

Obr.: Schéma průřezu

Střed smyku

Zadání

Určete polohu středu smyku průřezu na obrázku.

Postup:

1) Určí se průběh smykových napětí po střednici tenkostěnného průřezu podle

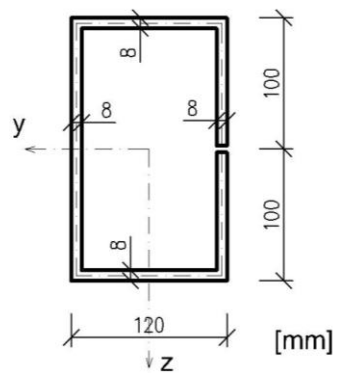
$$\tau = \frac{V \bar{S}_y}{I_y t}$$

2) Integrací napětí po ploše se určí smykové síly v jednotlivých částech průřezu podle

$$Q_i = \int_{A_i} \tau dA$$

3) Z momentové podmínky ekvivalence se vypočte poloha středu smyku pro průřez

$$\sum M_{0,i} = M_V$$



Obr.: Schéma průřezu

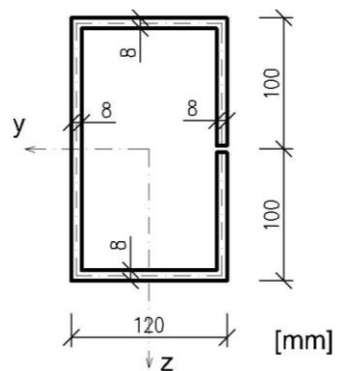
Řešení

1) Průběh smykových napětí

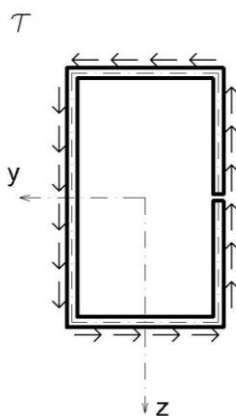
Nakreslete směr toku smykového napětí pro posouvající sílu působící shora dolů.

Určete moment setrvačnosti průřezu:

$$I = (?) \text{ [m}^4\text{]}$$



Obr.: Schéma průřezu



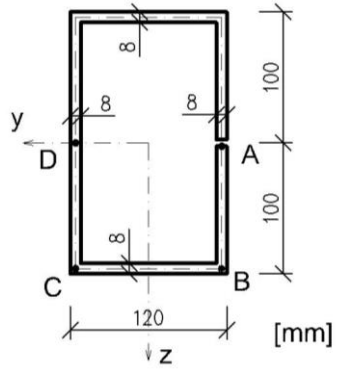
Obr.: směr smykového toku

1) Průběh smykových napětí

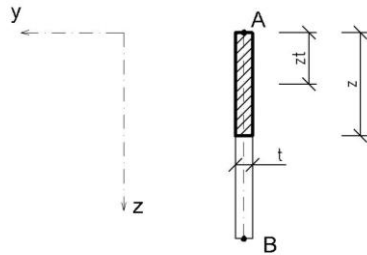
Vzhledem k tomu, že z hlediska hmoty průřezu (tedy pokud neuvažujeme rozříznutí průřezu) je průřez symetrický, těžiště leží na osách symetrie.

Moment setrvačnosti průřezu lze získat jako rozdíl momentů setrvačnosti vnějšího a vnitřního obdélníku:

$$I = \frac{1}{12} (0,12 \cdot 0,2^3 - 0,104 \cdot 0,184^3) = 26,011 \cdot 10^{-6} m^2$$



Obr.: Schéma průřezu



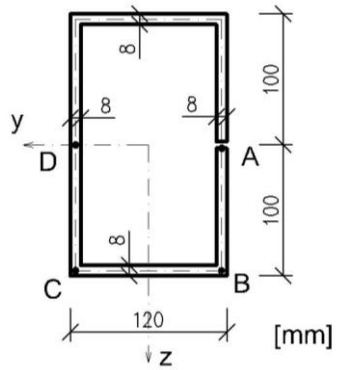
Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

