

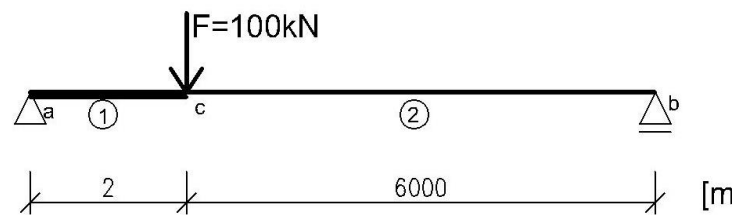
Obr.: Schéma nosníku a zatížení

Průhyb nosníku - složitější případ

Zadání

Nosník s proměnným průřezem je na obrázku. Průřezy 1 a 2 jsou obdélníkové, výška prvního průřezu je 1,3 násobkem výšky druhého průřezu.

- Pomocí metody integrace ohybové čáry určete rovnici průhybu pro obě části nosníku.
- Vyjádřete průhyb pod silou a uprostřed nosníku (v závislosti na tuhosti EI_1 , resp. EI_2)



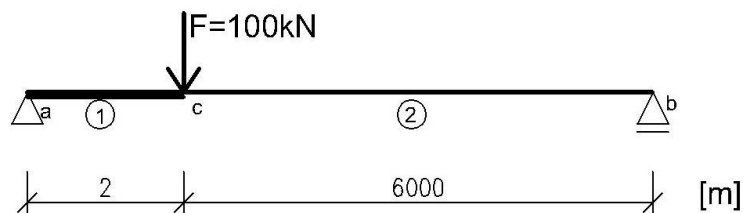
Obr.: Schéma nosníku a zatížení

Řešení

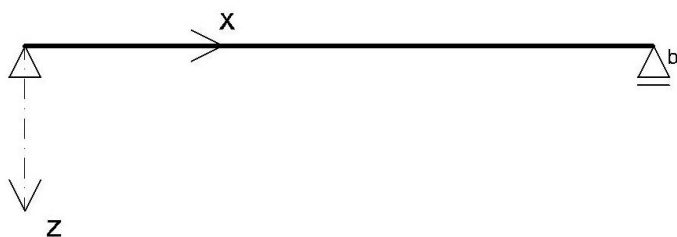
Určete poměr tuhostí v jednotlivých úsecích:

$$h_1 = 1,3h_2$$

$$I_1 = (?) I_2$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Souřadný systém prutu

Poměr tuhostí v úsecích.

$$h_1 = 1,3h_2$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{12 \cdot b \cdot h_1^3}{12 \cdot b \cdot h_2^3} = \frac{h_1^3}{h_2^3} = \frac{(1,3 \cdot h_2)^3}{h_2^3} = 1,3^3 = 2,197$$

$$I_1 = 2,197 I_2$$

Další krok je provedení integrace ohybové čáry v úsecích. Pro vyjádření funkce ohybových momentů v obou úsecích je třeba použít stejný souřadný systém.

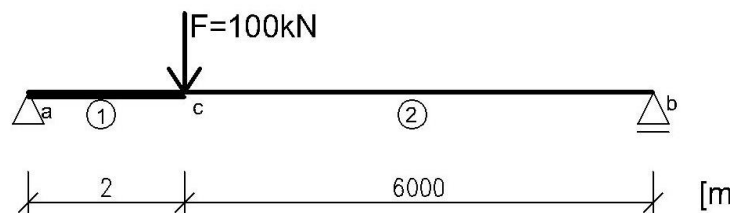
Vyjádřete funkci ohybových momentů pro úseky a-c a c-b

První úsek: $x \in \langle 0, 2 \rangle$

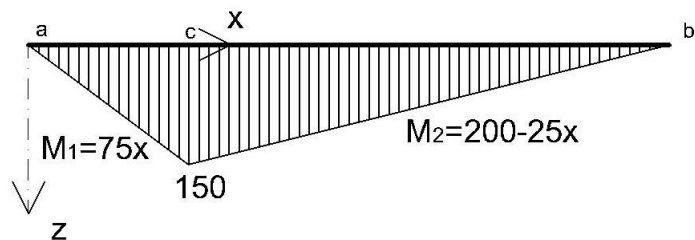
$$M_1 = ((?) + (?) \cdot x) \cdot 10^3$$

