



FAKULTA
STAVEBNÍ ústav
stavební mechaniky

NDA015 Pružnost a plasticita
přednáška 1 (v.24/25.1)
Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

1. Úvod do teorie klasické lineární pružnosti
2. Výpočtové modely
3. Základní veličiny pružnosti
4. Základní rovnice pružnosti ve 3D
5. Základní rovnice pružnosti v 1D

Základní pojmy

- pružnost je odvětví **mechaniky kontinua**
- **kontinuum** je spojité prostředí jehož fyzikální (mechanické) vlastnosti lze popsat spojitými funkcemi
- **kontinuum** může vyplňovat objem **tělesa**¹ s konečnými rozměry (deska, prut) nebo může být v jednom i více směrech nekonečné (tunel, opěrná stěna)²
- **těleso** (ozn. Ω) je množina bodů ve 3D prostoru (každé 2 body lze spojit čarou) omezené **hranicí** (ozn. Γ) což je plocha, která samu sebe neprotíná
- uvažujeme-li body tělesa jako částice (hmotné body), tak mluvíme o hmotném tělese, pro které můžeme definovat **napětí** a **deformace**
- ... *that is the question* (SHAKESPEARE)

Abychom byli však schopni provést matematický zápis, musíme zavést idealizaci a zjednodušující předpoklady ...

¹Předpokládáme těleso v pevné fázi.

²Více viz 2D úlohy (rovinná napjatost a rovinná deformace).

Úvod do teorie klasické lineární pružnosti

Základní pojmy a předpoklady

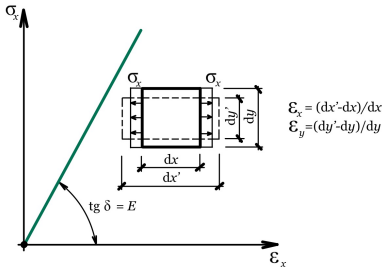
Z hlediska fyzikálních vlastností:

Předpoklady

- látka tělesa je **dokonale lineárně pružná**

Lineárně pružný materiál: *Hookův zákon*

- deformace od normálového napětí: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$
- pro ostatní směry platí: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E}\nu$
- smykové napětí: $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{yx}}{G}$
- materiálové charakteristiky:
 - E ... Youngův modul pružnosti
 - ν ... Poissonův součinitel příčné kontrakce
 - G ... modul pružnosti ve smyku



Obr. 1: Fyzikální rovnice pro lin. materiál

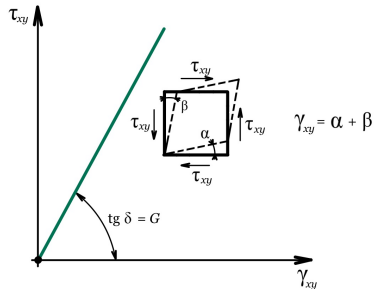
Z hlediska fyzikálních vlastností:

Přepoklady

- látka tělesa je **dokonale lineárně pružná**

Lineárně pružný materiál: *Hookův zákon*

- deformace od normálového napětí: $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$
- pro ostatní směry platí: $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E}$
- smykové napětí: $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{yx}}{G}$
- materiálové charakteristiky:
 - E ... Youngův modul pružnosti
 - ν ... Poissonův součinitel příčné kontrakce
 - G ... modul pružnosti ve smyku



Obr. 2: Fyzikální rovnice pro lin. materiál

Předpoklady

- látka tělesa je **homogenní** (vykazuje ve všech bodech tělesa stejné mechanické vlastnosti) a **izotropní** (ve všech směrech vycházejících z jednoho bodu jsou stejné vlastnosti)
- **deformace** tělesa jsou v porovnání s jeho rozměry **velmi malé**
- uvažujeme jen se **statickým působením** sil a zanedbáváme vliv setrvačných sil (dynamika)
- v **nezatíženém** tělese **nevznikají** vnitřní síly (napětí), tj. tzv. počáteční nenapjatost

Uvedené předpoklady jsou stavebními kameny **klasické lineární teorie pružnosti** a přidáme-li k tomu, že sestavujeme podmínky rovnováhy na nedeformovaném tělese (teorie 1. řádu), tak hovoříme o

- **fyzikálně lineární teorii** (lineární vztah mezi složkami tenzoru deformace a napětí) a
 - **geometricky lineární teorii** (1. řád)
- platí **princip superpozice** (účinků).



