



FAKULTA
STAVEBNÍ ústav
stavební mechaniky

BDA002 Pružnost a pevnost
přednáška 1 (v.24/25.1)
Kombinované studium

Vyučující: Ing. FILIP HOKEŠ, Ph.D.

Brno, zimní semestr 2024/2025

1. Předmět zkoumání
2. Výchozí předpoklady a základní vztahy
3. Tah & tlak

- pružnost a pevnost je součástí mechaniky **kontinua**¹ (v pevné fázi) **deformovatelných** těles.
- předmětem zkoumání jsou:
 - napětí
 - deformace (přetvoření)
 - stabilita

¹*Kontinuum je spojité prostředí, které lze popsat spojitými funkcemi*

Výchozí předpoklady lineární teorie pružnosti

- **Spojitost látky**
 - těleso jako kontinuum je vyplněno látkou bez mezer (nezohledňuje se mikrostruktura)
- **Lineární pružnost**
 - tzv. *fyzikální linearita*: těleso se po deformaci vrací do původního stavu
- **Homogenita* a izotropie****
 - * vlastnosti jsou ve všech bodech tělesa stejné; ** vlastnosti jsou nezávislé na směru
- **Malé deformace**
 - tzv. *geometrická linearita*: deformace konstrukcí jsou vzhledem rozměrům malé
- **Statické zatěžování**
 - zatížení na konstrukci narůstá dostatečně povlovně (nevznikají setrvačné síly)
- **Počáteční nenapjatost**

→ uvedené předpoklady umožňují využít principu superpozice účinků

Napětí

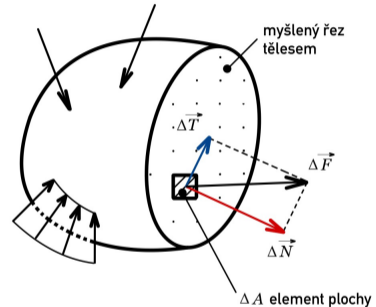
- normálové napětí

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{N}}{\Delta A}$$

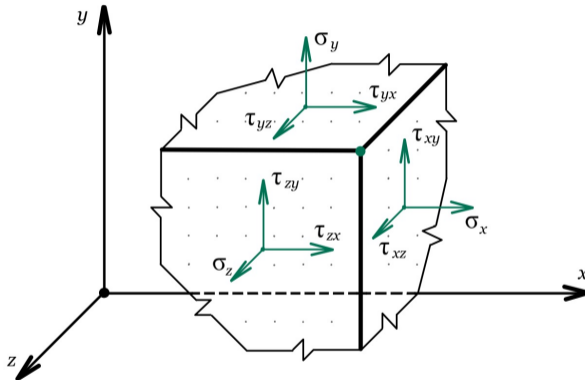
- smykové (tečné, tangenciální) napětí

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta A}$$

Jednotka napětí je $[\text{N}/\text{m}^2]$ resp. $[\text{Pa}]$



Obr. 1: Napětí



Obr. 2: Označování složek napětí

- Z momentové podmínky k ose \bar{z} vyplývá

$$\sum M_{i,\bar{z}} = 0$$

$$\tau_{xy} dy dz \cdot dx - \tau_{yx} dx dz \cdot dy = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

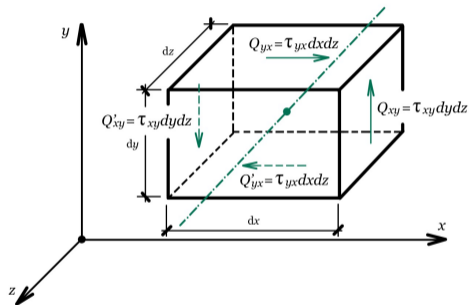
- pro ostatní smyková napětí platí analogicky

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

- napjatost v bodě tělesa lze tedy popsat 6 nezávislými složkami napětí:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$



Obr. 3: Věta o vzájemnosti smykových napětí

Vztahy mezi vnitřními silami a napětími

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

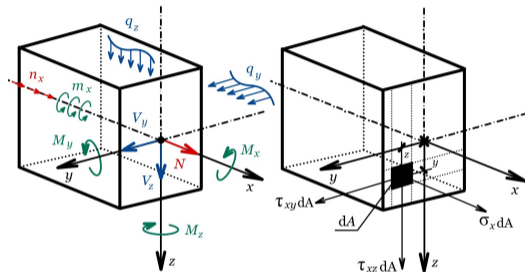
$$V_y = \int_A \tau_{xy} dA$$

$$V_z = \int_A \tau_{xz} dA$$

$$M_x = \int_A (\tau_{xz}y - \tau_{xy}z) dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA$$



Obr. 4: Napětí a vnitřní síly

Poměrné délkové a úhlové deformace

- Poměrná prodloužení (zkrácení) např.:

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\Delta dx}{dx}$$

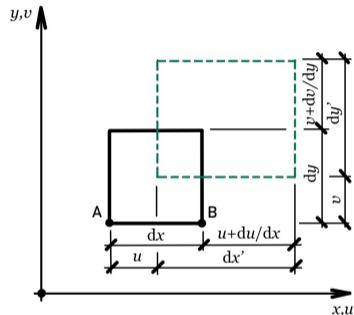
$$\varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{\Delta dy}{dy}$$

