NDA015 Pružnost a plasticita

přednáška 4 (v.24/25.1)

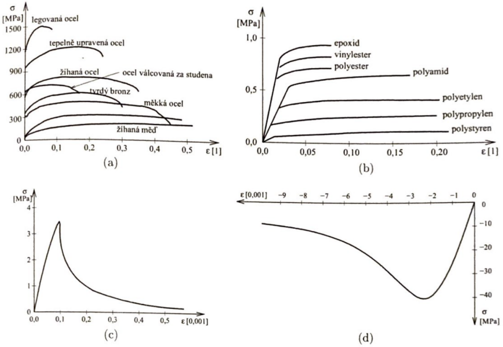
Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

Obsah

- v teorii pružnosti existují fyzikální rovnice, které popisují přetváření a poškozování materiálů
- popisují vztahy mezi $\{\varepsilon\}$ a $\{\boldsymbol{\sigma}\}$
- nejjednodušší je zobecněný Hookův zákon



Zobecněný Hookův zákon

Složky vektoru $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ jsou lineární funkce složek vektoru $\{\varepsilon\}$. Pro izotropní materiál lze situaci popsat pomocí 2 konstant E a ν resp. E, G či G, ν[a]

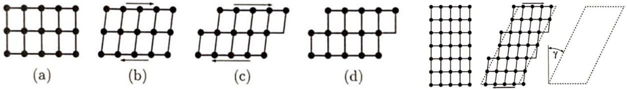
- uvedená lineární závislost je velmi hrubým zjednodušením reality, protože platí jen do určité hladiny zatížení

[a] $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

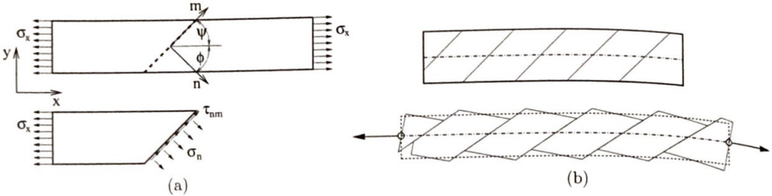
Materiálová nelinearita

- pro přesnější vystižení reality se do popisu musí zavést nepružné účinky
  - trvalé deformace
  - redukce tuhosti vlivem porušování (trhliny)
  - vliv časového působení (rychlé děje, reologie)
- uvažujeme-li výše uvedené nelinearity, tak hovoříme o materiálové nelinearitě, v rámci které lze rozlišovat
  - teorii plasticity (kovy, ale i beton či zeminy)
  - lomovou mechaniku (křehké materiály: sklo)
  - teorii poškození (beton)
  - visko-elasticitu (relaxace oceli, dotvarování betonu)

- předepisuje fyzikální vztahy s ohledem na vznik **trvalých deformací**
- pro materiály s krystalickou mřížkou si lze plastické chování představit jako v pokluz v krystalografických rovinách účinkem smykového napětí



- z makroskopického hlediska nedochází k objemovým změnám



- u reálných materiálů je chování při plastickém přetváření komplikovanější (nemají typickou krystalickou strukturu)
- teorii plasticity lze však využít i pro: **beton**, **zeminy** či polymery (nemají krystalickou strukturu)
- v dalším výkladu se zaměříme na definici plastických materiálových modelů
  - v 1D:
    - ideálně tuhoplastický model
    - ideálně pružnoplastický model
    - tuhplastický model s kinematickým zpevněním
    - pružnoplastický model s kinematickým i izotropním zpevněním
  - ve víceosé napjatosti:
    - modely bez vnitřního tření (model Tresca, model von Mises)
    - modely s vnitřním třením (model Mohr-Coulomb, model Drucker-Prager)

- reprezentuje plastický pokluz (deformace, které po odtížení nezmizí)
- základním parametrem je mez kluzu σ_0

Funkce plasticity

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0$$

Podmínka plastické přípustnosti

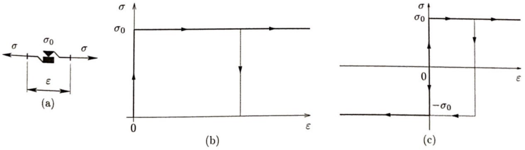
$$f(\sigma) \leq 0$$

Zákon plastického přetváření

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}\ \operatorname{sgn}\sigma, \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

Podmínka komplementarity

$$\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$$



- v reálném materiálu neexistují jen plastické deformace (viz předchozí model), ale také pružné deformace
- výsledná deformace je kombinací pružné – **vratné** a nepružné – **nevratné** složky deformace
- s ohledem na předpoklad malých deformací a z nich plynoucího součtu $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ vznikne pružnoplastický model sériovým zapojením pružného článku (pružiny) a tuhoplastického modelu