Obr. 3: 1. vs. 3. řád

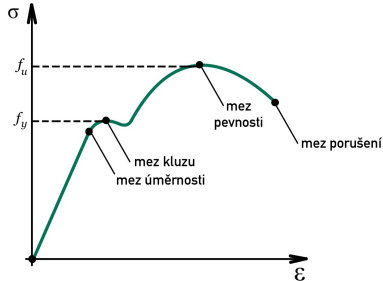
Jaká je však realita?



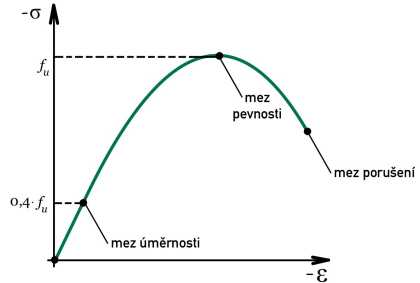
Obr. 4: Blue or red pill? (zdroj: https://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_digital_rain)

→ Teorie plasticity a poškození

- neexistuje dokonale pružný materiál
- většina materiálů vykazuje trvalé deformace



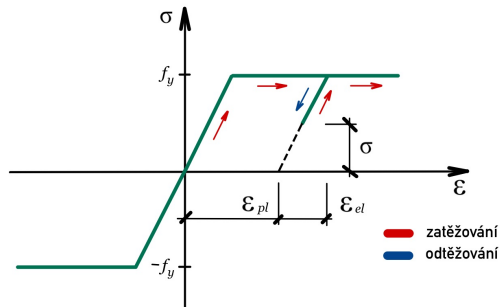
Obr. 5: Pracovní diagram oceli



Obr. 6: Pracovní diagram betonu

→ Teorie plasticity a poškození

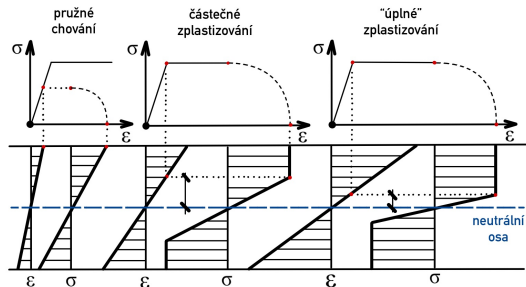
- pokud napětí překročí mez plasticity nastávají nevratné deformace (zůstávají i po odtížení)
- ideálně pružno-plastický diagram bez zpevnění deformace narůstají bez nárůstu napětí



Obr. 7: Příklad ideálně pružno-plastického materiálu

→ Teorie plasticity a poškození

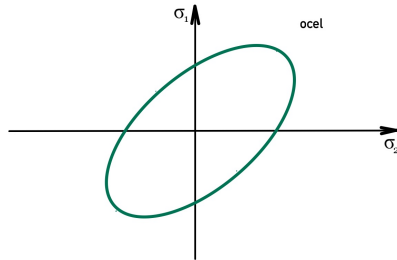
- plasticita na ohýbaném průřezu: zahrnutím plasticity do výpočtu obdržíme vyšší vypočtenou únosnost než je tomu u pružného výpočtu



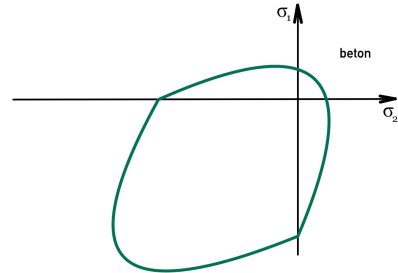
Obr. 8: Plasticita ohýbaného průřezu

→ Teorie plasticity a poškození

- při dosažení pevnosti materiálu nastává porušování
- víceosá napjatost — podmínka porušení
- beton: různé pevnosti v tahu a tlaku



Obr. 9: Podmínka plasticity: ocel



Obr. 10: Podmínka plasticity: beton

→ Ortotropie, anizotropie, částicové modely, mesoscale modely



Obr. 11: Struktura betonu (generováno AI)



Obr. 12: Struktura dřeva (generováno AI)

→ Geometrická nelinearita

- teorie 1. řádu platí docela dobře
- principiálně jde v dimenzování o návrh takových konstrukcí, aby byly pohodlné a bezpečné (2. MSÚ)



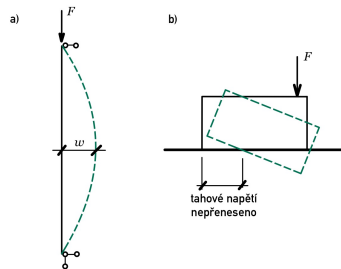
Obr. 13: "Únosné"stropy (generováno AI)