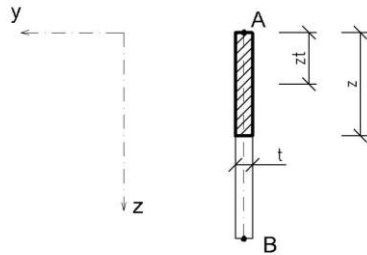
Úsek A-B

Určete funkci statického momentu odříznuté plochy mezi body A a B jako funkci měnící se souřadnice z:

$$\bar{S}_y = (?) + (?) z + (?) z^2 [\text{m}^3]$$



Obr.: Schéma průřezu



Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

Úsek A-B

Poloha těžiště odříznuté části:

$$z_t = \frac{z}{2} = 0,5z$$

Plocha odříznuté části:

$$A = zt = 0,008z$$

Statický moment odříznuté části:

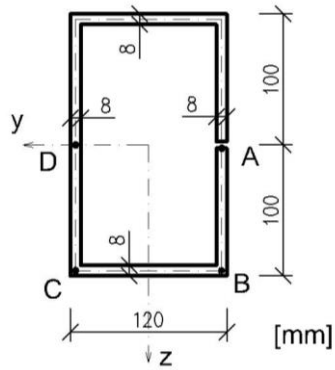
$$\bar{S}_y = Az_t = \frac{z^2t}{2} = 0,004z^2$$

Určete hodnotu statického momentu odříznuté plochy pro bod B:

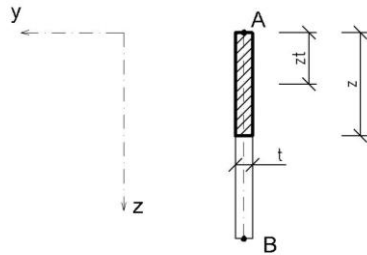
$$\bar{S}_{y,B} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$

Určete smykové napětí v bodě B:

$$\tau_B = (?) \text{ V}$$



Obr.: Schéma průřezu



Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

Úsek A-B

Poloha těžiště odříznuté části:

$$z_t = \frac{z}{2} = 0,5z$$

Plocha odříznuté části:

$$A = zt = 0,008z$$

Statický moment odříznuté části:

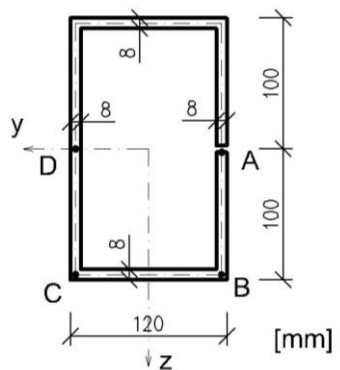
$$\bar{S}_y = Az_t = \frac{z^2 t}{2} = 0,004z^2$$

Statický moment odříznuté plochy pro bod B:

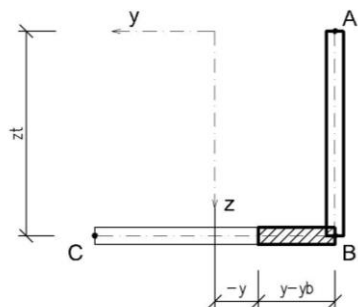
$$\bar{S}_{y,B} = \bar{S}_{y(z=0,096)} = 0,004 \cdot 0,096^2 = 36,864 \cdot 10^{-6} m^3$$

Určete smykové napětí v bodě B:

$$\tau_B = \frac{V \bar{S}_y}{I_y t} = \frac{V \cdot 36,864 \cdot 10^{-6}}{26,011 \cdot 10^{-6} \cdot 0,008} = 177,16V$$



Obr.: Schéma průřezu



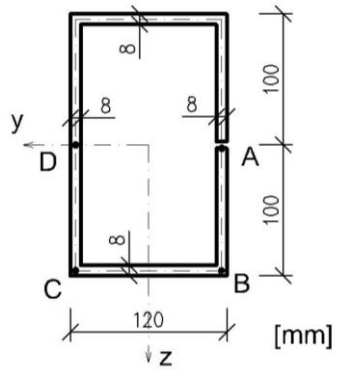
Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