Funkce plasticity

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_0$$

Podmínka plastické přípustnosti

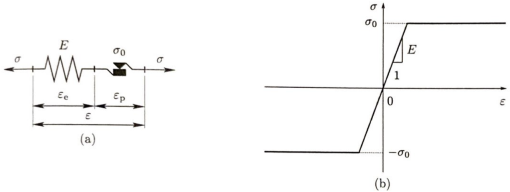
$$f(\sigma) \leq 0$$

Zákon plastického přetváření

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}\ \operatorname{sgn} \sigma, \quad \dot{\lambda} \geq 0$$

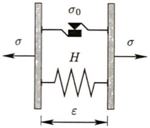
Podmínka komplementarity

$$\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$$

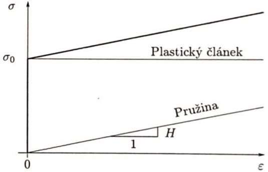


- zvláštní případ, kdy se zapojuje tuhoplastický model s pružinou paralelně
- tento model klade při plastickém přetváření (nad mezí kluzu) stále větší odpor (zpevňuje)
- napětí $\sigma_b = H\varepsilon$ se nazývá zpětné napětí (**b**ack stress)
- konstanta úměrnosti H se nazývá modul zpevnění[1]

$$\sigma = \sigma_0 + H\varepsilon$$



(a)



(b)

[1] také plastický modul, ozn. H plyne z angl. „hardening“

- připojíme-li k předcházejícímu modelu pružinu získáme model charakterizovaný dvěma lineárními větvemi

Funkce plasticity

$$f(\sigma, \sigma_b) = |\sigma - \sigma_b| - \sigma_0$$

Podmínka plastické přípustnosti

$$f(\sigma, \sigma_b) \leq 0$$

Zákon plastického přetváření

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda}\ \mathrm{sgn}(\sigma - \sigma_b),\ \ \dot{\lambda} \geq 0$$

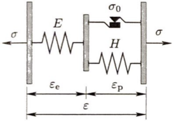
Podmínka komplementarity

$$\dot{\lambda} f(\sigma, \sigma_b) = 0$$

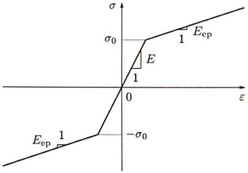
Zákon plastického zpevnění

$$\sigma_b = H\varepsilon^p$$

- je-li $\sigma < \sigma_0$ platí Hookův zákon
- je-li $\sigma \geq \sigma_0$ nastává pokluz, který aby mohl pokračovat musí překonávat zpevnění



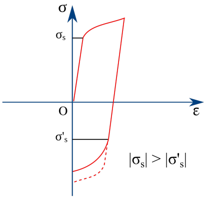
(a)



(b)

- jev při kterém dochází k **nárůstu** meze kluzu v **tahu** a **poklesu** meze kluzu v **tlaku** při **tahovém** namáhání[2]
- tento je nastává u modelu v důsledku **kinematického** zpevňování[3]
- někdy je však vhodně použít materiálový model, u kterého roste při **libovolném** namáhání mez kluzu v **tahu i tlaku**
- takové zpevněné označujeme jako **izotropní**

→ modely s izotropním zpevněním (např. pružnoplastický model s izotropním zpevněním)



Obr. 1: Zdroj: Wiki

[2] při tlakovém namáhání je to naopak (roste mez kluzu v tlaku a klesá v tahu)
[3] lze také existenci prokázat u některých materiálů experimentálně

- zobecněný plastický článek, u kterého vzrůstá **odpor proti pokluzu** (roste mez kluzu)
- vliv přetvárných procesů se zohledňuje pomocí **kumulované plastické deformace** κ
- celá historie zatěžování lze rozdělit na nekonečně malé kroky: $\mathrm{d}\kappa = |\mathrm{d}\varepsilon^p|$
- vydělením $\mathrm{d}t$ získáme vztah mezi rychlostí κ a rychlostí plastické deformace $\dot{\kappa} = |\dot{\varepsilon}^p|$
- vývoj kumulované plastické deformace v čase pak získáme integrací: $\kappa(t) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p(t')|\mathrm{d}t'$
- okamžitá mez kluzu je absolutní hodnota napětí, kterým je potřeba působit na článek, aby v něm došlo k pokluzu

$$\sigma_y = \sigma_0 + H\kappa$$

Funkce plasticity

$$f(\sigma, \sigma_y) = |\sigma| - \sigma_y$$

Podmínka plastické přípustnosti

$$f(\sigma, \sigma_y) \leq 0$$

Zákon plastického přetváření

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda}\ \mathrm{sgn}(\sigma),\ \ \dot{\lambda} \geq 0$$

