



FAKULTA
STAVEBNÍ ústav
stavební mechaniky

NDA015 Pružnost a plasticita
přednáška 2 (v.24/25.1)
Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

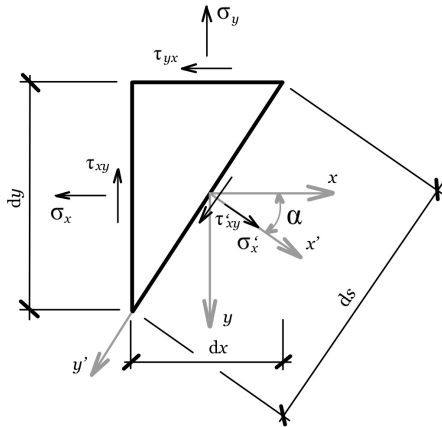
1. Hlavní napětí, invarianty napětí
2. Rovinný problém (stěna)
 - rovinná napjatost
 - rovinná deformace
3. Desky
4. Deskostěna
5. Skořepiny

- stav napjatosti v bodě je dán tenzorem napjatosti, který lze vzhledem k větě o ekvivalenci smykových napětí zapsat pomocí vektoru

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

- napjatost může být
 - přímková (výsledný vektor napětí v libovolném řezu daným bodem leží v přímce)
 - rovinná (výsledný vektor napětí v libovolném bodě leží ve společné rovině)
 - prostorová (obecná)^a
- pro rozlišení mezi uvedenými typy lze využít **hlavních napětí**
- vztahy pro hlavní napětí je možné odvodit z rovnováhy na seříznutém elementu

^aLze dokázat, že přímková resp. rovinná napjatost je zvláštním případem prostorové napjatosti, kde 2 hlavní resp. 1 hlavní napětí je rovno nule.



Obr. 1: Seříznutý element

- otáčením souřadného systému se mění hodnoty vektoru napětí
- silová ekvivalence

$$\sum F_n = 0$$

$$\sigma'_x dA - \sigma_x \cos^2 \alpha dA - \sigma_y \sin^2 \alpha dA - 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

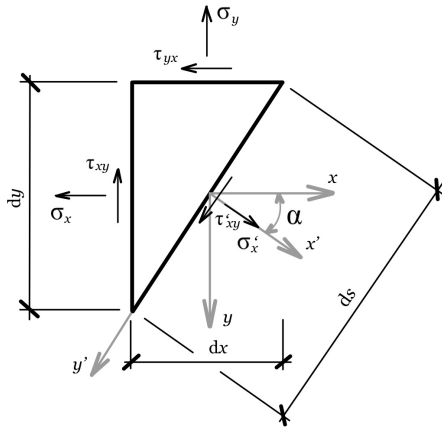
$$\sum F_t = 0$$

$$\tau'_{xy} dA + \sigma_x \sin \alpha \cos \alpha dA - \sigma_y \sin \alpha \cos \alpha dA - \tau_{xy} \cos^2 \alpha dA + \tau_{xy} \sin^2 \alpha dA = 0$$

- po úpravě

$$\sigma'_x = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau'_{xy} = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_y \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$



Obr. 2: Seříznutý element

- pro určitý úhel pootočení se získá stav následující napjatosti, kdy **normálová napětí dosahují extrémních hodnot** ze všech možných směrů
- úhel pootočení souřadného systému, lze získat z podmínky extrému

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial \alpha_0} = 0$$

- provedením derivace a porovnáním se vzorcem pro transformovaná smyková napětí

$$\frac{\partial \sigma'_x}{\partial \alpha_0} = -\sigma_x \sin 2\alpha + \sigma_y \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 2\tau'_{xy} = 0$$

- se zjistí, že **smykové napětí je nulové** pro tento souřadný systém (hlavní osy)

$$\tau'_{xy} = 0$$

- pro úhel pootočení hlavních os platí

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Dosazením úhlu pootočení hlavních os do transformačních vztahů pro normálová napětí se získají hlavní napětí σ_1, σ_2

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

- obvykle je σ_1 označováno algebraicky větší z obou hlavních napětí (uvažuje se (+) ve vzorci)

$$\sigma_1 = \max \quad \sigma_2 = \min$$

- hlavní osy jsou na sebe kolmé, algebraicky větší napětí svírá menší úhel s prvním hlavním napětím

Hlavní napětí

Hlavní napětí v prostoru

- uvažujme skloněnou rovinu, jejíž normála svírá s osami souřadnic úhly dané směrými kosiny l , m , n , pro které platí

$$\cos^2(x, n) + \cos^2(y, n) + \cos^2(z, n) = l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