Druhý úsek: $x \in \langle 2, 8 \rangle$

$$M_2 = ((?) + (?) \cdot x) \cdot 10^3$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Poměr tuhostí v úsecích

$$I_1 = 2,197 I_2$$

Funkce ohybových momentů:

První úsek: $x \in \langle 0, 2 \rangle$

$$M_1 = 75x \cdot 10^3$$

Druhý úsek: $x \in \langle 2, 8 \rangle$

$$M_2 = (200 - 25x) \cdot 10^3$$

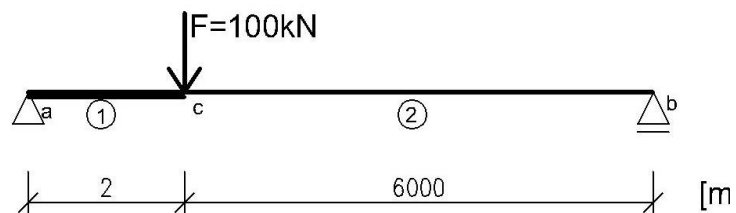
Integrací ohybové čáry $EI_1 \cdot 10^{-3}$ násobky funkce pootočení a průhybu

v prvním úseku: $x \in \langle 0, 2 \rangle$

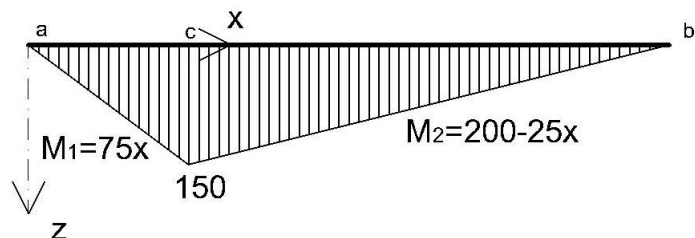
$$M_1 = 75x \cdot 10^3$$

$$EI_1 \cdot 10^{-3} \varphi_1 = (?)x + (?)x^2 + C_1$$

$$EI_1 \cdot 10^{-3} w_1 = (?)x + (?)x^2 + (?)x^3 + C_1x + C_2$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Integrace ohybové čáry

První úsek: $x \in \langle 0, 2 \rangle$

$$M_1 = 75x \cdot 10^3$$

$$EI_1 \cdot 10^{-3} \varphi_1 = -\frac{75}{2} x^2 + C_1$$

$$EI_1 \cdot 10^{-3} w_1 = -\frac{75}{6} x^3 + C_1 x + C_2$$

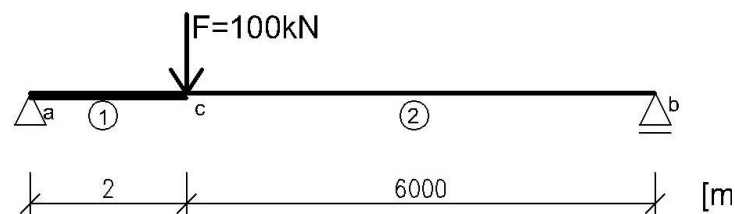
Integrací ohybové čáry $EI_2 \cdot 10^{-3}$ násobky funkce pootočení a průhybu

ve druhém úseku: $x \in \langle 2, 8 \rangle$

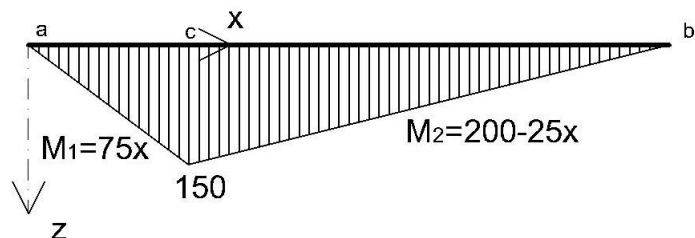
$$M_2 = (200 - 25x) \cdot 10^3$$

$$EI_2 \cdot 10^{-3} \varphi_2 = (?) x + (?) x^2 + C_3$$

$$EI_2 \cdot 10^{-3} w_2 = (?) x + (?) x^2 + (?) x^3 + C_3 x + C_4$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Integrace ohybové čáry