Podmínka komplementarity

$$\dot{\lambda} f(\sigma, \sigma_y) = 0$$

Kumulovaná plastická deformace

$$\dot{\kappa} = |\dot{\varepsilon}^p|$$

Zákon plastického zpevnění

$$\sigma_b = H\varepsilon^p$$

- při pružném přetváření předpokládáme zobecněný Hookův zákon, který při víceosé napjatosti má tvar

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}^{\mathrm{e}}]\,\{\varepsilon^{e}\}$$

- pro pružnoplastický model platí vektorový součet

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{e}\} + \{\varepsilon^{p}\}$$

- pro funkci plasticity, která je funkcí složek vektoru napětí $f(\{\boldsymbol{\sigma}\})$ platí, že
  - $f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) < 0 \rightarrow$ materiálový bod je v **pružném** stavu
  - $f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = 0 \rightarrow$ materiálový bod je v **plastickém** stavu
  - $f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) > 0 \rightarrow$ **nepřípustný** stav, který materiál **nepřenese**
- musí se provést zobecnění zákona plastického přetváření pomocí funkce $\{\mathrm{g}\}$

Funkce plasticity

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \ldots$$

Podmínka plastické přípustnosti

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) \leq 0$$

Zákon plastického přetváření

$$\{\dot{\varepsilon}^{p}\} = \dot{\lambda}\,\{\mathrm{g}\}(\{\boldsymbol{\sigma}\}),\ \dot{\lambda} \geq 0$$

Podmínka komplementarity

$$\dot{\lambda} f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = 0$$

Podmínka plasticity

Podmínky plasticity (někdy také kritéria pevnosti) umožňují při víceosé napjatosti určit jednu hodnotu tzv. **srovnávácího** napětí σ_{red}, se kterou je možné porovnávat pevnostní vlastnosti materiálů (posuzovat únosnost).

V 1D je plasticky přípustná oblast dána intervalem $< -\sigma_0; \sigma_0 >$. Pro víceosou napjatost je prostor napjatosti šesti rozměrný a proto se při odvození podmínek plasticity využívá invariantů.

1. Podmínky plasticity pro materiály bez vnitřního tření (kovy)
   - Trescova podmínka
   - von Misesova podmínka
2. Podmínky plasticity pro materiály s vnitřním třením (beton, horniny, zeminy)
   - Mohr-Coulombova podmínka
   - Rankinova podmínka
   - Drucker-Pragerova podmínka

- vychází z analogie pokluzu v krystalické mřížce vlivem smykového napětí
- u reálných materiálů, které nejsou krystalické jsou zrna náhodně uspořádána a lze je považovat za izotropní a podmínku plasticity lze formulovat takto

Trescova podmínka

Pokud smykové napětí působící na libovolnou rovinu v libovolném směru dosáhne kritické hodnoty τ_0 dochází ke zplastizování

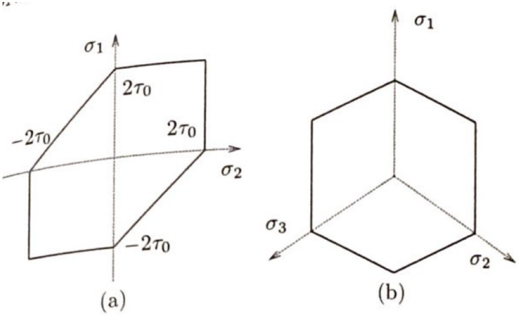
$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \tau_{max}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \tau_0,$$

kde

$$\tau_{max}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \frac{\sigma_{max}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \sigma_{min}(\{\boldsymbol{\sigma}\})}{2}$$

- Trescova podmínka lze použít např. pro kovy
- její nevýhoda spočívá v tom, že plocha plasticity není hladká

$$\tau_{max}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2}\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1|, |\sigma_2|)$$



- má hladkou plochu plasticity
- odvozuje se z předpokladu, že část energie pružné deformace způsobuje změnu tvaru

von Misesova podmínka

K aktivaci plastického přetváření dochází když energie pružné deformace dosáhne kritických hodnot

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \sqrt{J_2(\{\boldsymbol{\sigma}\})} - \tau_0 = \sqrt{3J_2(\{\boldsymbol{\sigma}\})} - \sigma_0$$

Energie pružné deformace je úměrná J_2[4] a má tvar

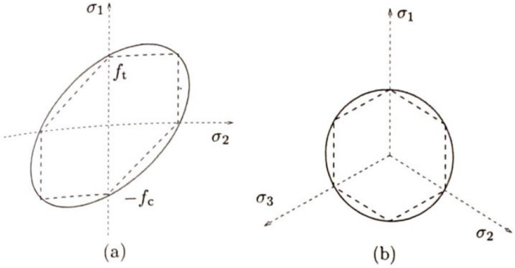
$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

nebo pomocí hlavních napětí

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]$$

[4] J_2 ne nazývá druhý invariant deviatorického napětí

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \sqrt{\frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right]} - \tau_0 = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)} - \tau_0$$