→ Geometrická nelinearita

- rovnováha se vyjadřuje na deformované konstrukci (např. vzpěr prutů, boulení, klopení)

→ Konstrukční nelinearita

- při změně znaménka napětí **nedochází** k přenosu tohoto napětí (např. základová spára – přenáší jenom tlak, lano – přenáší jenom tah)



Obr. 14: a) geometrická nelinearita, b) konstrukční nelinearita

→ Dynamika

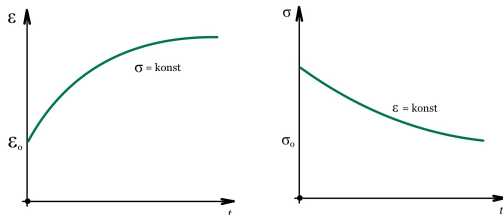
- statické působení lze v podstatě uvažovat jen pro stálé složky zatížení
- pro nahodilé je vhodné využít dynamické výpočty s uvažováním setrvačných sil (zatížení dopravou, vítr)



Obr. 15: Tacoma Narrows Bridge (zdroj: [https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_\(1940\)\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940)))

→ Reologie

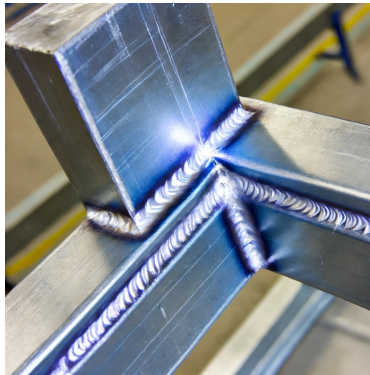
- vlastnosti měnící se s časem – nejvyšší nárůst na počátku
- **Smršťování**
 - deformace vyvolaná prostředím
 - suché prostředí — smršťování, mokré prostředí — nabývání
 - zavádí se do výpočtu obdobně jako teplota
- **Dotvarování/relaxace**
 - změny vyvolané dlouhodobě působícím napětím v konstrukci
 - zavádí se redukcí modulu pružnosti nebo pomocí reologických modelů (Kelvinův řetězec, Maxwellův řetězec)



Obr. 16: Dotvarování a relaxace

→ Počáteční ~~nenapjatost~~

- zrání betonu
- svařované konstrukce



Obr. 17: Tepelně ovlivněná oblast v okolí svaru (generováno AI)

- přestože, jsme si ukázali, že reálně předpoklady úplně přesně neplatí, **tak teorie klasické lineární pružnosti nám umožňuje vytvářet metodiky dimenzování** (vůbec něco spočítat)
- pokročilé teoretické oblasti mechaniky kontinua lze zkoumat jen na základě znalostí z lineární teorie pružnosti
- v rámci lineární pružnosti se budeme zabývat:
 - výpočtovými modely
 - základními veličinami (pole posunutí, pole deformace, pole napětí)
 - vztahy mezi základními veličinami (statické podmínky rovnováhy, rovnice fyzikální, rovnice geometrické, rovnice kompatibility)
 - metodami řešení úloh pružnosti

- Idealizace konstrukce (tvorba výpočtového modelu zahrnuje idealizaci):
 - tvaru
 - materiálu
 - okrajových podmínek
 - zatížení
- Typy modelů konstrukcí (dle dimenze)
 - těleso (3D)
 - stěna (2D zatížení a podepření v rovině střednicové plochy)
 - deska (2D zatížení a podepření kolmo na rovinu střednicové plochy)
 - deskostěna (2D zatížení a podepření kolmo na rovinu i v rovině střednicové plochy)
 - skořepina (2D střednicová plocha není rovinná)
 - prut (1D)
- Vlastnosti 3D výpočtových modelů:
 - nejvěrohodnější, bez dalších zjednodušujících geometrických předpokladů, ale obtížně řešitelné
 - přesnými postupy neřešitelné
 - pracuje se s napětími a poměrnými přetvořeními
- Vlastnosti 2D a 1D výpočtových modelů
 - zavádí geometrické předpoklady, kterými se redukuje jeden nebo dva méně významné rozměry
 - 1D modely a vybrané 2D modely lze řešit přesně v rámci lineární pružnosti
 - pracuje se integrálními hodnotami napětí po průřezu vnitřními a měrnými vnitřními silami a deformacemi průřezu
 - kromě posunutí se jako přemístění zavádí také pootočení průřezu

