FAKULTA STAVEBNÍ
ústav stavební mechaniky

BDA002 Pružnost a pevnost

přednáška 6 (v.24/25.1)

Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

Obsah

1. Stabilita a vzpěrná pevnost prutů
   - Eulerovo řešení stability přímého pružného prutu
2. Úvod do rovinné a prostorové napjatosti
   - Hlavní napětí
   - Mohrova kružnice

- u **štíhlých** tlačených prutů dochází při selhání k vybočení z původního přímého tvaru
- tento způsob namáhání ozn.: **vzpěrný tlak**[1]
- u reálných prutů je vzpěrný tlak složitý jev ovlivněný řadou faktorů (materiál, geometrie, počáteční napjatost, silové zatížení)

→ vzpěr **ideálně pružného přímého prutu** dokonale centricky zatížený → **ztráta stability** nastává při dosažení **kritické síly**

Stabilita tuhých těles

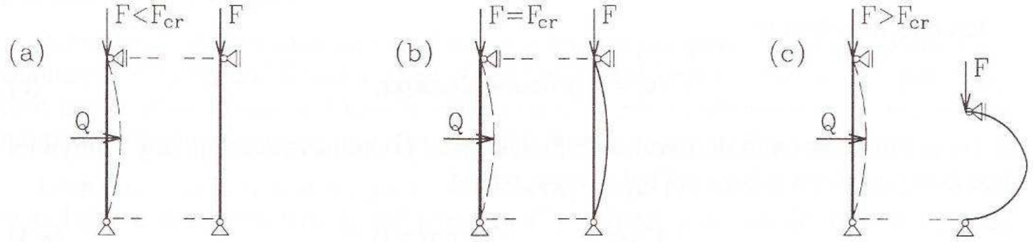
Stabilita je schopnost soustavy vychýlené nepatrně z počátečního tvaru vracet se do původního stavu, jakmile pomine příčiny vychýlení (Šmiřák, 2006).

[1] U masivních průřezů jsme uvažovali prostý tlak

(a) stabilní – po skončení impulsu se prut napřímí

(b) nestabilní – po skončení impulsu nadále rostou deformace

Rozhraní, kdy se prut po skončení impulsu ohne, ale průhyby dále nerostou odpovídá **kritická síla** F_{cr}



Obr. 1: Stabilní, indiferentní a nestabilní stav tlačeného ideálního prutu

Prut oboustranně kloubově podepřený

- vychází se diferenciální rovnice ohybové čáry
- využívá se **teorie II. řádu** (uvažuje se moment od tlakové síly F na rameni vzniklé deformací prutu w)
- deformace uvažujeme ale jako malé: $1/r = -w''$

$$M = M(x) = Fw$$

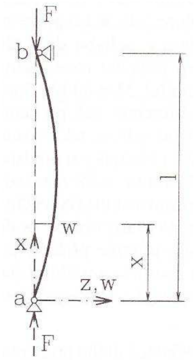
$$w'' = -\frac{M}{EI} = -\frac{F}{EI}w, \text{ když } \alpha^2 = \frac{F}{EI}$$

$$w'' + \alpha^2 w = 0$$

- obecné řešení uvedení dif. rovnice

$$w = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x$$

- okrajové podmínky se určí z podepření $w(x=0)=0$ a $w(x=l)=0$



Obr. 2: Oboustranně kloubově uložený prut

- **Prut oboustranně kloubově podepřený**
  - okrajové podmínky se určí z podepření $w(x=0)=0$ a $w(x=l)=0$

$$C_2 = 0 \qquad C_1 \sin \alpha l = 0$$

  - pro nenulové průhyby musí platit

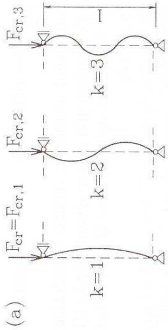
$$\sin \alpha l = 0$$

  - což platí pro

$$\alpha l = k\pi$$

$$w = 0 + C_1 \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \rightarrow \quad F_{cr,k} = k^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

  - Eulerova kritická síla $(k=1)$

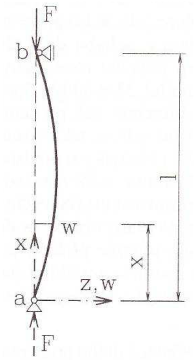


Obr. 3: Oboustranně kloubově uložený prut

Prut oboustranně kloubově podepřený

- $EI =$ konst.