- tato rovina vytíná na osách $\triangle ABC$ a tvoří elementární čtyřstěn (OABC)

- silová rovnováha rozloženého napětí na šikmé rovině se složkami tenzoru napětí má podobu^a

$$p_x = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n$$

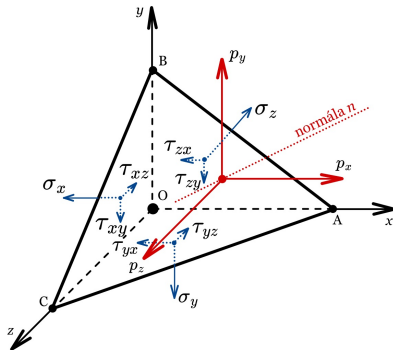
$$p_y = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n$$

$$p_z = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n$$

- **hlavní roviny** jsou takové, že jsou na nich **smýková napětí nulová** $\rightarrow$ **hlavní napětí** je tedy normálové napětí na této rovině a platí

$$p_x = \sigma_l, \quad p_y = \sigma_m, \quad p_z = \sigma_n$$

^aplocha $\triangle ABC$ je jednotková a proto $\triangle OBC = \cos(x, n) = l$, $\triangle OAC = \cos(y, n) = m$ a $\triangle OAB = \cos(z, n) = n$



Obr. 3: Elementární čtyřstěn

- dosazením do rovnic rovnováhy získáme soustavu rovnic

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n = 0$$

$$\tau_{yx}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz}n = 0$$

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0$$

- hlavní napětí σ jsou řešením kubické rovnice (determinant výše uvedené soustavy je roven 0)

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix}$$

Invariant

Je výraz, jehož hodnota se transformací soustavy souřadnic nemění: I_1 **lineární** invariant, I_2 **kvadratický** invariant a I_3 **kubický** invariant.

- zavedeme-li **invarianty napětí**

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

- pak nulový determinant můžeme zapsat rovnicí

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$$

- řešením této kubické rovnice jsou napětí

$$\sigma_1 = \max \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = \min$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

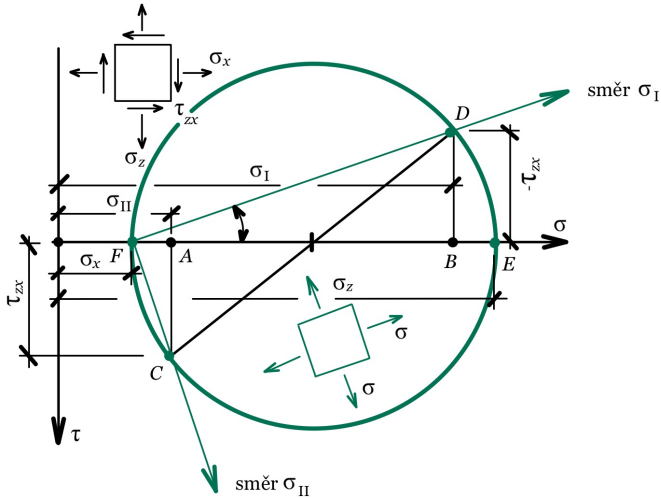
- smyková napětí jsou nulová
- maximální smyková napětí v rovinách procházející některou z hlavních os vznikají v rovinách půlících úhel mezi těmito rovinami (jsou odkloněny o 45°)

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$$

- složkám tenzoru napětí lze dle určitého systému přiřazovat geometrické veličiny, což umožňuje napjatost **zobrazit** a určitým typům napjatosti lze přiřadit geometrické obrazce (plochy, křivky)
- existuje více druhů zobrazení, např. **Beckerovo-Westergaardovo** či **Mohrovo**

Mohrovo zobrazení v rovině zx

1. vodorovná osa (doprava) σ
2. svislá osa (dolů) τ
3. vynese se σ_x : získá se bod A
4. vynese se σ_z : získá se bod B
5. rozpůlí se vzdálenost AB : získá se bod S
6. v bodě A se vynese τ_{zx} : získá se bod C
7. v bodě B se vynese τ_{zx} získá se bod D
8. sestrojí se kružnice se středem S a poloměrem SC
9. průsečík kružnice s vodorovnou osou: vlevo bod F (udává σ_2), vpravo bod E (udává σ_1)
10. přímka FC udává směr prvního hlavního napětí
11. přímka FD udává směr druhého hlavního napětí