■ Silové

- tíha konstrukcí, předmětů, sněhu ...
- tlaky větru, zemin, kapalin, sybkých hmot...
- působení jiných těles
- příklady silových zatížení (z hlediska mechaniky)
 - osamělá břemena: F [kN], M [kNm]
 - liniová zatížení: n , q [kNm⁻¹], m [kN]
 - plošné tlaky: q_S [kNm⁻²]
 - objemové síly (od vlastní tíhy): X_V [kNm⁻³]

■ Deformační

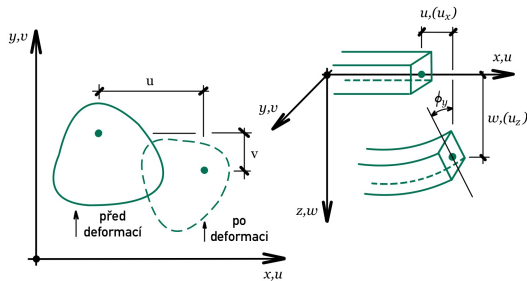
- vynucená přemístění (poklesy základů), zrychlení
- teplotní deformace
- deformace od smršťování a dotvarování

Přemístění

- vyjadřují změnu polohy (posun) daného bodu tělesa vlivem zatížení
- přemístění vztahujeme k pravotočivému kartézskému systému souřadnic
- pro 1D a 2D modely (pruty, desky) jsou definovány přemístění celého průřezu ve formě posunů u a pootočení φ (úhel natočení průřezu vlivem zatížení)
- ve 3D je změna polohy bodu dána vektorem přemístění (tenzorem 1. řádu) $\{\mathbf{u}\}$

$$\{\mathbf{u}\} = \{u, v, w\}^T,$$

- kde u , v a w jsou složky vektoru posunutí a zároveň funkcemi souřadnic x , y a z



Obr. 18: Přemístění

Deformace

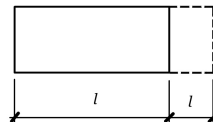
- vyjadřují relativní délkové a úhlové změny vyvolané zatížením
- omezíme se zatím jen na základní definici ze základů pružnosti (více viz geometrické rovnice)
- **poměrné protažení/zkrácení** ε

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

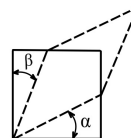
- **zkosení**

$$\gamma = \alpha + \beta$$

a)



b)



Obr. 19: a) Poměrné protažení, b) Poměrné zkosení

Vnitřní síly

- jsou vyvolané vnějším zatížením
- jsou definovány na řezu tělesem
- vyjadřují vzájemné působení dvou částí těles oddělených řezem z principu akce a reakce
- uvádějí do rovnováhy jednotlivé části těles oddělené řezem

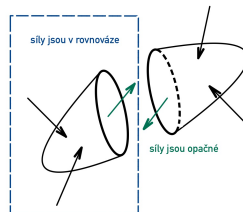
Napětí

- vyjadřují míru silového namáhání daného bodu řezu
- **normálová napětí** (působí kolmo na plochu řezu)

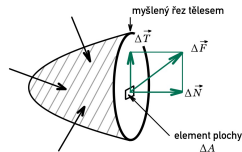
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta A}$$

- **smyková napětí** (působí v ploše řezu)

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta A}$$

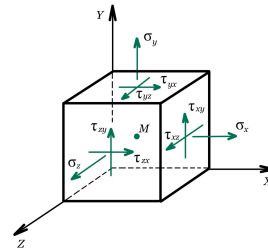


Obr. 20: Vnitřní síly na oddělených řezech



Obr. 21: Napětí

- základní veličiny a vztahy nejlépe odrážejí skutečnost
 - obtížně řešitelný systém rovnic
 - obtížnější interpretace výsledků
 - základní vztahy poskytují rámec pro odvození 1D a 2D modelů
 - 1D a 2D modely zavádí další předpoklady, pomocí kterých se redukuje dimenze úlohy i počet rovnic a jejich neznámých veličin
-
- normálové napětí σ_i
 - působí kolmo k ploše
 - smykové napětí $\tau_{i,j}$
 - působí v ploše
 - značení složek napětí
 - první index (i) – normála k ploše
 - druhý index (j) – směr působení
 - kladná plocha – plocha s větší souřadnicí
 - kladná směr napětí – na kladné ploše působí souhlasně s kladnými souřadnými osami



Obr. 22: Diferenciální element tělesa

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Momentové podmínky rovnováhy