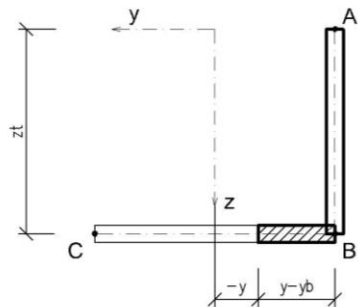
Úsek B-C

Určete funkci statického momentu odříznuté plochy mezi body B a C jako funkci měnící se souřadnice y:

$$\bar{S}_y = (?) + (?) y + (?) y^2 [\text{m}^3]$$



Obr.: Schéma průřezu



Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

Úsek B-C

Poloha těžiště odříznuté části:

$$z_t = 0,096$$

Plocha odříznuté části:

$$A = (y - y_B)t = (y + 0,056) \cdot 0,008$$

Statický moment odříznuté části:

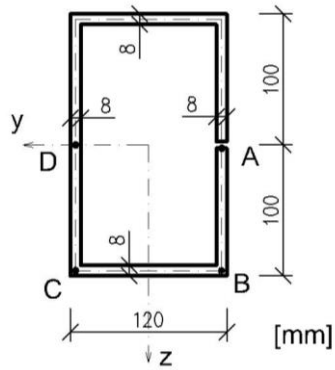
$$\bar{S}_y = \bar{S}_{y,B} + Az_t = 36,864 \cdot 10^{-6} + (y + 0,056) \cdot 0,008 \cdot 0,096 = (768y + 79,87) \cdot 10^{-6}$$

Určete hodnotu statického momentu odříznuté plochy pro bod C:

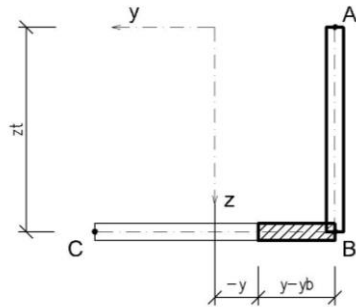
$$\bar{S}_{y,C} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$

Určete smykové napětí v bodě C:

$$\tau_C = (?) \text{ V}$$



Obr.: Schéma průřezu



Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

Úsek B-C

Poloha těžiště odříznuté části:

$$z_t = 0,096$$

Plocha odříznuté části:

$$A = (y - y_B) t = (y + 0,056) \cdot 0,008$$

Statický moment odříznuté části:

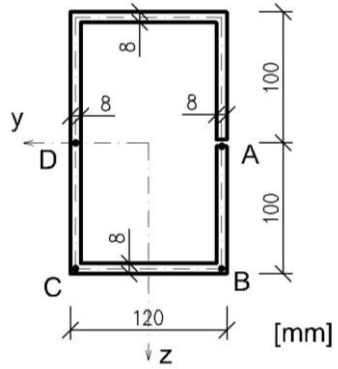
$$\begin{aligned} \bar{S}_y &= \bar{S}_{y,B} + Az_t = 36,864 \cdot 10^{-6} + (y + 0,056) \cdot 0,008 \cdot 0,096 \\ &= (768y + 79,87) \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

Statický moment odříznuté plochy pro bod B:

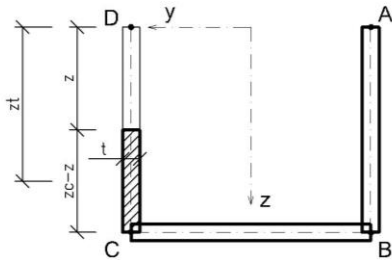
$$\bar{S}_{y,C} = \bar{S}_{y(y=0,056)} = (768 \cdot 0,056 + 79,87) \cdot 10^{-6} = 122,88 \cdot 10^{-6} m^3$$