Obr. 4: Mohrova kružnice

- vzhledem ke geometrické povaze konstrukcí lze provádět jejich idealizaci
- 3D problém lze redukovat na problém nižší dimenze (2D – stěny, desky) a (1D – pruty)

2D problémy

- jedná se o problémy, kde nenulové složky posunutí $\{\mathbf{u}\}$, $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ a napětí $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ jsou funkcemi 2 proměnných
- zvláštní případ 2D problému, kdy tenzor napjatosti $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ nebo tenzor deformace $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ leží v jedné rovině (v této rovině leží také zatížení a podepření) je **rovinný problém**
- podle toho, zda-li v rovině uvažujeme tenzor **napjatosti** $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ resp. tenzor **deformace** $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$ rozlišujeme:
 - **rovinnou napjatost** (stěna)
 - **rovinnou deformaci** (stěna sevřená mezi tuhými bloky, např.: opěrná stěna, hráz)

Rovinný problém

2D model konstrukce

- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha je rovinná
- zatížení a okrajové podmínky leží ve střednicové rovině

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

- předpoklady odvození:

- deformace a napětí ve střednicové rovině xy se ve směru z kolmém na tuto rovinu nemění
- všechny veličiny jsou funkcí souřadnic x, y

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

- předpokladů plyne, že příslušná zkosení a smyková napětí vynulována

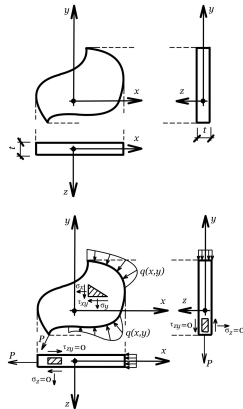
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \rightarrow \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \rightarrow \tau_{zx} = G\gamma_{zx} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 \rightarrow \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \rightarrow \tau_{yz} = G\gamma_{yz} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$$



Obr. 5: Rovinný problém

Rovinný problém

Napětí a vnitřní síly ve stěně

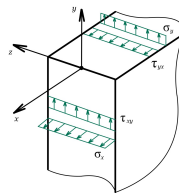
- předpoklad konstantního rozložení napětí a deformace po tloušťce stěny
- vnitřní síly jsou definovány na jednotku délky řezu
- jednotkou je [kN/m]

$$n_x = \sigma_x \cdot t$$

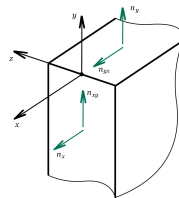
$$n_y = \sigma_y \cdot t$$

$$n_{xy} = \tau_{xy} \cdot t$$

- t je tloušťka stěny



Obr. 6: Napětí ve stěně

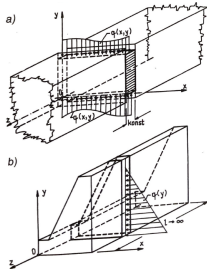


Obr. 7: Vnitřní síly ve stěně

Rozlišujeme 2 varianty fyzikálních vztahů

Rovinná napjatost

- deformace v příčném směru není omezena
- **napětí** vzniká pouze **v rovině střednice**
- typickým příkladem je běžná stěna



Obr. 8: (a) rovinná napjatost, (b) rovinná deformace

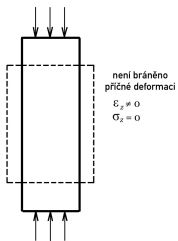
Rovinná deformace

- je zabráněno posunu bodů ve směru kolmém na střednici
- **deformace** vzniká pouze **v rovině střednice**
- použije se pro výseky dlouhých prizmatických konstrukcí např.:
 - opěrné zdi
 - tunely apod.
- pokud jsou okrajové podmínky konstantní ve směru z lze tímto způsobem redukovat 3D na 2D

Rovinná napjatost

$$\varepsilon_z \neq 0$$

$$\sigma_z = 0$$

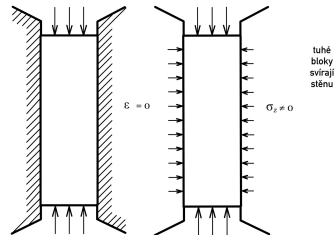


Obr. 9: Rovinná napjatost

Rovinná deformace

$$\varepsilon_z = 0$$

$$\sigma_z \neq 0$$



Obr. 10: Rovinná deformace

Rovinný problém

Rovinná napjatost

- pouze složky napětí ležící v rovině xy jsou nenulové
- není bráněno deformaci v příčném směru $\rightarrow \sigma_z = 0$
- vektor napětí má tvar