- momentová rovnováha k ose z'

$$\sum M_{z',i} = 0$$

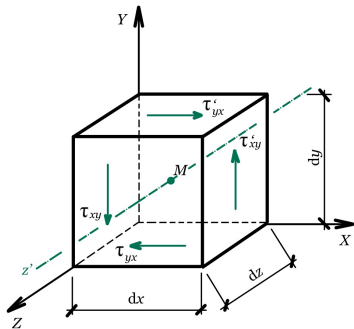
$$(\tau_{xy} + \tau'_{xy})dydz \frac{dx}{2} - (\tau_{yx} + \tau'_{yx})dxdz \frac{dy}{2} = 0$$

- z Taylorova rozvoje: $\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx$ a

$$\tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$$

- vynechají se členy: dx^2 a dy^2 a získá se $\tau_{xy} = \tau_{yx}$
- analogicky pro další osy: $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$
- tato zákonitost se nazývá **vzájemnost smykových napětí**
- díky vzájemnosti smykových napětí lze pracovat jen se 6 složkami napětí a pouze se 3 silovými podmínkami rovnováhy
- vektor napětí má tvar** (tenzor 1. řádu)

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$



Obr. 23: Vzájemnost smykových napětí

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Statické rovnice: diferenciální podmínky rovnováhy (silové)

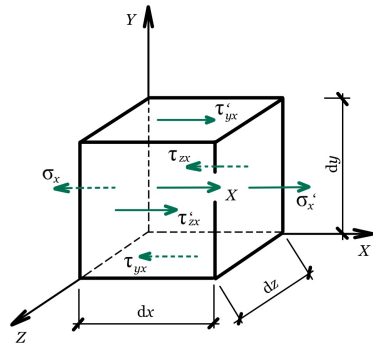
- vyjadřují silovou rovnováhu na diferenciálním elementu tělesa
- v bodě posunutém o diferenciální délku je možno jejich hodnotu definovat pomocí Taylorova rozvoje využitím první parciální derivace dané veličiny
- např. σ_x se v bodě posunutém od dx definuje

$$\sigma_x^* = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

- např. pro směr x se podmínka $\sum F_{x,i} = 0$ vyjádří ve tvaru

$$(\sigma_x^* - \sigma_x) dydz + (\tau_{xy}^* - \tau_{xy}) dx dz + (\tau_{zx}^* - \tau_{zx}) dx dy + X dx dy dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$



Obr. 24: Rovnováha v ose x

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Statické rovnice: diferenciální podmínky rovnováhy (silové)

- zbývající se získají z podmínek rovnováhy pro další směry $\sum F_{y,i} = 0$ a $\sum F_{z,i} = 0$ nebo cyklickou záměnou indexů $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

- maticově

$$[\partial]\{\sigma\} + \{X\} = 0$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \bullet & \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \bullet & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \bullet & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \frac{\partial}{\partial z} & \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

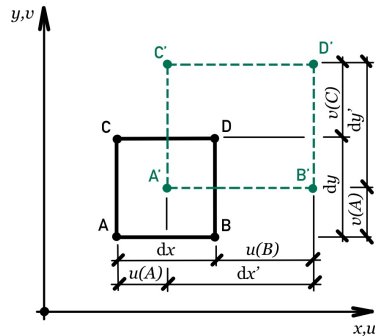
- kde $\{X\} = \{X, Y, Z\}^T$ je vektor **objemových sil**

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Geometrické vztahy

- vyjadřují závislost mezi přemístěními a deformacemi $\{\mathbf{u}\} - \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$
- $u(A) = u(x) = u$
- $u(B) = u(x + dx) = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$
- odvodí se z geometrických závislostí na elementu tělesa, který deformací mění tvar

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{dx' - dx}{dx} = \\ &= \frac{(dx + u(B) - u(A)) - dx}{dx} = \frac{(dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\end{aligned}$$



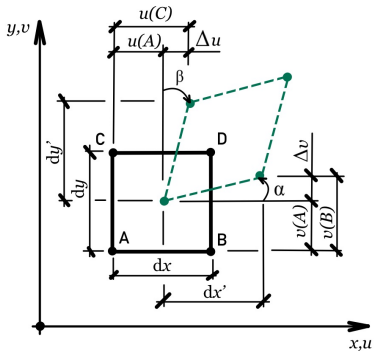
Obr. 25: Posunutí

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Geometrické vztahy

- $u(A) = u(x, y)$
- $v(A) = v(x, y)$
- $u(C) = u(x, y + dy) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} dy$
- $u(B) = u(x + dx, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \alpha + \beta &\approx \frac{\Delta v}{dx'} + \frac{\Delta u}{dy'} = \\ &= \frac{v(B) - v(A)}{dx'} + \frac{u(C) - u(A)}{dy'} \approx \\ &\approx \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} + \frac{u + \frac{\partial u}{\partial y} dy - u}{dy} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$