Určete smykové napětí v bodě B:

$$\tau_C = \frac{V \bar{S}_y}{I_y t} = \frac{V \cdot 122,88 \cdot 10^{-6}}{26,011 \cdot 10^{-6} \cdot 0,008} = 590,52 V$$



Obr.: Schéma průřezu



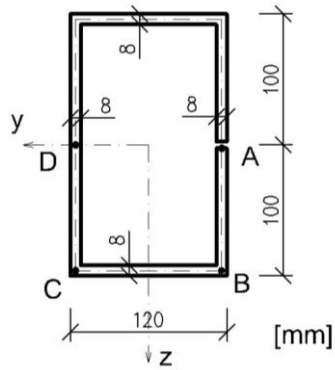
Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

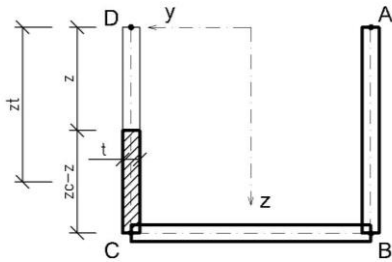
Úsek C-D

Určete funkci statického momentu odříznuté plochy mezi body A a B jako funkci měnící se souřadnice z:

$$\bar{S}_y = (?) + (?) z + (?) z^2 [\text{m}^3]$$



Obr.: Schéma průřezu



Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

Úsek C-D

Poloha těžiště odříznuté části:

$$z_t = \frac{z + z_C}{2} = \frac{z + 0,096}{2}$$

Plocha odříznuté části:

$$A = (z_C - z)t = (0,096 - z)t$$

Statický moment odříznuté části:

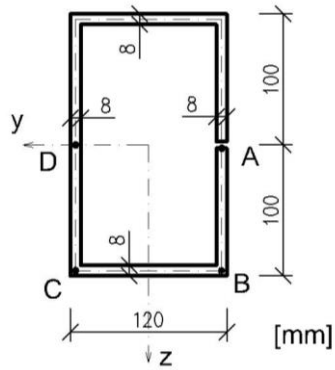
$$\begin{aligned} \bar{S}_y &= \bar{S}_{y,C} + Az_t = \bar{S}_{y,C} + \frac{(z_C - z)(z_C + z)t}{2} = S_{y,C} + \frac{(z_C - z)^2 t}{2} \\ &= 122,88 \cdot 10^{-6} + \frac{(0,096 - z)^2 0,008}{2} = 159,744 \cdot 10^{-6} - 0,004 z^2 \end{aligned}$$

Určete hodnotu statického momentu odříznuté plochy pro bod B:

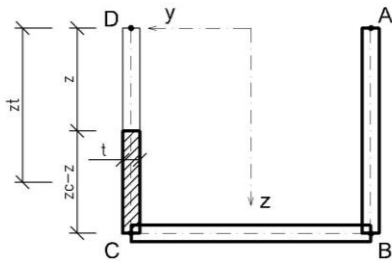
$$\bar{S}_{y,D} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$

Určete smykové napětí v bodě B:

$$\tau_D = (?) V$$



Obr.: Schéma průřezu



Obr.: Schéma části průřezu

1) Průběh smykových napětí

Úsek C-D

Poloha těžiště odříznuté části:

$$z_t = \frac{z + z_C}{2} = \frac{z + 0,096}{2}$$

Plocha odříznuté části:

$$A = (z_C - z)t = (0,096 - z)t$$

Statický moment odříznuté části:

$$\begin{aligned} \bar{S}_y &= \bar{S}_{y,C} + Az_t = \bar{S}_{y,C} + \frac{(z_C - z)(z_C + z)t}{2} = S_{y,C} + \frac{(z_C - z)^2 t}{2} \\ &= 122,88 \cdot 10^{-6} + \frac{(0,096 - z)^2 0,008}{2} = 159,744 \cdot 10^{-6} - 0,004 z^2 \end{aligned}$$