První úsek: $x \in \langle 0, 2 \rangle$

$$M_1 = 75x \cdot 10^3$$

$$EI_1 \cdot 10^{-3} \varphi_1 = -\frac{75}{2} x^2 + C_1$$

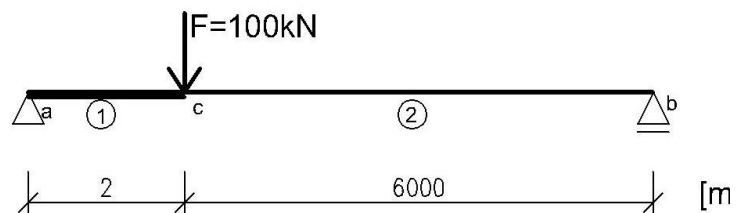
$$EI_1 \cdot 10^{-3} w_1 = -\frac{75}{6} x^3 + C_1 x + C_2$$

Druhý úsek: $x \in \langle 2, 8 \rangle$

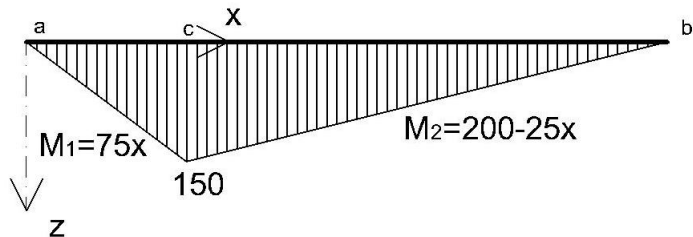
$$M_2 = (200 - 25x) \cdot 10^3$$

$$EI_2 \cdot 10^{-3} \varphi_2 = \frac{25}{2} x^2 - 200x + C_3$$

$$EI_2 \cdot 10^{-3} w_2 = \frac{25}{6} x^3 - 100x^2 + C_3 x + C_4$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Okrajové podmínky – podpory

Díky tomu, že podmínky jsou homogenní (předepsané průhyby jsou nulové) není třeba se zabývat tuhostmi, protože se násobí nulou.

Z podmínky pro průhyb v levé podpoře: $w_{1(x=0)} = 0$ určete C_2

$$C_2 = (?) \cdot C_1 + (?)$$

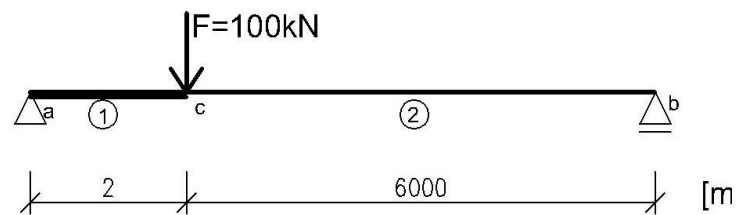
Z podmínky pro průhyb v levé podpoře: $w_{2(x=8)} = 0$ určete C_4

Pravá podpora:

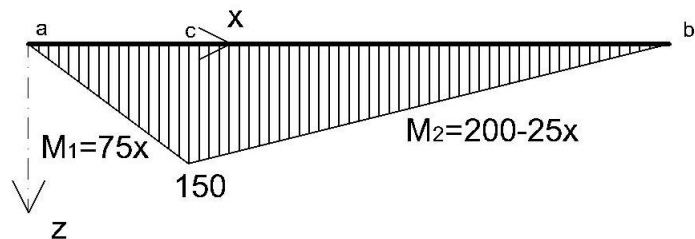
$$0 = \frac{25}{6} 8^3 - 100 \cdot 8^2 + C_3 \cdot 8 + C_4$$

$$8 \cdot C_3 + C_4 = 4266,667$$

$$C_4 = (?) \cdot C_3 + (?)$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Okrajové podmínky – podpory

Díky tomu, že podmínky jsou homogenní (předepsané průhyby jsou nulové) není třeba se zabývat tuhostmi, protože se násobí nulou.

