FAKULTA STAVEBNÍ ústav stavební mechaniky

# BDA002 Pružnost a pevnost

## přednáška 2 (v.24/25.1)

Kombinované studium

*Vyučující:* Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

# Obsah

1. Ohyb
   - Rovinný a prostý ohyb
   - Prostorový (šikmý) ohyb
   - Mimostředný tah a tlak

- V ohýbaných konstrukcích jsou obecně přítomny všechny složky vnitřních sil

$$\{N_x; V_y; V_z; M_x; M_y; M_z\} \neq 0$$

- původně přímá osa prutu se po deformaci stává rovinnou či prostorou křivkou
- z hlediska analýzy napětí při ohybu budeme rozlišovat
  - rovinný ohyb
  - prostý ohyb
  - šikmý ohyb
  - mimostředný tah a tlak

- rovinný ohyb např. v rovině $xz$

$$N = V_y = 0, \quad M_x = M_z = 0$$

$$V_z \neq 0, \quad M_y \neq 0$$

- pro odvození vztahů normálového napětí se předpokládá $V_z = 0 \rightarrow$
- prostý ohyb[1]

$$N = V_y = V_z = 0, \quad M_x = M_z = 0$$

$$M_y \neq 0$$

[1] prostý ohyb je vyvolán dvojicí koncových momentů (např. dvojice sil na opačných koncích nosníku)

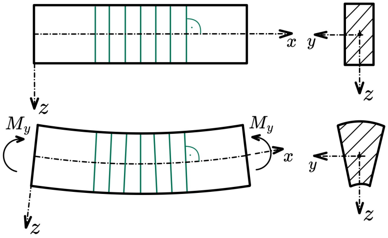
- pro odvození vztahů se vychází ze dvou základních předpokladů
  - tzv. *Bernoulliova hypotéza*: průřezy jsou rovinné a kolmé ke střednici **před** i **po** deformaci

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

  - podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

- první z uvedených předpokladů nám umožní odvodit vztah pro $\varepsilon_x$




**Obr. 1:** Předpoklady

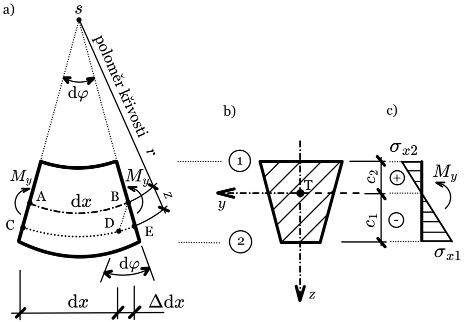
- vlivem ohybu se průřezy elementárního úseku délky $dx$ vzájemně pootočí o $d\varphi$
- dojde ke zkrácení resp. prodloužení vláken na horním resp. dolním líci
- vlákna, která nemění délku leží v tzv. neutrální vrstvě (netruální osa průřezu).

$$dx = \overline{AB} = r d\varphi, \quad dx' = \overline{CD} = (r+z)d\varphi$$

$$\Delta dx = dx' - dx = z d\varphi$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{z d\varphi}{r d\varphi} = \frac{z}{r}$$

- uvažuje-li se lineárně pružný materiál




**Obr. 2:** Deformace a napětí při ohybu

## Napětí

- uvažuje-li se lineárně pružný materiál

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E}{r} z$$

- ze statických podmínek rovnováhy vnitřních sil v průřezu vyplývá

$$M_y = \int_A \sigma_x z \mathrm{d}A = \frac{E}{r} \int_A z^2 \mathrm{d}A = \frac{E}{r} I_y$$

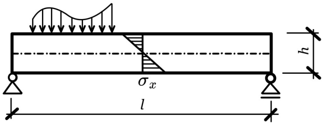
- z výše uvedených rovnic vyplývá vztah

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z$$

- napětí $\sigma_x$ je po výšce lineární
- extrémy napětí vznikají na okrajích
- spojnice bodů s nulovou hodnotou napětí je tzv. **neutrální osa** (n.o.)
- uvedený vztah pro $\sigma_x$ platí přesně pro $V_z = 0$
- při $V_z \neq 0$ a $l > 5h$ platí dostatečně přesně[a]
- v rovině $xy$ platí analogicky