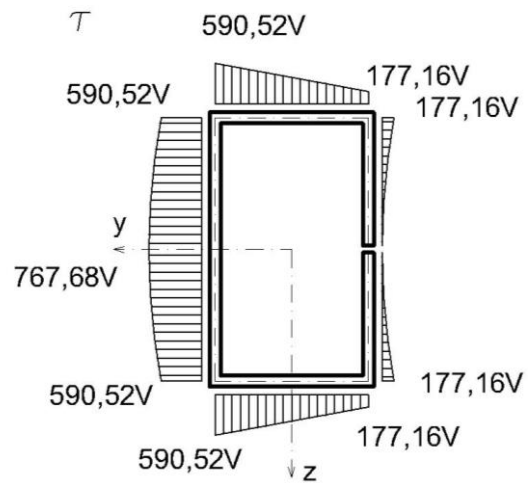
Statický moment odříznuté plochy pro bod B:

$$\bar{S}_{y,D} = \bar{S}_{y(z=0)} = 159,744 \cdot 10^{-6} - 0,004 z^2 = 159,744 \cdot 10^{-6} m^3$$

Určete smykové napětí v bodě B:

$$\tau_D = \frac{V \bar{S}_y}{I_y t} = \frac{V \cdot 159,744 \cdot 10^{-6}}{26,011 \cdot 10^{-6} \cdot 0,008} = 767,68V$$

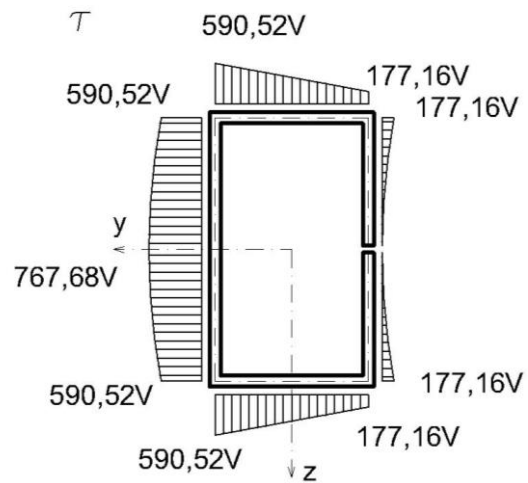
Nakreslete průběh napětí po střednici průřezu.



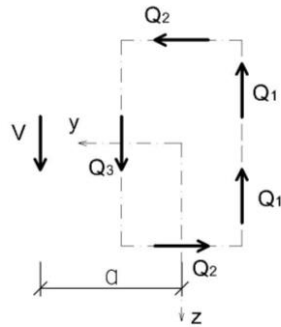
Obr.: Průběh smykových napětí po střednici průřezu

1) Průběh smykových napětí

Statický moment odříznuté plochy na svislých částech je kvadratická funkce, na vodorovných částech lineární. Tomu odpovídají průběhy napětí, neboť další veličiny ve vzorci pro výpočet napětí jsou pro průřez konstantní.



Obr.: Průběh smykových napětí po střednici průřezu



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

2) Výpočet smykových sil

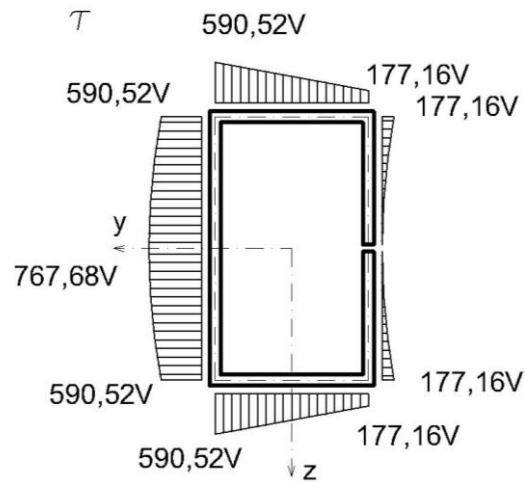
Úsek A-B

Statický moment plochy:

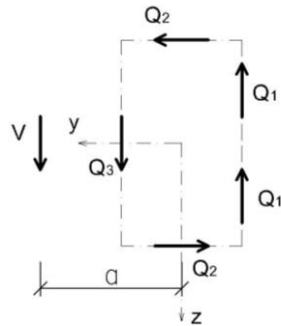
$$\bar{S}_y = \frac{z^2 t}{2} = 0,004 z^2$$