- v kvazikřehkých a křehkých materiálech dochází k rozvoji trhlin a vhodnějšími konstitutivními vztahy se jeví rovnice **lomové mechaniky** a **teorie porušení**
- nicméně i pr beton a geomateriály lze uvažovat modely plasticity
- stále se pracuje s představou pokluzu, ale musí se překonávat kromě soudržnosti i třecí síla
  $\longrightarrow$ **materiály s vnitřním třením**
- u betonu a soudržných zemin musíme vzít do úvahy také ještě **kohezi**
  $\longrightarrow$ **soudržné materiály s vnitřním třením**

- předpis funkce plasticity lze odvodit základní rovnice, která vychází analogií pohybu kvádru po nakloněné rovině

$$|\tau| + \sigma \tan\phi - c_0 < 0$$

kde c_0 je výše zmíněná koheze

Mohr-Coulombova

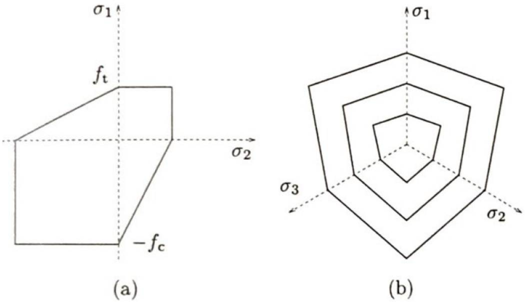
Maximalizací výše uvedeného výrazu přes všechny směry a roviny získáme podmínku plasticity ve tvaru[5]

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \frac{1+\sin\phi}{2}\sigma_{max}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \frac{1-\sin\phi}{2}\sigma_{min}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - c_0\cos\phi$$

[5] Uvažujeme-li $c_0 = \tau_0$ a $\phi = 0$ přechází Mohr-Coulombova podmínka v Trescovu

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \frac{1}{2}\sigma_{max}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \frac{1}{2}\sigma_{min}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \tau_0\cos\phi$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1 + \sin\phi}{2}\sigma_1 - c_0 \cos\phi$$



- je dalším limitním případem Mohr-Coulombovy podmínky
- uvažujeme $\phi = 90°$ a $c_0 = f_t$

Rankinova podmínka

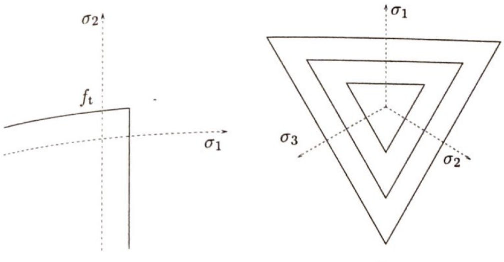
Mohr-Coulombova podmínka se nejprve upraví na tvar

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \sigma_{max}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - \frac{1 - \sin\phi}{1 + \sin\phi}\sigma_{min}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - f_t \cos\phi$$

a pro $\phi = 90°$

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = \sigma_{max}(\{\boldsymbol{\sigma}\}) - f_t$$

- v určitých případech lze využít pro beton



(a) (b)

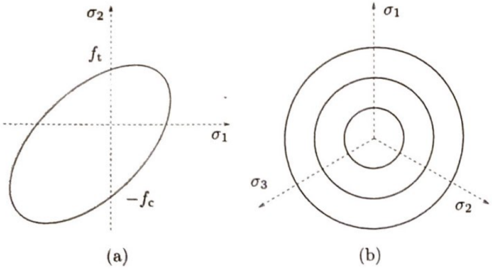
- v analogii s Mohr-Coulombovou podmínkou lze zobecnit také von Misesovu podmínku, čímž získáme Drucker-Pragerovu podmínku

Drucker-Pragerova podmínka

$$f(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = 3\alpha_{\phi}\sigma_m(\{\boldsymbol{\sigma}\}) + \sqrt{J_2(\{\boldsymbol{\sigma}\})} - \tau_0$$

- výhodou této podmínky je skutečnost, že veden a rozdílné hodnoty pevnosti v tlaku a tahu $\rightarrow$ lze uplatnit pro simulace chování betonu

$$f(\sigma_1, \sigma_2) = \alpha_\phi(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2)}$$



Poděkování

Vážím si Vaší pozornosti a děkuji, že jste to vydrželi.

Zdroje

1. JIRÁSEK, Milan a ZEMAN, Jan. **Přetváření a porušování materiálů: Dotvarování, plasticita, lom a poškození**. Praha: ČVUT, 2012.
   - z uvedeného skripta byly převzaty všechny obrázky