Průhyb nosníku – Mohrova metoda

Při integraci ohybové čáry řešíme 4 diferenciální rovnice.

Statické podmínky:

$$V'(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = V(x)$$

Geometrické podmínky:

$$\varphi'(x) = \frac{-M(x)}{EI}$$

$$w'(x) = \varphi(x)$$

Po zavedení substituce:

$$\bar{q}(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\bar{V}(x) = \varphi(x)$$

$$\bar{M}(x) = w(x)$$

Můžeme geometrické podmínky zapsat ve tvaru

$$\bar{V}'(x) = -\bar{q}(x)$$

$$\bar{M}'(x) = \bar{V}(x)$$

Tyto podmínky jsou obdobné podmínkám statickým. Je možné je řešit stejným způsobem, jakým postupujeme při řešení průběhů vnitřních sil – tedy počítat hodnoty vnitřních sil z podmínek rovnováhy na vyjmuté části nosníku.

Problémem jsou pouze okrajové podmínky na tomto fiktivním nosníku zatíženým $\bar{q}(x)$. Pokud chceme pracovat s pootočením jako s posouvající silou a s průhybem jako s momentem, musíme na fiktivním nosníku zajistit, aby podepření vyjadřovalo takové okrajové podmínky pro posouvající síly a momenty, jaké jsou platné na skutečném nosníku pro pootočení a průhyb. Níže uvedená tabulka znázorňuje, jak je třeba upravit okrajové podmínky na fiktivním nosníku, aby toto bylo zajištěno.

Pokud je tuhost nosníku konstantní, můžeme ještě provést následující úpravu:

$$\bar{q}(x) = M(x)$$

$$\frac{\bar{V}(x)}{EI} = \varphi(x)$$

$$\frac{\bar{M}(x)}{EI} = w(x)$$

V tomto případě mají veličiny jiný fyzikální význam a jiné jednotky.

Diferenciální geometrické podmínky zůstanou nezměněny:

$$\bar{V}'(x) = -\bar{q}(x)$$

$$\bar{M}'(x) = \bar{V}(x)$$

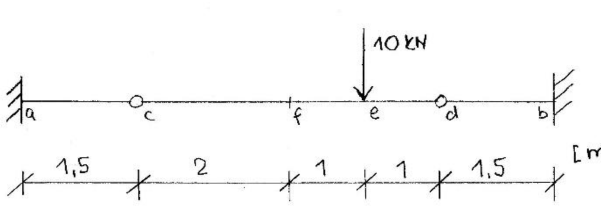
Přemístění skutečného nosníku	Vnitřní síly fiktivního nosníku
$\varphi = 0$ $w = 0$	$\overline{V} = 0$ $\overline{M} = 0$
$\varphi \neq 0$ $w = 0$	$\overline{V} \neq 0$ $\overline{M} = 0$
$\varphi \neq 0$ $w \neq 0$	$\overline{V} \neq 0$ $\overline{M} \neq 0$
$\varphi_L = \varphi_P$ $w = 0$	$\overline{V}_L = V_P$ $\overline{M} = 0$
$\varphi_L \neq \varphi_P$ $w_L = w_P$	$\overline{V}_L \neq V_P$ $\overline{M}_L = M_P$

Okrajové podmínky na skutečném a fiktivním nosníku.

Příklad

Zadání:

Gerberův nosník dle obrázku je zatížen silou 10kN. Tuhost nosníku EI je konstantní po celé délce. Mohrovou metodou určete pootočení a průhyb nosníku v bodě f.



Řešení:

a) Stanovení reakcí, průběhu posouvajících sil a ohybových momentů

Provedeme obvyklým způsobem s využitím podmínek rovnováhy na oddělené části konstrukce a diferenciálních podmínek rovnováhy. Postupujeme od nesené prostřední části směrem k nesoucím krajním částem.

$$R_c = \frac{10 \cdot 1}{4} = 2{,}5kN$$

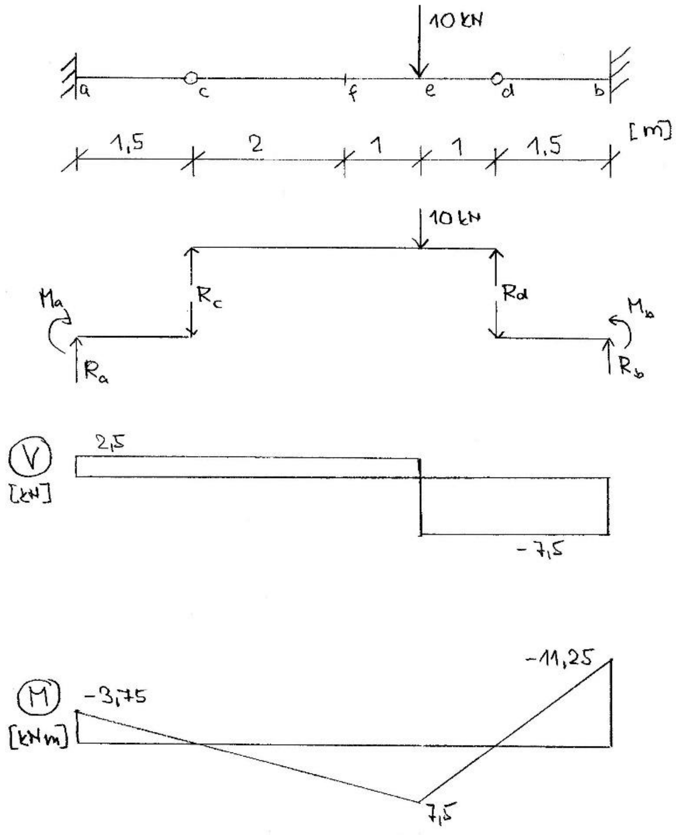
$$R_d = \frac{10 \cdot 3}{4} = 7{,}5kN$$