Určete velikost síly Q_1 z napětí v úseku mezi body A-B:

$$Q_1 = (?) \text{ V}$$



Obr.: Průběh smykových napětí po střednici průřezu



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

2) Výpočet smykových sil

Úsek A-B

Statický moment plochy:

$$\bar{S}_y = \frac{z^2 t}{2} = 0,004 z^2$$

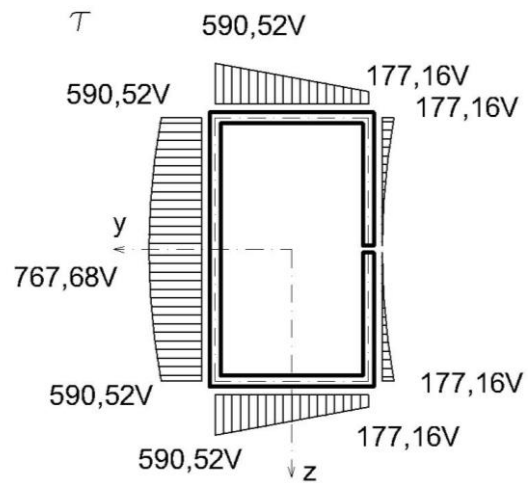
Velikost síly Q_1 z napětí v úseku mezi body A-B:

Výpočet z hodnot napětí v bodech A a B – parabolický průběh s vrcholem paraboly v bodě A.

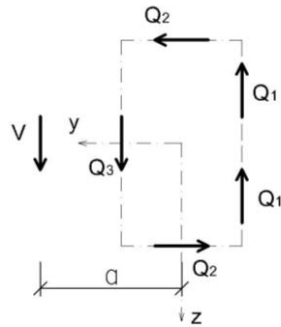
$$Q_1 = \frac{1}{3} \tau_B (z_B - z_A) t = \frac{1}{3} 177,16V (0,096 - 0) 0,008 = 0,04535V$$

Alternativní výpočet integrací napětí po ploše:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_A^B \tau dA = t \int_A^B \tau ds = t \int_A^B \frac{V \bar{S}_y}{I t} dz = \frac{V}{I} \int_A^B \bar{S}_y dz = \frac{V}{I} \int_A^B \frac{z^2 t}{2} dz = \frac{V \cdot t}{I \cdot 6} [z^3]_0^{0,096} \\ &= \frac{V \cdot 0,008}{6 \cdot 26,011 \cdot 10^{-6}} 0,096^3 = 0,04535V \end{aligned}$$



Obr.: Průběh smykových napětí po střednici průřezu



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

2) Výpočet smykových sil

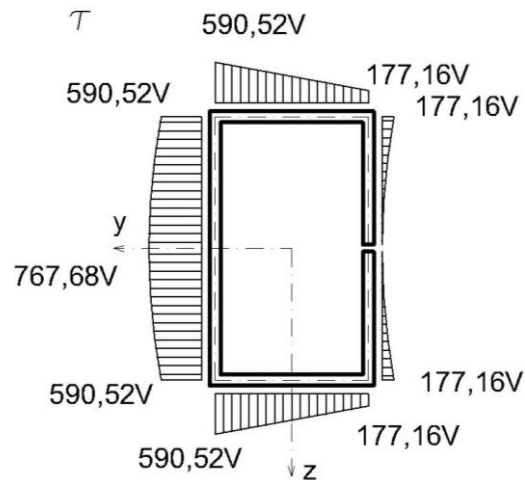
Úsek B-C

Statický moment plochy:

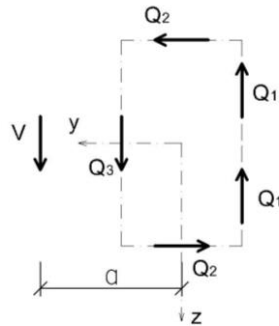
$$\bar{S}_y = (768y + 79,87) \cdot 10^{-6}$$