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

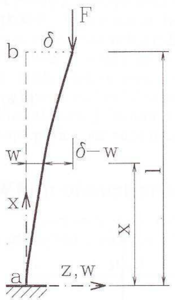


Obr. 4: Oboustranně kloubově uložený prut

Konzolový prut

- $EI =$ konst.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2}$$

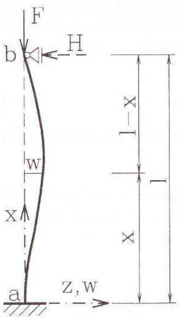


Obr. 5: Konzolový prut

Prut jednostranně vetknutý

- $EI = \text{konst.}$

$$F_{cr} = 20,19\frac{EI}{l^2}$$

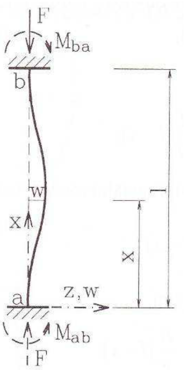


Obr. 6: Prut jednostranně vetknutý

Oboustranně vetknutý prut

- $EI = \text{konst.}$

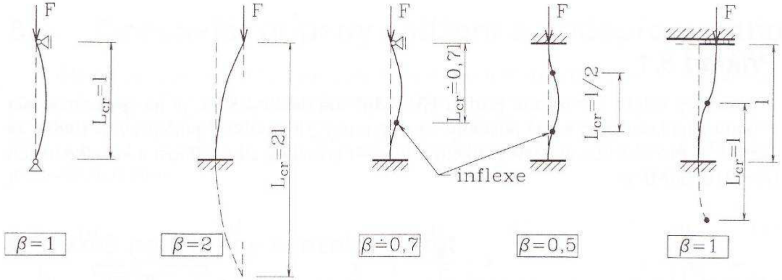
$$F_{cr} = 4\pi^2 \frac{EI}{l^2}$$



Obr. 7: Oboustranně vetknutý prut

- kritická síla lze vyjádřit také s pomocí tzv. **vzpěrné délky** (převod různých typů podepření na základní případ oboustranně kloubově uloženého prutu)

$$F_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{L_{cr}^2}, \text{ kde } L_{cr} = \beta l$$



Obr. 8: Vzpěrné délky

- vzpěrná pevnost, kritické napětí

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \pi^2 \frac{EI}{AL_{cr}^2} = \pi^2 E \frac{i^2}{L_{cr}^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

kde

$$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$$

je tzv. **štíhlost**[2]

[2] i je poloměr setrvačnosti k některé z centrálních os setrvačnosti i_y nebo i_z. Vyšetřujeme-li ztrátu stability v rovině xz, uplatní se i_y a naopak (poloměr setrvačnosti se vždy vztahuje k ose, jež je při vybočení ohybem rovnoběžná s neutrální osou a je tedy k rovině vybočení kolmá (Šmiřák, 200))

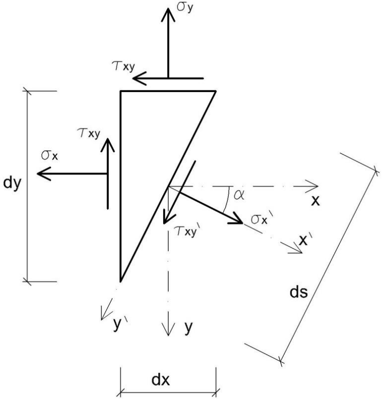
- napjatost v bodě tělesa může být **přímková, rovinná** nebo **prostorová**
- u rovinné napjatosti se výsledný vektor napětí pohybuje v určité společné rovně
- otáčením souřadného systému se mění hodnoty vektoru napětí

$$\sigma_x^* = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\sigma_y^* = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha$$

$$\tau_{xy}^* = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_y \sin 2\alpha + \tau_{xy}\cos 2\alpha$$

