překračuje napětí mez úměrnosti.

- z hlediska posouzení je důležité určit, zda trhlina poroste nebo ne, protože právě růst může vést ke zhroucení konstrukce. Vlastní existence trhlin nemusí být nutně kritická.

Šíření v módu I: lokální Irwinovo kritérium

- lokální kritérium
- kritérium je založeno na existenci kritické hodnoty faktoru intenzity napětí K_c
- K_c nazýváme lomovou houževnatostí

$$K_I < K_c \rightarrow \dot{a} = 0$$

$$K_I = K_c \rightarrow \dot{a} \geq 0$$

$$K_I > K_c \rightarrow \text{nepřípustné}$$

- kde $\dot{a}$ je rychlost šíření trhliny ($\dot{a} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$)

Šíření v módu I: globální Grifithovo kritérium

- globální kritérium
- kritérium je založeno na bilanci energií při přetvárném procesu
- trhlina se nešíří, když se práce vykonaná vnějším zatížením rovná potenciální energii pružné deformace
- **při šíření trhliny se část energie využije na vytvoření nevratných změn – zvětšení plochy trhliny**
- jinými slovy: trhlina se šíří, když je dostatek energie k překonání soudržnosti materiálu
- rozhodující veličinou je poddajnost $C(a)$

- pracuje stále s představou kontinua (připouští však vznik trhlin narušujících pole posunutí)
- vliv rozevření trhliny se převádí na ekvivalentní nepružnou deformaci – rozetřené trhliny

→ místo popisu trhlin se pracuje s popisem jejich vlivu na tuhost a pevnost reprezentativního objemu materiálu

- **modely teorie poškození** jsou vhodné pro popis porušování, kde vzniká větší množství trhlinek
- lze je s vhodnými úpravami použít i pro modelování porušování s lokalizovanou magistrální trhlinou

→ problematika **lokalizace poškození**

- lze vyjít z představy svazku vláken, která postupně praskají
- při tomto mechanismu porušování klesá efektivní plocha $\overline{A}$ (plocha nepopraskaných vláken)
- sílu přenášenou materiálem dle obr. lze vyjádřit takto

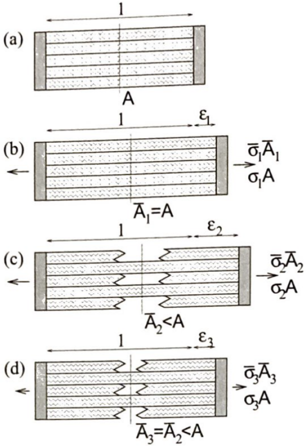
$$\sigma A = \overline{\sigma}\overline{A} \rightarrow \sigma = \frac{\overline{A}}{A}\overline{\sigma} = \beta\overline{\sigma}$$

- v mechanice porušení se používá tzv. **parametr poškození**

$$\omega = 1 - \beta = 1 - \frac{\overline{A}}{A} = \frac{A_d}{A}$$

- kde A_d je prasklá část plochy
- v případě křehkého, lineárně pružného vlákna lze nominální napětí vyjádřit vztahem

$$\sigma = (1 - \omega)E\varepsilon$$



- lze opět využít jediného parametru poškození ω
- v případě víceosé napjatosti je tuhost nepoškozeného materiálu popsána maticí pružné tuhosti $\mathbf{D}_e$
- v nejjednodušším případě víceosého modelu poškození jsou všechny koeficienty matice tuhosti redukovány stejným koeficientem

$$\mathbf{D}_s = (1-\omega)\mathbf{D}_e$$

- fyzikální rovnice poté mají tvar

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s\boldsymbol{\varepsilon} = (1-\omega)\mathbf{D}_e\boldsymbol{\varepsilon} = (1-\omega)\overline{\boldsymbol{\sigma}}$$

- podobně jako pro modely plasticity lze definovat **funkci poškození**

$$f(\boldsymbol{\varepsilon},\kappa) = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \kappa$$

Zobecněný Hookův zákon v sečném tvaru

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_s\boldsymbol{\varepsilon}$$

Sečná matice tuhosti

$$\mathbf{D}_s = (1-\omega)\mathbf{D}_e$$

Funkce poškození

$$f(\boldsymbol{\varepsilon},\kappa) = \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}) - \kappa$$

Podmínka přípustnosti

$$f(\boldsymbol{\varepsilon},\kappa) \le 0$$

Podmínka komplementarity

$$\dot{\kappa} f(\boldsymbol{\varepsilon},\kappa) = 0$$

- pro modely se změkčením (klesacíjí větve jak v teorii plasticity, tak teorii poškození) může docházet k nevhodné lokalizaci nepružné deformace
- tyto modely neobsahují informaci o charakteristické vnitřní délce materiálu

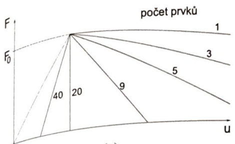
→ nepružné účinky se lokalizují do určitých zón, které mohou být libovolně malé či až nulové

→ v případě numerických metod (např. MKP) dochází k lokalizaci do **1 prvku**

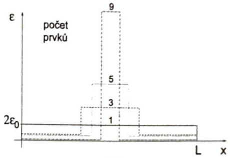
Omezovače lokalizace

Pro odstranění patologické závislosti na velikosti prvku při použití MKP se zavádějí **omezovače lokalizace**.

Např. se redukuje lomová energie G_f (plocha pod pracovním diagramem) šířkou prvků h



(a)



(b)

Poděkování

Vážím si Vaší pozornosti a děkuji, že jste to vydrželi.

Zdroje

1. JIRÁSEK, Milan a ZEMAN, Jan. **Přetváření a porušování materiálů: Dotvarování, plasticita, lom a poškození**. Praha: ČVUT, 2012.
   - z uvedeného skripta byly převzaty všechny obrázky