Určete velikost síly Q_2 z napětí v úseku mezi body A-B:

$$Q_2 = (?) \text{ V}$$



Obr.: Průběh smykových napětí po střednici průřezu



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

2) Výpočet smykových sil

Úsek B-C

Statický moment plochy:

$$\bar{S}_y = (768y + 79,87) \cdot 10^{-6}$$

Velikost síly Q_2 z napětí v úseku mezi body B-C:

Výpočet z hodnot napětí v bodech B a C – lineární průběh.

$$Q_2 = \left(\frac{\tau_B + \tau_C}{2} \right) (y_C - y_B) t$$

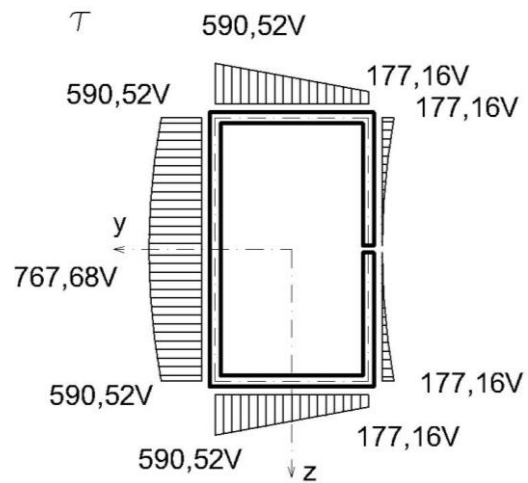
$$= \left(\frac{177,16V + 590,52V}{2} \right) (0,056 + 0,056) 0,008 = 0,3439V$$

Alternativní výpočet integrací napětí po ploše:

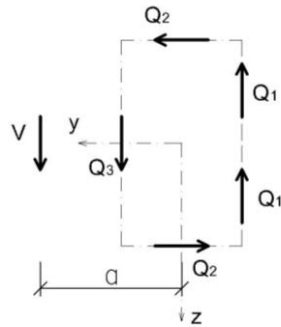
$$Q_2 = \int_A^C \tau dA = t \int_B^C \tau ds = t \int_B^C \frac{V \bar{S}_y}{I t} dy = \frac{V}{I} \int_B^C \bar{S}_y dy$$

$$= \frac{V}{26,011 \cdot 10^{-6}} \int_{-0,056}^{0,056} (768y + 79,87) \cdot 10^{-6} dy$$

$$= \frac{V \cdot 10^{-6}}{26,011 \cdot 10^{-6}} \left[384y^2 + 79,87y \right]_{-0,056}^{0,056} = 0,3439V$$



Obr.: Průběh smykových napětí po střednici průřezu



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

2) Výpočet smykových sil

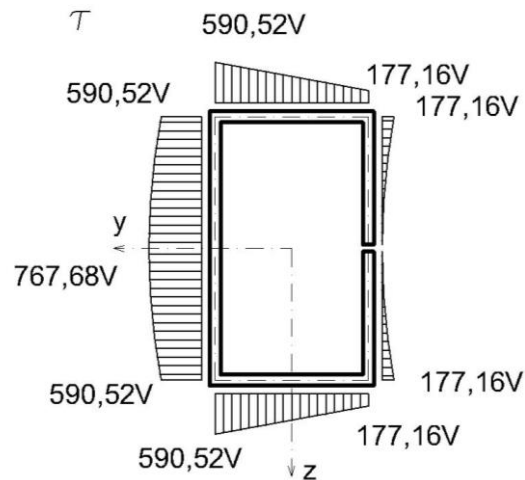
Úsek C-C'

Statický moment plochy:

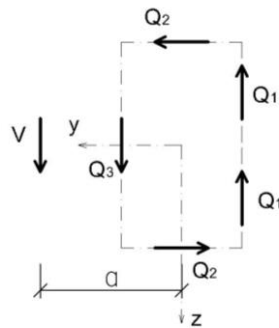
$$\bar{S}_y = 159,744 \cdot 10^{-6} - 0,004 z^2$$