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, 0, \tau_{xy}, 0, 0\}^T$$

- dosazením vektoru napětí do fyzikálních vztahů

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{C}]\{\boldsymbol{\sigma}\}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ 0 \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- se obdrží vektor deformace

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$$

- deformace v příčném směru ε_z je způsobena vlivem Poissonova součinitele a vzniká působením normálových napětí ve střednicové rovině
- deformaci ε_z lze získat dodatečně, ale při výpočtu se s ní nepracuje

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

- **zkráceně** lze tedy fyzikální vztahy vyjádřit následovně

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{C}]\{\sigma\},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

- vztah pro výpočet napětí pomocí matice tuhosti $[\mathbf{D}] = [\mathbf{C}]^{-1}$ má tvar

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

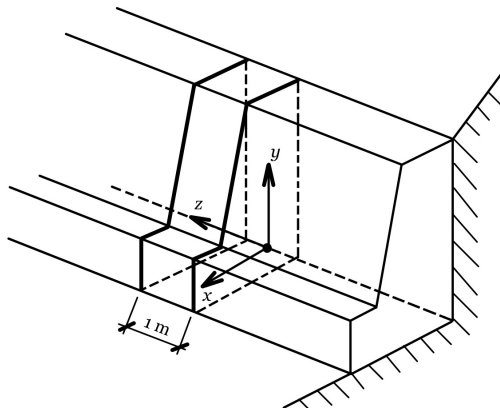
- pouze složky deformace ležící v rovině xy jsou nenulové
- posun bodů ve směru osy z je nulový $\rightarrow$ nevzniká žádná deformace v tomto směru

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

- vektor deformace má tedy tvar

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, 0, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$$

- ...



Obr. 11: Rovinná deformace

- dosazením vektoru deformace do fyzikálních vztahů

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \\ \gamma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- se obdrží vektor napětí

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \gamma_{xy}, 0, 0\}^T$$

- napětí v příčném směru σ_z je způsobeno vlivem Poissonova součinitele a je možno vyjádřit dodatečně, ale při výpočtu se s ním nepracuje

$$\sigma_z = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \neq 0$$

- **zkráceně** lze tedy fyzikální vztahy pomocí matice tuhosti vyjádřit následovně

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\},$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

- vztah pro výpočet napětí pomocí matice poddajnosti $[\mathbf{C}] = [\mathbf{D}]^{-1}$ má tvar

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{C}]\{\sigma\},$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1-\nu^2}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ -\frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{1-\nu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

- získají se redukcí prostorových vztahů pro rovinu xy (nenulové jsou pouze složky posunutí u a v)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

- maticově

$$\{\varepsilon\} - [\partial]^T \{\mathbf{u}\} = 0, \text{ kde}$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \bullet & \frac{\partial}{\partial y} \\ \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ a}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T \quad \{\mathbf{u}\} = \{u, v\}^T$$

- $\{\mathbf{u}\}$ je vektor přemístění

- získají se redukcí prostorových vztahů pro rovinu xy

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

- maticově

$$[\partial]\{\sigma\} + \{X\} = 0, \text{ kde}$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \bullet & \frac{\partial}{\partial y} \\ \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \text{ a}$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T \quad \{X\} = \{X, Y\}^T \quad Z = 0$$

- $\{X\}$ je vektor objemových sil

- z geometrických vztahů plyne (nenulové jsou jen ε_x , ε_y a γ_{xy}) 1 podmínka kompatibility ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- maticově

$$\{\varepsilon\}^T \{\partial^2\} = \{0\}$$

- kde matice diferenciálních operátorů $\{\partial^2\}$ lze zapsat ve formě vektoru

$$\{\partial^2\} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

- řešení rovinného problému lze řešit v napětích (silové variantě), kdy se využívá právě výše uvedené rovnice kompatibility – vede na tzv. **Lévyho podmínku**

Rovinný problém

Lévyho podmínka¹

- dosadíme $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \nu \sigma_y}{E}$, $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \nu \sigma_x}{E}$ a $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 2(1 + \nu) \frac{\tau_{xy}}{E}$ do rovnice kompatibility

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- smíšená derivace smykových napětí se získá příslušným derivováním statických rovnic a jejich sečtením

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial Y}{\partial y} = 0$$

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

- dosazením a úpravou rovnice kompatibility získáme rovnici

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

- s použitím **Laplaceova** operátoru

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

- jsou-li objemové síly konstantní (vlastní tíha pro homogenní a izotropní materiál) a zanedbáváme-li setrvačné síly pak

