FAKULTA STAVEBNÍ ústav stavební mechaniky

BDA002 Pružnost a pevnost

přednáška 5 (v.24/25.1)

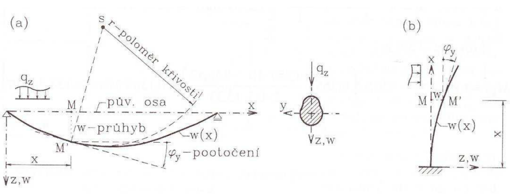
Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

Obsah

- deformační stav *dostatečně štíhlého* nosníku je dán **tvarem ohybové čáry**
- **ohybovou čarou** je křivka v níž se vlivem zatížení změní původní osa nosníku
- ohybovou čáru značíme (viz obr. 1) $w(x)$ a její pořadnice ozn. jako průhyb $(w(\downarrow) > 0$ a $w(\uparrow) < 0)$
- pootočení (viz obr. 1) $\varphi = \varphi_y$ je úhel, který svírá tečna k ohybové čáře $(\varphi(\circlearrowright) > 0$ a $\varphi(\circlearrowleft) < 0)$



Obr. 1: Ohybová čára nosníku

[1] Ve svislé rovině xz

- vzhledem k teorii malých deformací $\varphi << 1$ a k tomu, že u stavebních konstrukcí je ohybová čára plochá ($\varphi < 0,02$) platí

$$\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = w'$$

- dále platí výraz $\frac{1}{r} = -\frac{w''}{(1+w'^2)^{\frac{3}{2}}}$, kde lze zanedbat malý kvadratický člen w'^2 a s ohledem na předpoklad malých deformací lze psát

$$\frac{1}{r} = -w''$$

- při zanedbání vlivu smyku na průhyb lze získat vztah

$$w'' = -\frac{M_y}{EI_y}$$

- z rovnice ohybové čáry lze derivovat všechny ostatní veličiny, tzn. že **je zcela definován stav prutu** (deformačně i silově)

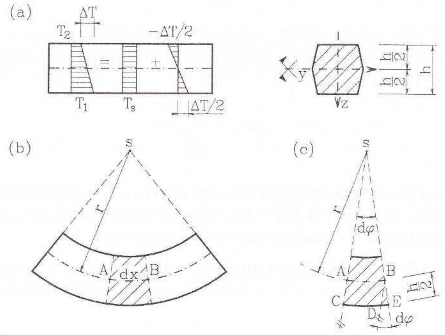
[1] Ve svislé rovině xz

- pro symetrický průřez s lineárním průběhem teploty platí

$$w'' = -\frac{1}{r} = -\frac{\alpha_T \Delta T}{h},$$

kde $\Delta T = T_1 - T_2{}^b$ a α_T je součinitel délkové teplotní roztažnosti

$^b T_1$ na spodním okraji, T_2 na horním okraji



Obr. 2: Ohybová čára nosníku - teplota

[1] Ve svislé rovině xz

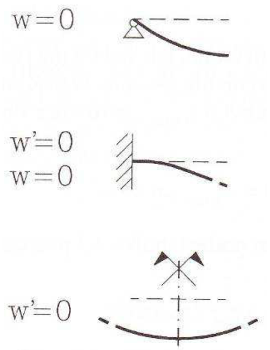
- u staticky určitých nosníků lze určit průběh ohybových momentů a proto můžeme průhyb určit integrací (při $EI = \mathrm{konst.}$)

$$EIw'' = -M$$

$$EIw' = -\int M\mathrm{d}x + C_1$$

$$EIw = -\int \left[\int M\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x + C_1x + C_2,$$

kde integrační konstanty lze určit z kinematických okrajových podmínek (viz obr. 3)



Obr. 3: Kinematické okrajové podmínky

- u složitějšího zatížení či podepření nelze průběh momentů vyjádřit jedinou spojitou funkcí a je třeba jej rozdělit na intervaly
- **Clebschova metoda** upravuje integrační postup tak, že vyžaduje určení je 2 integračních konstant[3]

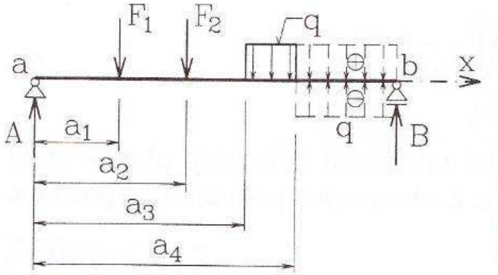
Zásady Clebschovy metody

1. při sestavování rovnice $M(x)$ se v určitém intervalu převezme beze změny výraz z předchozího intervalu a doplní se o účinek dalšího zatížení
2. při integrování se neodstraňují závorky u členů $(x - a_j)$ a nakládá se s nimi jako s proměnnými