Obr. 26: Zkosení

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Geometrické vztahy

- zbývající složky vektoru deformace se odvodí ze závislostí ve zbývajících dvou rovinách nebo je lze získat cyklickou záměnou indexů $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ a $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow u$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

- maticově

$$\{\varepsilon\} - [\partial]^T \{\mathbf{u}\} = 0$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \bullet & \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \bullet & \frac{\partial}{\partial z} \\ \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \bullet & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \frac{\partial}{\partial z} & \bullet & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- kde $\{\mathbf{u}\} = \{u, v, w\}^T$

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Fyzikální vztahy

- vyjadřují závislost mezi napětími a deformacemi $\{\sigma\} - \{\varepsilon\}$

- deformace od normálového napětí $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

- pro ostatní směry

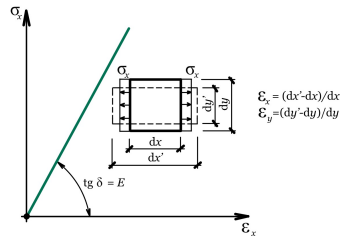
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

- smykové napětí

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

- Materiálové charakteristiky:

- E ... Youngův modul pružnosti
- ν ... Poissonův součinitel příčné kontrakce
- G ... modul pružnosti ve smyku $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Obr. 27: Hookův zákon v tahu a tlaku

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Fyzikální vztahy

- vyjadřují závislost mezi napětími a deformacemi $\{\sigma\} - \{\varepsilon\}$

- deformace od normálového napětí $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$

- pro ostatní směry

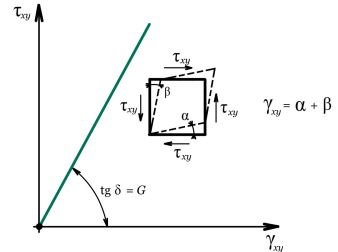
$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

- smykové napětí

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

- Materiálové charakteristiky:

- E ... Youngův modul pružnosti
- ν ... Poissonův součinitel příčné kontrakce
- G ... modul pružnosti ve smyku $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Obr. 28: Hookův zákon ve smyku

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Fyzikální vztahy

- deformace ε_x od napětí ve všech směrech $\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x$ $\varepsilon_x = -\frac{1}{E}\nu\sigma_y$ $\varepsilon_x = -\frac{1}{E}\nu\sigma_z$
- součtem se získá $\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$ $\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$ $\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$
- deformace od smyku jsou pro jednotlivé roviny nezávislé, opět lze získat záměnou indexů

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

- maticově

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{C}]\{\sigma\}$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

- kde $[\mathbf{C}]$ je **matice poddajnosti** (tenzor 2. řádu)

$$[\mathbf{C}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}$$

- vyjádření závislosti napětí na deformacích se získá inverzí výše uvedených vztahů

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

- kde $[\mathbf{D}]$ je **matice tuhosti** (tenzor 2. řádu) a získá se inverzí matice poddajnosti

$$[\mathbf{D}] = [\mathbf{C}]^{-1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$

Základní rovnice pružnosti ve 3D (tělesový model)

Rovnice kompatibility

- vyjádření vzájemné závislosti **složek** deformací, tedy zachování spojitosti → rovnice spojitosti (kompatibility)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

vektor napětí

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$$

vektor deformace

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$$

vektor přemístění

$$\{\mathbf{u}\} = \{u, v, w\}^T$$

diferenciální podmínky rovnováhy (3x)

$$[\partial]\{\sigma\} + \{X\} = 0$$

geometrické vztahy (6x)

$$\{\varepsilon\} - [\partial]^T \{u\} = 0$$

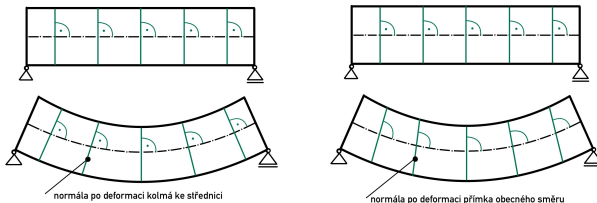
fyzikální vztahy (6x)

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad \text{nebo} \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

Základní rovnice pružnosti v 1D (prut)