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

- Lévyho podmínka** pak spolu se statickými rovnicemi tvoří soustavu 3 diferenciálních rovnic pomocí kterých lze určit složky tenzoru napětí $\{\sigma\}$

¹Uvažujeme bez vlivu teploty (vliv teploty viz [2 str. 20])

- Využívá se existence tzv. Airyho funkce napětí (pro případ kdy $X = Y = 0$)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

- těmto rovnicím odpovídají dvě pomocné funkce $G(x, y)$ a $H(x, y)$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = -\tau_{xy}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \sigma_x$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \sigma_y, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\tau_{xy}$$

- z věty o vzájemnosti smykových napětí poté plyne

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

- uvedená rovnice dokazuje existenci funkce $F(x, y)$, která plní vztahy

$$\frac{\partial F}{\partial x} = H, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = G$$

- dosadíme-li nyní do vztahů pomocných funkcí získáme

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

- určíme-li funkci $F(x, y)$, tak můžeme derivováním určit složky tenzoru napětí, ale **jak tuto funkci určit?** Využijeme **Lévyho podmínku**, do které dosadíme výše uvedené druhé derivace

$$\Delta \Delta F = 0$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0$$

vektor napětí

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T$$

vektor deformace

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T$$

vektor přemístění

$$\{\mathbf{u}\} = \{u, v\}^T \text{ resp. } \{\mathbf{u}\} = \{u_x, u_y\}^T$$

diferenciální podmínky rovnováhy (2x)

$$[\partial]\{\sigma\} + \{X\} = 0$$

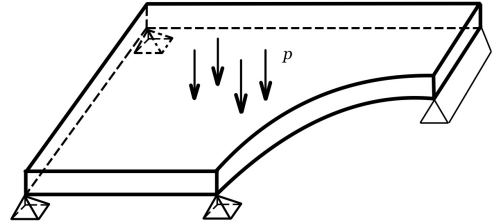
geometrické vztahy (3x)

$$\{\varepsilon\} - [\partial]^T \{u\} = 0$$

fyzikální vztahy (3x)

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad \text{nebo} \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

- 2D model konstrukce
- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha je rovinná
- zatížení a okrajové podmínky působí kolmo ke střednicové rovině



Obr. 12: Schéma modelu desky

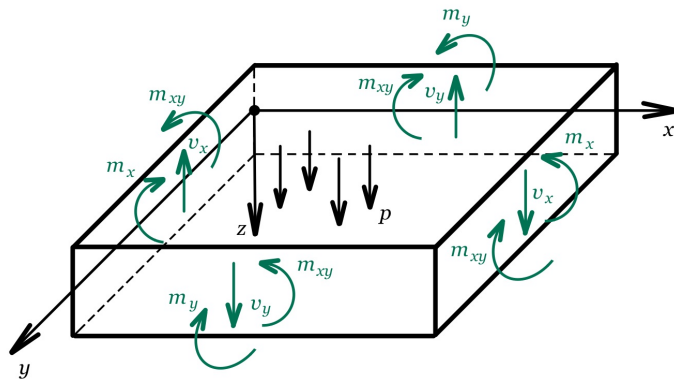
Kirchhofova (tenká) deska – *technická teorie desek*

- body střednicové roviny se v této rovině neposunují
- normálové napětí a deformace ve směru normály ke střednicové rovině se zanedbají
- body na normále ke střednici zůstávají po deformaci v přímce, která **je kolmá** k ohybové ploše

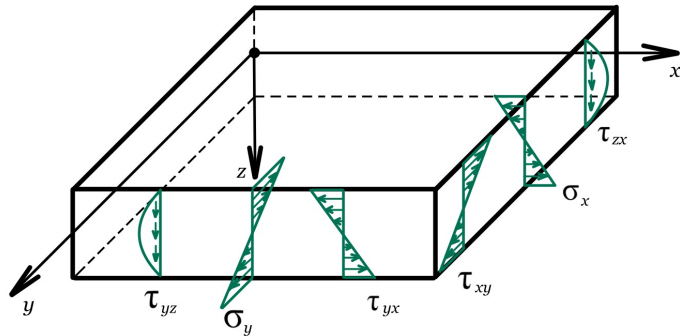
Mindlinova (tlustá) deska

- body střednicové roviny se v této rovině neposunují
- normálové napětí a deformace ve směru normály ke střednicové rovině se zanedbají
- body na normále ke střednici zůstávají po deformaci v přímce, která **není kolmá** k ohybové ploše

U tlusté desky **se uvažuje vliv smyku na průhyb desky**, deformace od smykového působení způsobí změnu úhlu mezi ohybovou plochou a původní normálou ke střednicové ploše.