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

[a]Poznámka: v příčném směru se vlivem podélného protažení/zkrácení vláken se deformuje příčný řez, ale to lze zanedbat




**Obr. 3:** Deformace a napětí při ohybu

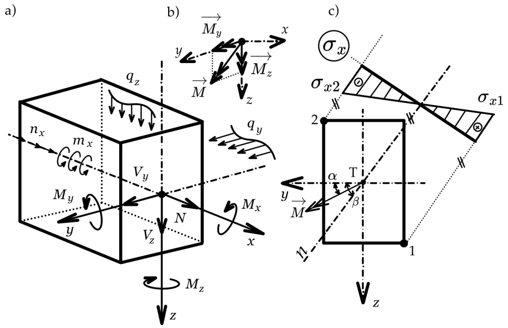
- zatížení prochází těžištěm, **ale není v jedné z hlavních rovin** $xz$ nebo $xy$
- provádíme rozklad obecného $M$ na složky $M_y$ a $M_z$

## Šikmý ohyb

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

- neutrální osa $\sigma_x = 0$ prochází těžištěm, ale je **nakloněná**

$$\tan\beta = \frac{z}{y} = \frac{M_z}{M_y} \cdot \frac{I_y}{I_z} = \tan\alpha \frac{I_y}{I_z}$$

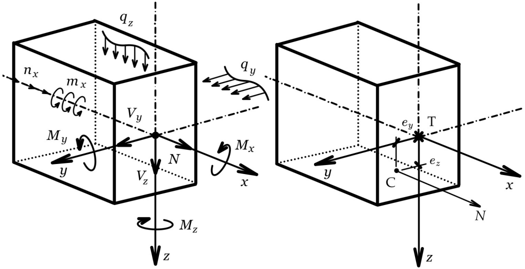



**Obr. 4:** Šikmý ohyb

- obecně jsou nenulové složky

$$N_x \neq 0 \quad M \neq 0$$

- 3 případy:
  - $N_x, M_y \neq 0$
  - $N_x, M_z \neq 0$
  - $N_x, M_y, M_z \neq 0$
- 3 případy namáhání průřezu:
  - celý tlačen
  - celý tažen
  - část tlačena a část tažena




**Obr. 5:** Mimostředný tah a tlak

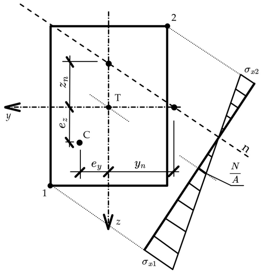
*Pozn.:* $z_C = e_z$ *a* $y_C = e_y$

## Osové zatížení + ohyb v jedné rovině

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z, \quad z_n = \frac{-i_y^2}{z_C}, \text{ kde } i_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

nebo

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y, \quad y_n = \frac{-i_z^2}{y_C}, \text{ kde } i_z^2 = \frac{I_z}{A}$$




**Obr. 6:** Neutrální osa

## Obecně

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y, \quad N_x = F, \; M_y = F \cdot z_C, \; M_z = -F \cdot y_C$$

$y_n, z_n$ viz. výše. Neutrální osa leží v protilehlém kvadrantu než síla $F$

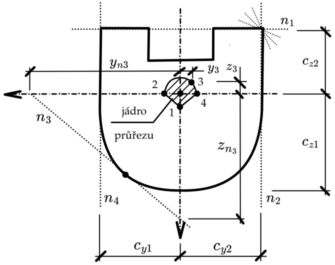
## Jádro průřezu

Oblast v okolí těžiště průřezu, ve kterém musí působit zatížení, aby byl průřez celý tlačený.

Jádrovou čáru získáme tak, že pokládáme okolo průřezu n.o. na krajní linie a počítáme polohu $z_c$ resp. $y_c$

$$y_c = -\frac{i_z^2}{y_n}$$

$$z_c = -\frac{i_y^2}{z_n}$$




**Obr. 7:** Jádro průřezu

ŠMIŘÁK, SVATOPLUK. *Pružnost a plasticita I: pro distanční studium.* Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-720-4468-0.