Levá podpora: $w_{1(x=0)} = 0$

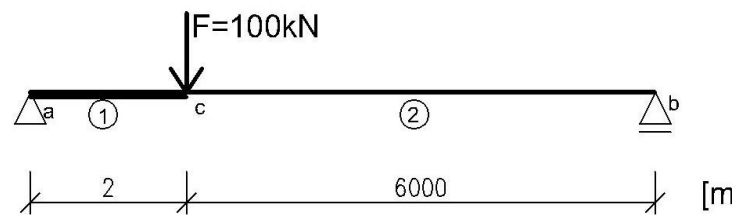
$$0 = -\frac{75}{6}0^3 + C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$C_2 = 0$$

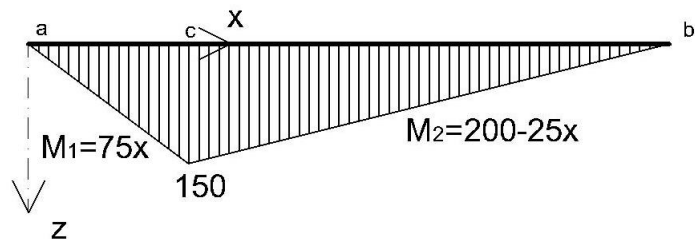
Pravá podpora: $w_{2(x=8)} = 0$

$$0 = \frac{25}{6}8^3 - 100 \cdot 8^2 + C_3 \cdot 8 + C_4$$

$$8 \cdot C_3 + C_4 = 4266,667$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Okrajové podmínky - na rozhraní úseků

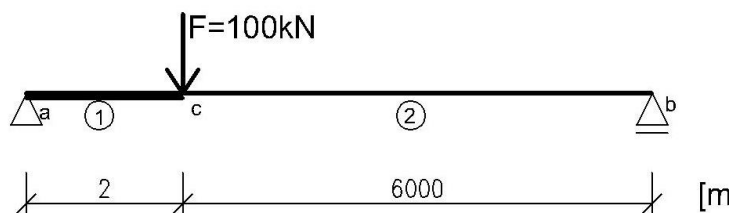
Zde je třeba brát v úvahu konkrétní tuhosti v jednotlivých úsecích. Obě rovnice se převedou na společnou tuhost (první nebo druhou) a potom se touto tuhostí celá rovnice vykrátí.

Z podmínky pro pootočení na rozhraní úseků: $\varphi_{1(x=2)} = \varphi_{2(x=2)}$ vyjádřete C_1 :

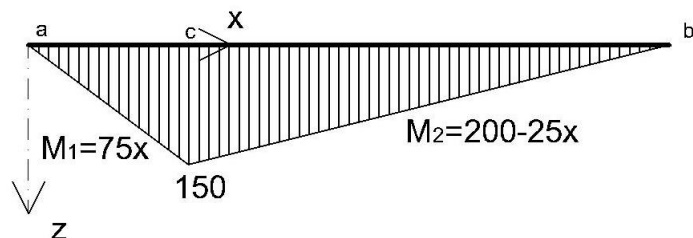
$$C_1 = (?) C_3 + (?)$$

Z podmínky pro průhyb na rozhraní úseků: $w_{1(x=2)} = w_{2(x=2)}$ vyjádřete C_1 :

$$C_1 = (?) C_3 + (?) C_4 + (?)$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Okrajové podmínky - na rozhraní úseků

Zde je třeba brát v úvahu konkrétní tuhosti v jednotlivých úsecích. Obě rovnice se převedou na společnou tuhost (první nebo druhou) a potom se touto tuhostí celá rovnice vykrátí.

Pootočení na rozhraní úseků: $\varphi_{1(x=2)} = \varphi_{2(x=2)}$

$$\frac{1}{2,197EI_2} \left(-\frac{75}{2} 2^2 + C_1 \right) = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{25}{2} 2^2 - 200 \cdot 2 + C_3 \right)$$

$$-\frac{75}{2} 2^2 + C_1 = \left(\frac{25}{2} 2^2 - 200 \cdot 2 + C_3 \right) \cdot 2,197$$