Díky pravidlu (2) se obdrží výrazy, které plní podmínky spojitosti a stačí dořešit jen 2 integrační konstanty

[3] V případě obecného rozdělení funkce na n intervalů je potřeba určit kromě 2 podmínek v podepření také $2(n-1)$ podmínek spojitosti

$$M = Ax - \Big|_{x>a_1} F_1(x-a_1) - \Big|_{x>a_2} F_2(x-a_2) - \Big|_{x>a_3} \frac{1}{2}q(x-a_3)^2 + \Big|_{x>a_4} \frac{1}{2}q(x-a_4)^2$$



Obr. 4: Ke Clebschově metodě

- vychází z matematické analogie

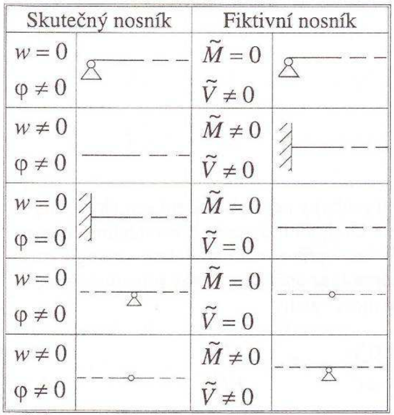
$$\frac{\mathrm{d}^2 M}{\mathrm{d}x^2} = M'' = -q, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = w'' = -\frac{M}{EI}$$

- určení průhybů $w(x)$ z $M(x)$ je matematicky analogické k určení $M(x)$ z $q(x)$
- zavede-li se **fiktivní** zatížení $\tilde{q} = \frac{M}{EI}$, ke kterému se určí příslušné ohybové momenty $\tilde{M}$ pak zřejmě platí

$$\frac{\mathrm{d}^2 \tilde{M}}{\mathrm{d}x^2} = -\tilde{q} = -\frac{M}{EI} = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}$$

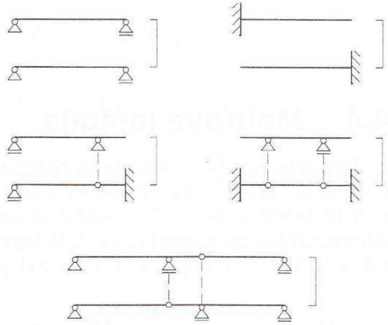
- definuje-li se **fiktivní** nosník ke skutečnému nosníku jako nosník podepřený takovým způsobem, že splňuje vůči $\tilde{M}$ a $\tilde{V}$ tytéž okrajové podmínky (popř. podm. spojitosti), jaké plní skutečný nosník vůči w a φ, pak platí

$$w = \tilde{M}, \qquad \varphi = w' = \tilde{V}$$



Skutečný nosník	Fiktivní nosník
$w = 0$, $\varphi \neq 0$	$\tilde{M} = 0$, $\tilde{V} \neq 0$
$w \neq 0$, $\varphi \neq 0$	$\tilde{M} \neq 0$, $\tilde{V} \neq 0$
$w = 0$, $\varphi = 0$	$\tilde{M} = 0$, $\tilde{V} = 0$
$w = 0$, $\varphi \neq 0$	$\tilde{M} = 0$, $\tilde{V} = 0$
$w \neq 0$, $\varphi \neq 0$	$\tilde{M} \neq 0$, $\tilde{V} \neq 0$

Obr. 5: Vazby fiktivního nosníku



Obr. 6: Skutečné a fiktivní nosníky

- při číselném řešení je výhodné upravit vztahy následovně

$$\overline{q} = M\frac{I_0}{I} \quad w = \frac{\overline{M}}{EI_0} \quad \varphi = \frac{\overline{V}}{EI_0}$$

Postup Mohrovy metody

1. vyřešení M na skutečném nosníku
2. sestrojení **fiktivního nosníku** a zatížení momentovou plochou (kladné momenty zavádíme jako kladné zatížení $\overline{q}(\downarrow)$)
3. výpočet ohybových momentů $\overline{M}$[4] resp. posouvajících sil $\overline{V}$ v místě hledaného w resp. φ

[4] Jsou-li M v $[\mathrm{kNm}]$, pak také $\overline{q}$ jsou v $[\mathrm{kNm}]$, $\overline{V}$ v $[\mathrm{kNm}^2]$ a $\overline{M}$ v $[\mathrm{kNm}^3]$ a výsledné deformace mají po dělení jednotky jednotky m resp. rad

Použitá literatura

ŠMIŘÁK, SVATOPLUK. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-720-4468-0.