Obr. 13: Vnitřní síly na desce



Obr. 14: Napětí v desce

■ silová

$$\sum F_{z,i} = 0$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

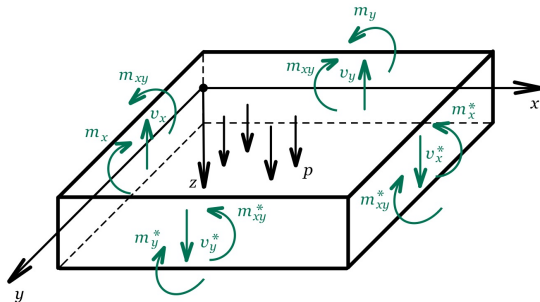
■ momentové

$$\sum M_{y,i} = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\sum M_{x,i} = 0$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - v_y = 0$$



Obr. 15: K podmínkám rovnováhy

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} z = \varepsilon_{mx} z$$

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

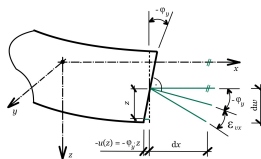
$$\varepsilon_y(z) = \frac{\partial v(z)}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} z = \varepsilon_{my} z$$

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

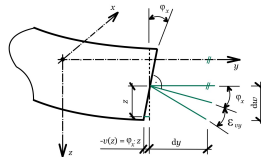
$$\gamma_{xy}(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial y} + \frac{\partial v(z)}{\partial x} =$$

$$= \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) z = \varepsilon_{mxy} z$$

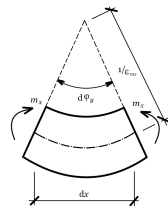
$$\varepsilon_{mxy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$



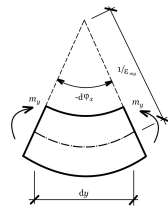
(a)



(c)

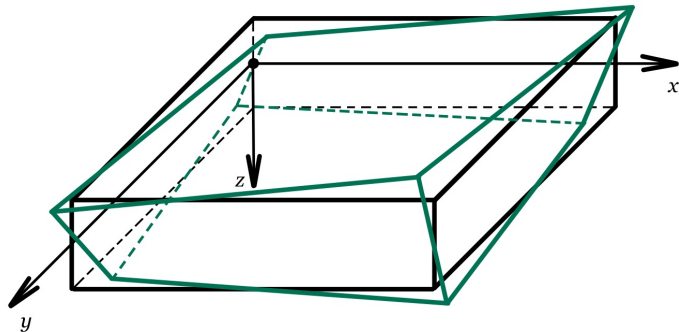


(b)



(d)

Obr. 16: Geometrické vztahy: ohyb



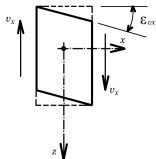
Obr. 17: Zkosený element desky

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\varphi_y + \varepsilon_{vx}$$

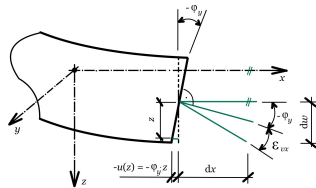
$$\varepsilon_{vx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_x + \varepsilon_{vy}$$

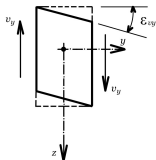
$$\varepsilon_{vy} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x$$



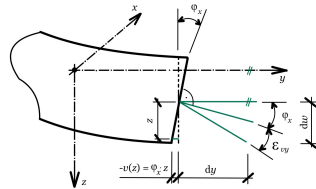
(a)



(b)



(c)



(d)

Obr. 18: Geometrické vztahy: smyk

- každá vrstva ve stavu rovinné napjatosti

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \quad \tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{(1-\nu)}{2} \gamma_{xy}$$

$$m_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] z dz \quad m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu\varepsilon_{my}]$$

$$m_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] z dz \quad m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu\varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma_{xy} z dz \quad m_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{mxy},$$

kde

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

je tzv. **desková tuhost**

- platí obdobné vztahy jako pro prut
- průřez je obdélník $\rightarrow$ redukovaná smyková plocha $A_\kappa = \frac{A}{1,2}$

$$V = GA_\kappa \varepsilon_V = G \frac{A}{1,2} \varepsilon_V$$

$$v_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{zx} z dz \quad v_x = \frac{Gh}{1,2} \varepsilon_{vx}$$
$$v_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} z dz \quad v_y = \frac{Gh}{1,2} \varepsilon_{vy}$$