$$R_a = R_c = 2{,}5kN$$

$$M_a = -1{,}5R_c = -3{,}75kN$$

$R_b = R_d = 7{,}5kN$

$M_b = -1{,}5R_d = -11{,}25kN$



b) Vytvoření fiktivního nosníku

V bodě a je vetknutí. Pootočení a průhyb jsou na skutečném nosníku nulové – na fiktivním chceme zajistit to samé pro posouvající sílu a ohybový moment – to je splněno na volném konci – na fiktivním nosníku se tedy použije volný konec. Bod b řešíme stejně jako a.

V bodě c je na skutečném nosníku kloub. Pro něj platí, že pootočení zleva se nerovná pootočení zprava – na fiktivním nosníku chceme, aby toto platilo pro posouvající sílu. Pro průhyb naopak platí, že je stejný zleva i zprava – na fiktivním nosníku chceme zajistit stejný ohybový moment zleva i zprava. Těmto dvěma podmínkám odpovídá na fiktivním nosníku kloubová podpora. Stejným způsobem řešíme bod d.

Zatížení fiktivního nosníku vytvoříme podle vztahu

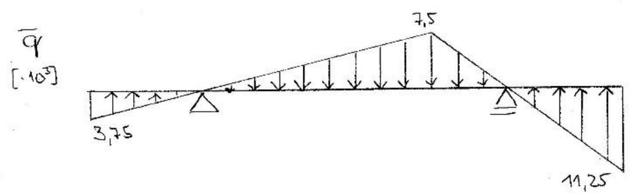
$\bar{q}(x) = M(x)$

Pro pootočení a průhyb nosníku pak bude platit:

$$\varphi(x) = \frac{\bar{V}(x)}{EI}$$

$$w(x) = \frac{\bar{M}(x)}{EI}$$

Použijeme tedy momentový obrazec. Protože kladné hodnoty zatížení kreslíme nad osou shora dolů, zatímco kladné momenty vykreslujeme pod osou, momentový obrazec ještě překlopíme. Záporné hodnoty zatížení vyjádříme šipkami směřujícími nahoru. Dále je třeba vést v patrnosti násobitel 10^3, který odpovídá převodu momentů na základní jednotky.



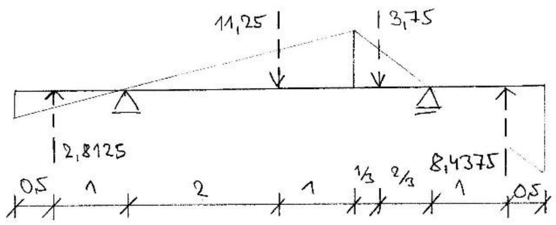
c) Výpočet pootočení a průhybu

Vzhledem k uvažované substituci bude pro pootočení a průhyb nosníku platit:

$$\varphi(x) = \frac{\bar{V}(x)}{EI}$$

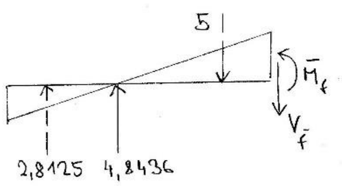
$$w(x) = \frac{\bar{M}(x)}{EI}$$

Zajímají nás pouze konkrétní hodnoty pootočení a průhybu ve vybraném bodě. Není tedy nutné vykreslovat průběhy fiktivní posouvající síly a ohybového momentu, stačí napočítat jejich hodnotu v daném bodě. K tomu potřebujeme znát alespoň jednu z reakcí. Spočítáme tu v bodě c pomocí momentové podmínky rovnováhy k bodu d.



$$\overline{R_c} = 10^3 \cdot \left(\frac{-2{,}8125 \cdot 5 + 11{,}25 \cdot 2 + 3{,}75 \cdot 0{,}667 + 8{,}4375 \cdot 1}{4}\right) = 4{,}8436 \cdot 10^3$$

Fiktivní posouvající sílu a ohybový moment určíme z podmínek rovnováhy na vyjmuté části nosníku. Pro momentovou podmínku uvažujeme bod otáčení f.



$$\overline{V_f} = 10^3 \cdot (2{,}8125 + 4{,}8436 - 5) = 2{,}6561 \cdot 10^3$$

$$\overline{M_f} = 10^3 \cdot (2{,}8125 \cdot 3 + 4{,}8436 \cdot 2 - 5 \cdot 0{,}667) = 14{,}7897 \cdot 10^3$$

Pootočení a průhyb získáme podělením tuhostí EI.

$$\varphi_f(x) = \frac{\bar{V}_f(x)}{EI} = \frac{2{,}6561 \cdot 10^3}{EI}$$

$$w_f(x) = \frac{\bar{M}_f(x)}{EI} = \frac{14{,}7897 \cdot 10^3}{EI}$$