FAKULTA STAVEBNÍ ústav stavební mechaniky

NDA015 Pružnost a plasticita

MKP řešení: osově namáhaný prut č. 1 (v.24/25.1)

Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

MKP řešení v 1D

Aproximace posunutí

Uvažujme aproximaci posunutí na konečném prvku ve tvaru

$$u(x) = a_0 + a_1 x$$

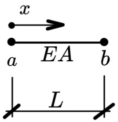
Maticový zápis aproximace

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{M}]\,\{\boldsymbol{\alpha}\}$$

$$\{\mathbf{u}\}\,\Big\{u(x)\Big\}$$

$$[\mathbf{M}]\,\begin{bmatrix}1 & x\end{bmatrix}$$

$$\{\boldsymbol{\alpha}\}\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\end{Bmatrix}$$



Vektor uzlových posunů lze s ohledem na zvolenou aproximaci vyjádřit takto

$$\{\boldsymbol{\Delta}\} = \begin{Bmatrix}u_a\\ u_b\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}[\mathbf{M_a}]\\ [\mathbf{M_b}]\end{bmatrix}\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{S}]\,\{\boldsymbol{\alpha}\}$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & l\end{bmatrix}$$

Vektor přemístění lze potom s pomocí uzlových parametrů vyjádřit ve tvaru[a]

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{M}]\,[\mathbf{S}]^{-1}\,\{\boldsymbol{\Delta}\} = [\mathbf{N}]\,\{\boldsymbol{\Delta}\}$$

[a] $\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\mathbf{S}]^{-1}\,\{\boldsymbol{\Delta}\}$

Matice bázových funkcí má tvar[a]

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l} \end{bmatrix}$$

[a]Výpočet inverze $[\mathbf{S}]^{-1}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 1 & l & | & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

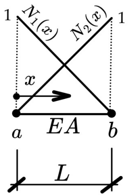
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & l & | & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 0 \\ 0 & l & | & -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{S}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

Grafické znázornění bázových funkcí[a]

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{l}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{l}$$



[a]$N_1(0) = 1$, $N_1(L) = 0$ resp. $N_2(0) = 0$, $N_2(L) = 1$

Osová deformace lze vyjádřit pomocí **geometrického** vztahu

$$\varepsilon_N = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Dosadíme-li posunutí vyjádřené pomocí bázových funkcí a uzlových parametrů získáme vztah

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\boldsymbol{\partial}]\{\mathbf{u}\} = [\boldsymbol{\partial}][\mathbf{N}]\{\boldsymbol{\Delta}\} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\Delta}\}$$

V daném případě má matice derivací bázových funkcí podobu

$$[\mathbf{B}] = \left[\frac{\partial}{\partial x}\right]\begin{bmatrix}1 - \frac{x}{l} & \frac{x}{l}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{l} & \frac{1}{l}\end{bmatrix}$$

Normálová síla lze vyjádřit pomocí **fyzikálního** vztahu

$$N = EA\varepsilon_N$$

Napětí můžeme s využitím bázových funkcí zapsat takto

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\Delta}\}$$

kde matice tuhosti má tvar (obsahuje pouze jeden člen: osovou tuhost)

$$[\mathbf{D}] = [EA]$$

Potenciální energie vnitřních sil vyjádřená v napětích a deformacích má tvar

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_l \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\sigma}\}\mathrm{d}x$$

Dosadíme-li z fyzikálních vztahům tak získáme potenciální energii vnitřních sil ve tvaru

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\Delta}\}^{\mathrm{T}}\int_l [\mathbf{B}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{D}][\mathbf{B}]\,\mathrm{d}x\{\boldsymbol{\Delta}\} = \frac{1}{2}\{\boldsymbol{\Delta}\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\Delta}\}$$

Matici tuhosti $[\mathbf{K}]$ lze odvodit takto

$$[\mathbf{K}] = \int_l [\mathbf{B}]^{\mathrm{T}}[\mathbf{D}][\mathbf{B}]\,\mathrm{d}x = \int_l \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} \\ \frac{1}{l} \end{bmatrix}[EA]\begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}\mathrm{d}x = EA\int_l \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & -\frac{1}{l^2} \\ -\frac{1}{l^2} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix}\mathrm{d}x = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Potenciální energie vnějších sil vyjádřená pomocí uzlových parametrů deformace má tvar

$$\Pi_e = -\{\boldsymbol{\Delta}\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{F}\}$$

kde $\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix}$

Celková potenciální energie je minimální

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_e = \min$$

Variací potenciální energie získáme předpis

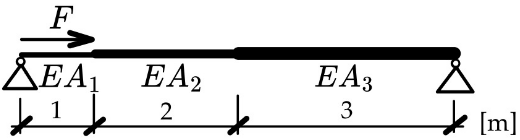
$$\delta\Pi = \frac{\partial}{\partial \Delta_i}\left(\frac{1}{2}\{\boldsymbol{\Delta}\}^{\mathrm{T}}[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\Delta}\} - \{\boldsymbol{\Delta}\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{F}\}\right) = 0$$