- poměrné zkosení např.:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

- stav deformace v bodě tělesa lze tedy popsat 6 nezávislými složkami deformace:

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$



Obr. 5: Poměrné deformace

Poměrné délkové a úhlové deformace

- Poměrná prodloužení (zkrácení) např.:

$$\varepsilon_x = \frac{dx' - dx}{dx} = \frac{\Delta dx}{dx}$$

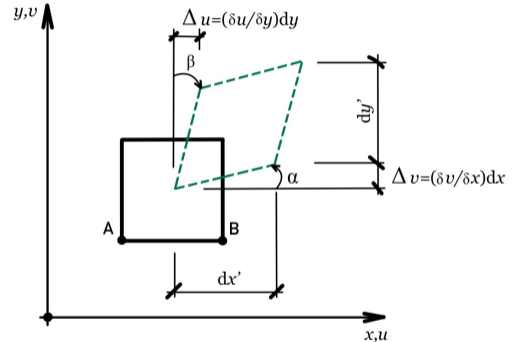
$$\varepsilon_y = \frac{dy' - dy}{dy} = \frac{\Delta dy}{dy}$$

- poměrné zkosení např.:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

- stav deformace v bodě tělesa lze tedy popsat 6 nezávislými složkami deformace:

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$$



Obr. 6: Poměrné deformace

- Hookův zákon v tahu a tlaku

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

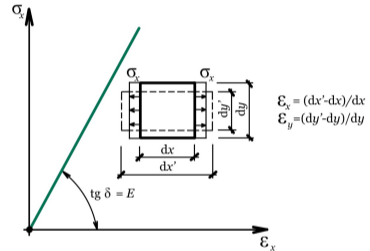
- kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonův součinitel (0;0,5)

- Hookův zákon ve smyku

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

- kde G je modul pružnosti ve smyku: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Obr. 7: Hookův zákon v tahu a tlaku

- Hookův zákon v tahu a tlaku

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

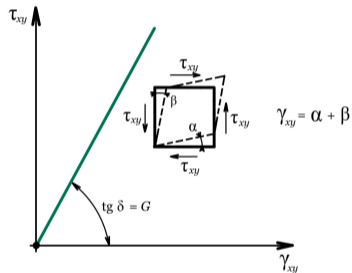
- kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonův součinitel (0;0,5)

- Hookův zákon ve smyku

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

- kde G je modul pružnosti ve smyku: $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



Obr. 8: Hookův zákon ve smyku

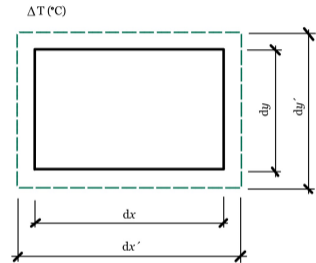
Výchozí předpoklady a základní vztahy

Deformace od změny teploty

$$\varepsilon_{x,T} = \varepsilon_{y,T} = \varepsilon_{z,T} = \alpha \Delta T$$

$$\gamma_{xy,T} = \gamma_{yz,T} = \gamma_{zx,T} = 0$$

- kde α je součinitel tepelné roztažnosti [K^{-1}], resp. [$^{\circ}C^{-1}$]
- není-li deformaci bráněno, nevzniká v tělese napětí



Obr. 9: Deformace od změny teploty

- jediná nenulová vnitřní síla je **normálová síla**

$$N \neq 0, \quad V_y = V_z = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0$$

- $N > 0$... tah
- $N < 0$... tlak

- předpoklady:

- tzv. *Bernoulliova hypotéza*: průřezy jsou rovinné a kolmé ke střednici **před** i **po** deformaci

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$$

- podélná vlákna na sebe vzájemně netlačí

$$\sigma_y = \sigma_z = 0$$

Napětí (po výšce průřezu rovnoměrné)

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$N = \sigma_x A$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$

- Předpoklady:
 - neexistují poruchy napjatosti
 - vlastní tíha je samostatný zatěžovací stav
 - prut je přímý a $F \ll F_{crit}$ (nedochází ke ztrátě stability)

Deformace (po výšce průřezu rovnoměrné) pro lin. pružný materiál

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

- poměrné přetvoření je způsobeno i teplotním namáháním

$$\varepsilon_t = \alpha\Delta t, \text{ kde } \Delta t = t_0 - t_1$$

- teplota u stat. určité konstrukce způsobuje deformaci a u staticky neurčité napjatost

Posuny

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x$$

$$u = \int \varepsilon_x dx + C$$

konst. C se určí z podepření. Je-li začátek $a = 0$ prutu délky $L = b - a$, $E, A, N = \text{konst.}$ pak

$$u_b = \int_a^b \varepsilon_x dx = \frac{N}{EA} dx = \frac{NL}{EA}$$

$$\Delta L = \frac{NL}{EA} \quad (EA \text{ ozn. osovou tuhost})$$

- dále platí: $u_b = \sum_{i=1}^n \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$; $\Delta L_t = \alpha \Delta t L$; v příčném směru: $\Delta h = h \varepsilon_z = -h \nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \frac{Nh}{EA}$

ŠMIŘÁK, SVATOPLUK. **Pružnost a plasticita I: pro distanční studium.** Vyd. 3. Učební texty vysokých škol (Vysoké učení technické v Brně). Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2006. ISBN 80-7204-468-0.