- vztahy jsou odvozeny na základě **energetických podmínek**

- u Kirchhofovy desky zanedbáváme vliv smyku na průhyb a uvažujeme

$$Gh = \infty \quad \varepsilon_{vx} = \varepsilon_{vy} = 0$$

- normála ke střednici, zůstává po deformaci normálou k ohybové ploše
- fyzikální podmínky pro měrné posouvající síly a zkosení ztrácí význam

$$v_x = \frac{Gh}{1,2} \varepsilon_{vx} \quad v_y = \frac{Gh}{1,2} \varepsilon_{vy}$$

- dosazením za ε_V a vyloučením φ se získají nové geom. pod.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{vy} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x & \varphi_x &= \frac{\partial w}{\partial y} & \varepsilon_{my} &= -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} & \varepsilon_{my} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{vx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y & \varphi_y &= -\frac{\partial w}{\partial x} & \varepsilon_{mx} &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} & \varepsilon_{mx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{mxy} &= \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & & & & & \varepsilon_{mxy} &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

měrné vnitřní síly

$$m_x; m_y; m_{xy}; v_x; v_y$$

deformace průřezu

$$\varepsilon_{mx}; \varepsilon_{my}; \varepsilon_{mxy}; \varepsilon_{vx}; \varepsilon_{vy}$$

přemístění

$$w; \varphi_x; \varphi_y$$

statické podmínky (3)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - v_y = 0$$

geometrické podm. (5)

$$\varepsilon_{mx} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{mxy} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{vx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_y$$

$$\varepsilon_{vy} = \frac{\partial w}{\partial y} - \varphi_x$$

fyzikální podmínky (5)

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{mxy}$$

$$v_x = \frac{Gh}{1,2} \varepsilon_{vx}$$

$$v_y = \frac{Gh}{1,2} \varepsilon_{vy}$$

měrné vnitřní síly

$$m_x; m_y; m_{xy}; v_x; v_y$$

deformace průřezu

$$\varepsilon_{mx}; \varepsilon_{my}; \varepsilon_{mxy}$$

přemístění

$$w$$

statické podmínky (3)

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x = 0$$

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - v_y = 0$$

geometrické podm. (3)

$$\varepsilon_{my} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{mx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{mxy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

fyzikální podmínky (3)

$$m_x = D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}]$$

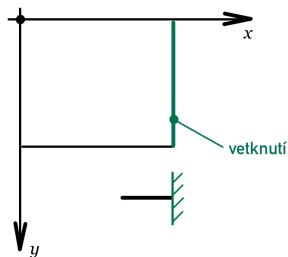
$$m_y = D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}]$$

$$m_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{mxy}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{my} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & m_x &= D [\varepsilon_{mx} + \nu \varepsilon_{my}] & m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
\varepsilon_{mx} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \rightarrow m_y &= D [\varepsilon_{my} + \nu \varepsilon_{mx}] & \rightarrow m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
\varepsilon_{mxy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} & m_{xy} &= D \frac{1-\nu}{2} \varepsilon_{mxy} & m_{xy} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_x &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} - v_x &= 0 \\
m_y &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + p = 0 \\
\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} - v_y &= 0 \\
m_{xy} &= -D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$



Obr. 19: Vetknutý okraj

$$w = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\varphi_y = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

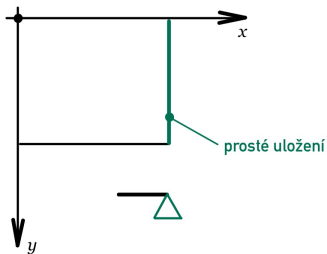
$$\rightarrow \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad \rightarrow \quad m_{xy} = -D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

Nulové veličiny

$$w = 0$$

$$\varphi_y = 0$$

$$m_{xy} = 0$$



Nulové veličiny

$$w = 0$$

$$m_x = 0$$

$$m_{xy} = 0$$

Obr. 20: Prostě podepřený okraj

$$w = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\rightarrow m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

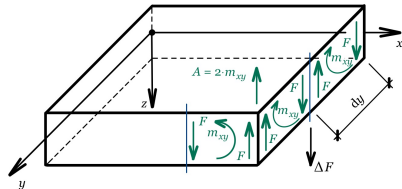
Zbývá vyřešit kroutící momenty (převědou se do posouvajících sil na hraně)