Derivováním výše uvedeného výrazu a úpravou získáme soustavu algebraických rovnic ve tvaru

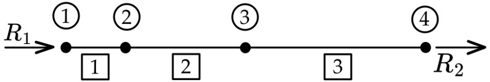
$$[\mathbf{K}]\{\boldsymbol{\Delta}\} = \{\mathbf{F}\}$$

Pomocí MKP vyřešte příklad osově namáhaného prutu dle obrázku. Působící síla má velikost $F = 100$ kN a tuhosti jsou následující:

- $EA_1 = 1,0 \cdot 10^8$
- $EA_2 = 1,5 \cdot 10^8$
- $EA_3 = 2,0 \cdot 10^8$



Rozdělení na prvky lze provést například dle níže uvedeného obrázku



Předpis matice tuhosti prvku je následující

$$[\mathbf{K_{ab}}] = \frac{EA_{ab}}{L_{ab}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Takže pro jednotlivé prvky můžeme psát

$$[\mathbf{K_{12}}] = 100 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; [\mathbf{K_{23}}] = 75 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \; [\mathbf{K_{34}}] = 66,67 \cdot 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sčítáním přes všechny prvky získáme matici soustavy ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 100+75 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 75+66,67 & -66,67 \\ 0 & 0 & -66,67 & 66,67 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 100 \cdot 10^3 \\ 0 \\ R_4 \end{Bmatrix}$$

Kterou lze vzhledem k $u_1 = u_4 = 0$ redukovat do podoby

$$\begin{bmatrix} 175 & -75 \\ -75 & 141,67 \end{bmatrix} \cdot 10^6 \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 100 \cdot 10^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Řešením této soustavy jsou parametry deformace

$$u_2 = 739 \cdot 10^{-6}$$

$$u_3 = 391 \cdot 10^{-6}$$

A příslušné reakce vyplývající z 1. a 4. řádku neredukované soustavy mají velikost

$$R_1 = -100 \cdot 10^6 \cdot u_2 = -73,9 \text{ kN}$$

$$R_4 = -66,67 \cdot 10^6 \cdot u_3 = -26,1 \text{ kN}$$

①

$$\{\boldsymbol{\varepsilon_1}\} = [\mathbf{B_1}]\,\{\boldsymbol{\Delta_1}\} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{1} & \frac{1}{1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\739\end{Bmatrix}10^{-6} = 739\cdot 10^{-6}$$

$$\{\mathbf{u_1}\} = [\mathbf{N_1}]\,\{\boldsymbol{\Delta_1}\} = \begin{bmatrix}1-\frac{x}{1} & \frac{x}{1}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\739\end{Bmatrix}10^{-6} = 739\cdot 10^{-6}x$$

$$\{\boldsymbol{\sigma_1}\} = [\mathbf{D_1}]\,\{\boldsymbol{\varepsilon_1}\} = N_1 = EA_1\varepsilon_1 = 1\cdot 10^{8}\cdot 739\cdot 10^{-6} = 73,9 \text{ kN}$$

②

$$\{\boldsymbol{\varepsilon_2}\} = [\mathbf{B_2}]\,\{\boldsymbol{\Delta_2}\} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}739\\391\end{Bmatrix}10^{-6} = -174\cdot 10^{-6}$$

$$\{\mathbf{u_2}\} = [\mathbf{N_2}]\,\{\boldsymbol{\Delta_2}\} = \begin{bmatrix}1-\frac{x}{2} & \frac{x}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}739\\391\end{Bmatrix}10^{-6} = (739-369,5x+195,5x)10^{-6} = (739-174x)10^{-6}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma_2}\} = [\mathbf{D_2}]\,\{\boldsymbol{\varepsilon_2}\} = N_2 = EA_2\varepsilon_2 = 1,5\cdot 10^{8}\cdot(-174\cdot 10^{-6}) = -26,1 \text{ kN}$$

③

$$\{\boldsymbol{\varepsilon_3}\} = [\mathbf{B_3}]\{\boldsymbol{\Delta_3}\} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}391\\0\end{Bmatrix}10^{-6} = -130,33 \cdot 10^{-6}$$

$$\{\mathbf{u_3}\} = [\mathbf{N_3}]\{\boldsymbol{\Delta_3}\} = \begin{bmatrix}1-\frac{x}{3} & \frac{x}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}391\\0\end{Bmatrix}10^{-6} = (391 - 130,33x)10^{-6}x$$

$$\{\boldsymbol{\sigma_3}\} = [\mathbf{D_3}]\{\boldsymbol{\varepsilon_3}\} = N_3 = EA_3\varepsilon_3 = 2 \cdot 10^8 \cdot (-130,33 \cdot 10^{-6}) = -26,1 \text{ kN}$$