Základní předpoklady rovinného prutu

- průřezy zůstanou po deformaci **rovinné** a
 - kolmé na osu prutu → **prut bez vlivu práce posouvajících sil**
 - obecně **libovolně natočené** vzhledem k ose prutu → **prut s vlivem práce posouvajících sil**
- normálové napětí ve směru kolmém na osu prutu je **nulové**



Obr. 29: Typy prutů

- z předpokladů plyne
 - lineární průběh deformace ε_x a napětí σ_x po výšce průřezu
 - svislý posun je po výšce konstantní
 - vodorovný posun, resp. normálovou deformaci po výšce lze vyjádřit pomocí veličin na ose prutu (u, φ) resp. ($\varepsilon_N, \varepsilon_M$)

Základní rovnice pružnosti v 1D (prut)

Geometrické rovnice

- tah (deformace v ose prutu)

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{x,(z=0)} = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \varepsilon_N = u'$$

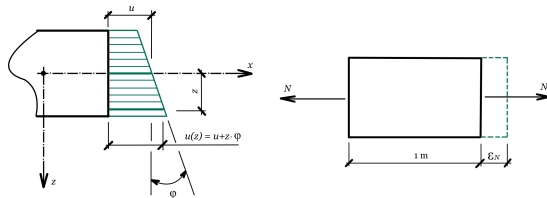
- tah & ohyb

- vodorovný posun, resp. normálovou deformaci po výšce lze vyjádřit pomocí veličin na ose prutu (u, φ) resp. ($\varepsilon_N, \varepsilon_M$)

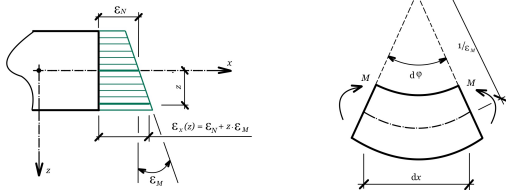
$$u(z) = u + z \cdot \varphi$$

$$\varepsilon_x(z) = \frac{\partial u(z)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} z = \varepsilon_N + \varepsilon_M \cdot z,$$

- kde $\varepsilon_M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \rightarrow \varepsilon_M = \varphi'$



Obr. 30: Tah

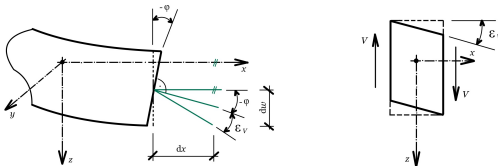


Obr. 31: Tah & ohyb

■ ohyb & smyk

- natočení střednice je způsobeno natočením průřezu φ a zkosením ε_V

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\varphi + \varepsilon_V \rightarrow \varepsilon_V = w' + \varphi$$



Obr. 32: Ohyb & smyk

Základní rovnice pružnosti v 1D (prut)

Diferenciální podmínky rovnováhy (statické rovnice)

- hodnota funkce v posunutém bodě (z Taylorova rozvoje)

$$N^* = N + \frac{\partial N}{\partial x} dx \quad V^* = V + \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad M^* = M + \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

- $\sum F_{x,i} = 0$

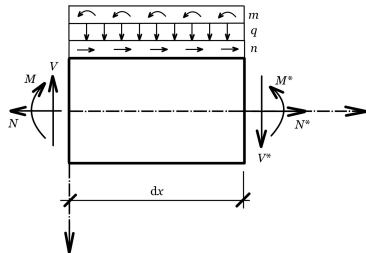
$$-N + N^* + ndx = 0 \rightarrow N' + n = 0$$

- $\sum F_{z,i} = 0$

$$-V + V^* + qdx = 0 \rightarrow V' + q = 0$$

- $\sum M_{y',i} = 0$

$$-M + M^* + m dx - V dx + q dx \frac{dx}{2} = 0 \rightarrow M' - V + m = 0$$



Obr. 33: Diferenciální podmínky rovnováhy

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA = \int_A E \varepsilon_x dA = \int_A E(\varepsilon_N + z \varepsilon_M) dA = \\ &= E \varepsilon_N \int_A dA + E \varepsilon_M \int_A z dA = EA \varepsilon_N + ES \varepsilon_M \end{aligned}$$

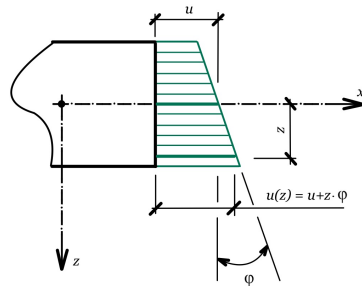
- k těžišťové ose $S = 0$

$$N = EA \varepsilon_N$$

$$\begin{aligned} M &= \int_A z \sigma_x dA = \int_A E z \varepsilon_x dA = \int_A E z(\varepsilon_N + z \varepsilon_M) dA = \\ &= E \varepsilon_N \int_A z dA + E \varepsilon_M \int_A z^2 dA = ES \varepsilon_N + EI \varepsilon_M \end{aligned}$$