Určete velikost síly Q_3 z napětí v úseku mezi body C-D (uvažuje se dvakrát):

$$Q_3 = (?) V$$



Obr.: Průběh smykových napětí po střednici průřezu



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

2) Výpočet smykových sil

Úsek C-C'

Statický moment plochy:

$$\bar{S}_y = 159,744 \cdot 10^{-6} - 0,004 z^2$$

Určete velikost síly Q_3 z napětí v úseku mezi body C-D (uvažuje se dvakrát):

Výpočet z hodnot napětí v bodech C a D – parabolický průběh s vrcholem paraboly v bodě D.

$$Q_3 = 2 \left(\frac{2}{3} (\tau_D - \tau_C) + \tau_C \right) (z_C - z_D) t$$

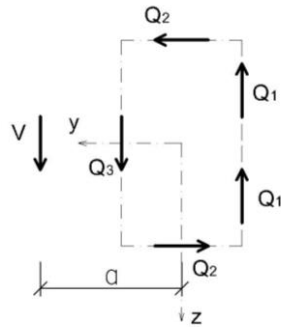
$$= 2 \left(\frac{2}{3} (767,68V - 590,52V) + 590,52V \right) (0,096 - 0) 0,008 = 1,08845V$$

Alternativní výpočet integrací napětí po ploše:

$$Q_3 = 2 \int_A^C \tau dA = 2t \int_D^C \tau ds = 2t \int_D^C \frac{V \bar{S}_y}{It} dz = \frac{2V}{I} \int_D^C \bar{S}_y dz$$

$$= \frac{2V}{26,011 \cdot 10^{-6}} \int_0^{0,096} (159,744 \cdot 10^{-6} - 0,004 z^2) dz$$

$$= \frac{2V}{26,011 \cdot 10^{-6}} \left[159,744 \cdot 10^{-6} z - \frac{0,004}{3} z^3 \right]_0^{0,096} = 1,08845V$$



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

3) Podmínky ekvivalence na průřezu – poloha středu smyku

Smykové síly, jež jsou výslednicí smykového napětí, mají odpovídat účinku posouvající síly.

Silová podmínka ekvivalence je pro kontrolu

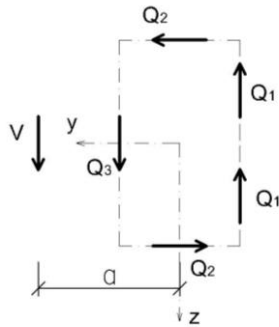
$$\sum F_{z,i} = V$$

$$-2 \cdot Q_1 + Q_3 = -2 \cdot 0,04535V + 1,08845V = 0,99775V \approx V$$

Z momentové podmínky ekvivalence lze určit polohu posouvající síly a tím i středu smyku:

$$\sum M_{0,i} = M_V$$

$$a = (?) \text{ m}$$



Obr.: Smykové síly ve stěnách průřezu

3) Podmínky ekvivalence na průřezu – poloha středu smyku

Smykové síly, jež jsou výslednicí smykového napětí, mají odpovídat účinku posouvající síly.

Silová podmínka ekvivalence je pro kontrolu

$$\sum F_{z,i} = V$$

$$-2 \cdot Q_1 + Q_3 = -2 \cdot 0,04535 V + 1,08845 V = 0,99775 V \approx V$$

Z momentové podmínky ekvivalence lze určit polohu posouvající síly a tím i středu smyku:

$$\sum M_{0,i} = M_V$$

$$V \cdot a = 2 \cdot Q_1 \cdot 0,056 + 2 \cdot Q_2 \cdot 0,096 + Q_3 \cdot 0,056$$

$$a = 2 \cdot 0,04535 \cdot 0,056 + 2 \cdot 0,3439 \cdot 0,096 + 1,0845 \cdot 0,056 = 0,13184 \text{ m}$$

Střed smyku je vzdálen od těžiště průřezu o 131,84 mm.