- Tyto vztahy je možné odvodit z rovnováhy na seříznutém elementu



Obr. 9: Seříznutý element

- pro určitý úhel pootočení se získá stav následující napjatosti, kdy **normálová napětí dosahují extrémních hodnot** ze všech možných směrů
- úhel pootočení souřadného systému, lze získat z podmínky extrému

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \alpha_0} = 0$$

- provedením derivace a porovnáním se vzorcem pro transformovaná smyková napětí

$$\frac{\partial \sigma_x^*}{\partial \alpha_0} = -\sigma_x \sin 2\alpha + \sigma_y \sin 2\alpha + 2\tau_{xy} \cos 2\alpha = 2\tau_{xy}^* = 0$$

- se zjistí, že **smykové napětí je nulové** pro tento souřadný systém (hlavní osy)

$$\tau_{xy}^* = 0$$

- pro úhel pootočení hlavních os platí

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- Dosazením úhlu pootočení hlavních os do transformačních vztahů pro normálová napětí se získají hlavní napětí σ_1, σ_2

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

- obvykle je σ_1 označováno algebraicky větší z obou hlavních napětí (uvažuje se $(+)$ ve vzorci)

$$\sigma_1 = \max \qquad \sigma_2 = \min$$

- hlavní osy jsou na sebe kolmé, algebraicky větší napětí svírá menší úhel s prvním hlavním napětím

- normálová napětí pro tři navzájem kolmé směry nabývají hodnot

$$\sigma_1 = \max \qquad \sigma_2 = 0 \qquad \sigma_3 = \min$$

- smyková napětí jsou nulová
- hlavní napětí σ jsou řešením kubické rovnice

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix}$$

- neboli jsou hlavní napětí σ vlastní čísla matice

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

- v rovině zx (získáme záměnou indexů: $x \to z$,

$$\sigma_z^* = \sigma_z \cos^2\alpha + \sigma_x \sin^2\alpha + \tau_{zx} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_x^* = \sigma_z \sin^2\alpha + \sigma_x \cos^2\alpha - \tau_{zx} \sin 2\alpha$$

$$\tau_{zx}^* = -\frac{1}{2}\sigma_z \sin 2\alpha + \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\alpha + \tau_{zx} \cos 2\alpha$$

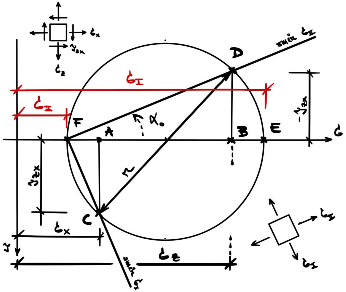
- hlavní napětí v rovině

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 4\tau_{zx}^2}$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\tau_{zx}}{\sigma_z - \sigma_x}$$

v rovině zx

1. vodorovná osa (doprava) σ
2. svislá osa (dolů) τ
3. vynese se σ_x: získá se bod A
4. vynese se σ_z: získá se bod B
5. rozpůlí se vzdálenost AB: získá se bod S
6. v bodě A se vynese τ_{zx}: získá se bod C
7. v bodě B se vynese τ_{zx} získá se bod D
8. sestrojí se kružnice se středem S a poloměrem SC
9. průsečík kružnice s vodorovnou osou: vlevo bod F (udává σ_2), vpravo bod E (udává σ_1)
10. přímka FC udává směr prvního hlavního napětí
11. přímka FD udává směr druhého hlavního napětí



Obr. 10: Mohrova kružnice

Použitá literatura

ŠMIŘÁK, Svatopluk. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-720-4468-0.