- k těžišťové ose $S = 0$

$$M = EI \varepsilon_M$$

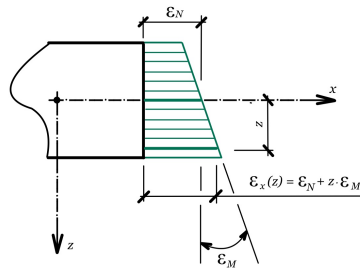


Obr. 34: Tah

$$V = \int_A \tau_{zx} dA = \int_A G \gamma_{xz} dA = G A_\kappa \varepsilon_V$$

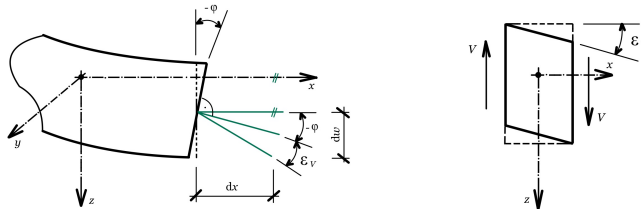
$$V = G A_\kappa \varepsilon_V$$

- A_κ je redukovaná smykový plocha (odvozeno z energetické podmínky)



Obr. 35: Ohyb

■ Prut s vlivem smyku



Obr. 36: Smyk

■ Prut se zanedbáním vlivu smyku

- normála ke střednici zůstává normálou i po deformaci prutu
- předpoklad: $\varepsilon_V = 0$, $A_K = \infty$
- podmínka $V = G A_K \varepsilon_V$ nelze vyjádřit
- podmínky $\varepsilon_M = \varphi'$ a $\varepsilon_V = w' + \varphi$ se upraví na tvar $\varepsilon_M = -w''$

Základní rovnice pružnosti v 1D (prut)

Rekapitulace: prut s vlivem smyku

rekapitulace veličin

- vnitřní síly: N , V , M
- deformace: ε_N , ε_V , ε_M
- přemístění: u , w , φ

rekapitulace vztahů

- statické rovnice

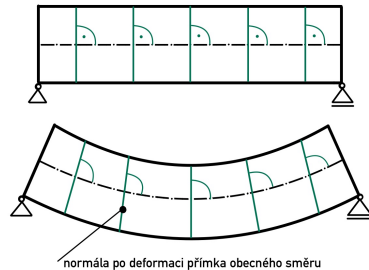
$$N' + n = 0 \quad V' + q = 0 \quad M' - V + m = 0$$

- fyzikální rovnice

$$N = EA\varepsilon_N \quad V = GA_\kappa\varepsilon_V \quad M = EI\varepsilon_M$$

- geometrické rovnice

$$\varepsilon_N = u' \quad \varepsilon_M = \varphi' \quad \varepsilon_V = w' + \varphi$$



Obr. 37: Prut s vlivem smyku

Základní rovnice pružnosti v 1D (prut)

Rekapitulace: prut bez vlivu smyku

rekapitulace veličin

- vnitřní síly: N , V , M
- deformace: ε_N , ε_M
- přemístění: u , w

rekapitulace vztahů

- statické rovnice

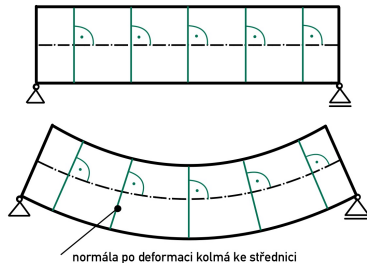
$$N' + n = 0 \quad V' + q = 0 \quad M' - V + m = 0$$

- fyzikální rovnice

$$N = EA\varepsilon_N \quad M = EI\varepsilon_M$$

- geometrické rovnice

$$\varepsilon_N = u' \quad \varepsilon_M = -w''$$



Obr. 38: Prut bez vlivu smyku

Poděkování

Vážím si Vaší pozornosti a děkuji, že jste to vydrželi.

Zdroje

1. SERVÍT, RADIM; DOLEŽALOVÁ, EVA A CRHA, MILOSLAV. **Teorie pružnosti a plasticity I.** Praha: SNTL, 1981.
2. podklady od ING. LUŽKA BRDEČKA, PH.D.