- Kroutící moment na délce Δy : $M = m_{xy} \Delta y$
- nahrazený dvojicí sil: $F = \frac{M}{\Delta y} = m_{xy}$
- rozdíl sousedních sil: $\Delta F = F_{i+1} - F_i = m_{xy,i+1} - m_{xy,i}$
- pomocí Taylorova rozvoje

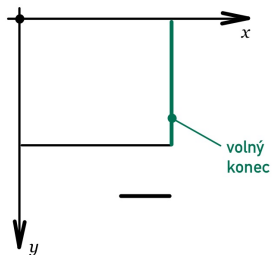
$$\Delta F = m_{xy,i+1} - m_{xy,i} = m_{xy}(y + \Delta y) - m_{xy}(y) =$$

$$m_{xy}(y) + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Delta y - m_{xy}(y) = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \Delta y$$
- přírůstek síly vyjádřený na jednotku délky:

$$\Delta v_x = \frac{\Delta F}{\Delta y} = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$
- se přidá k posouvajícím silám na hraně (doplněná posouvající síla): $\bar{v}_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0$



Obr. 21: Prostě podepřený okraj - kroucení



Obr. 22: Volný okraj

Nulové veličiny

$$m_x = 0$$

$$v_x = 0$$

$$m_{xy} = 0$$

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \rightarrow m_x = 0$$

$$v_x = 0$$

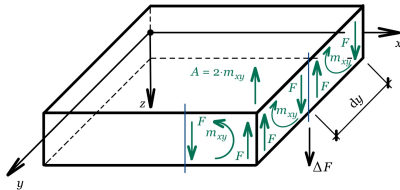
$$\bar{v}_x = v_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = 0 \rightarrow$$

$$m_{xy} = 0$$

- dvojice sil od kroutících momentů se v rozích nevyruší, ale sečtou, vznikne rohová síla

$$A = 2m_{xy}$$

- pokud nejsou rohy desky uchyceny, zvedají se, zvýší se momenty v poli a průhyby
- pokud jsou uchyceny vznikají v rozích kroutící momenty



Obr. 23: Prostě podepřený okraj - kroucení

- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha **je** rovinná
- zatížení a okrajové podm. působí **obecně**

Měrné vnitřní síly

membránové:

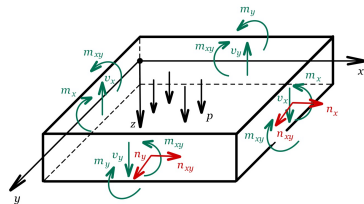
$$n_x; n_y; n_{xy}$$

- od konstantního průběhu napětí po tloušťce (obdoba stěnového chování)

ohybové:

$$m_x; m_y; m_{xy}; v_x; v_y$$

- od lineárního průběhu napětí po tloušťce a příčného smyku (obdoba deskového chování)



Obr. 24: Vnitřní síly

- 2 rozměry výrazně větší než třetí
- střednicová plocha **není** rovinná
- zatížení a okrajové podm. působí **obecně**

Měrné vnitřní síly

membránové:

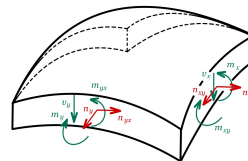
$$n_x; n_y; n_{xy}; n_{yx}$$

- od konstantního průběhu napětí po tloušťce (obdoba stěnového chování)

ohybové:

$$m_x; m_y; m_{xy}; m_{yx}; v_x; v_y$$

- od lineárního průběhu napětí po tloušťce a příčného smyku (obdoba deskového chování)



Obr. 25: Vnitřní síly

■ Technická teorie skořepin

- tloušťka, rozměry: $h \ll L_x, L_y$
- poloměry křivosti: $h \ll r_x, r_y$

$$m_{xy} = m_{yx} \quad n_{xy} = n_{yx}$$

- **Oblý tvar** navržené skořepiny zajišťuje výrazně membránové působení – efektivní využití materiálu (štíhlé konstrukce)

Poděkování

Vážím si Vaší pozornosti a děkuji, že jste to vydrželi.

Zdroje

1. SERVÍT, RADIM; DOLEŽALOVÁ, EVA A CRHA, MILOSLAV. **Teorie pružnosti a plasticity I.** Praha: SNTL, 1981.
2. SERVÍT, RADIM; DRAHOŇOVSKÝ, ZBYNĚK; ŠEJNOHA, JIŘÍ A KUFNER, VÁCLAV. **Teorie pružnosti a plasticity II.** Praha: SNTL, 1984.
3. podklady od ING. LUŽKA BRDEČKA, PH.D.