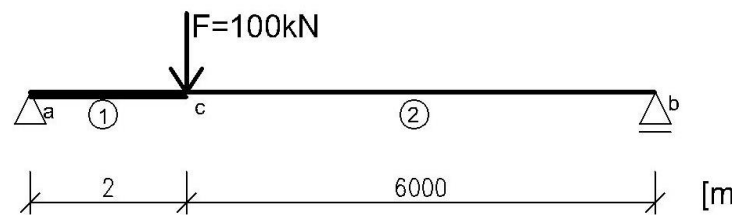
$$C_1 - 2,197 \cdot C_3 = -618,95$$

Průhyb na rozhraní úseků: $w_{1(x=2)} = w_{2(x=2)}$

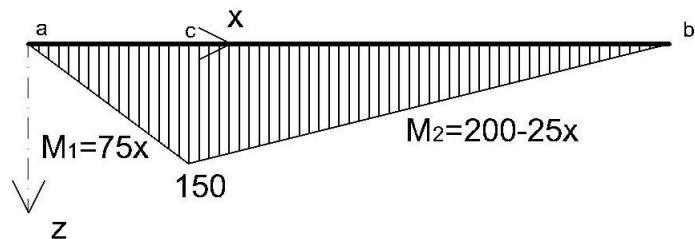
$$\frac{1}{2,197EI_2} \left(-\frac{75}{6} 2^3 + C_1 \cdot 2 + C_2 \right) = \frac{1}{EI_2} \left(\frac{25}{6} \cdot 2^3 - 100 \cdot 2^2 + C_3 \cdot 2 + C_4 \right)$$

$$-\frac{75}{6} 2^3 + C_1 \cdot 2 + C_2 = \left(\frac{25}{6} \cdot 2^3 - 100 \cdot 2^2 + C_3 \cdot 2 + C_4 \right) \cdot 2,197$$

$$C_1 - 2,197 \cdot C_3 - 1,0985 \cdot C_4 = -352,783$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Soustava rovnic:

$$C_2 = 0$$

$$8 \cdot C_3 + C_4 = 4266,667$$

$$C_1 - 2,197 C_3 = -618,95$$

$$C_1 - 2,197 \cdot C_3 - 1,0985 \cdot C_4 = -352,783$$

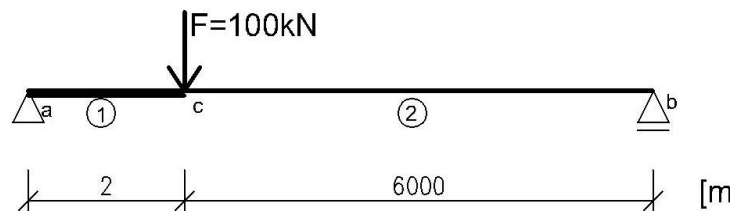
Vyřešte soustavu rovnic.

$$C_1 = (?)$$

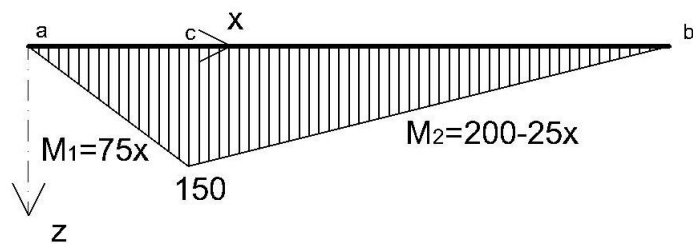
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = (?)$$

$$C_4 = (?)$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Řešení soustavy rovnic:

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = 619,325$$

$$C_3 = 563,621$$

$$C_4 = -242,30$$

Výsledné rovnice pootočení:

$$\varphi_1 = \frac{10^{-3}}{EI_1} (-37,5x^2 + 619,325) \quad \text{platí pro } x \in \langle 0,2 \rangle$$

$$\varphi_2 = \frac{10^{-3}}{EI_2} (12,5x^2 - 200x + 563,621) \quad \text{platí pro } x \in \langle 2,8 \rangle$$

Výsledné rovnice pootočení:

$$w_1 = \frac{10^{-3}}{EI_1} (-12,5x^3 + 619,325 \cdot x) \quad \text{platí pro } x \in \langle 0,2 \rangle$$

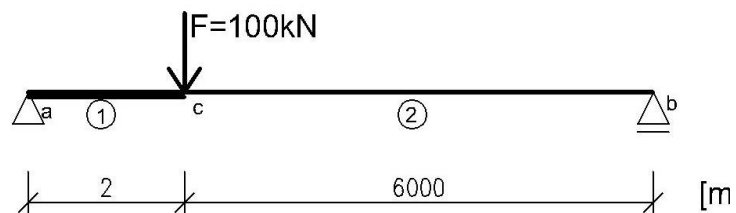
$$w_2 = \frac{10^{-3}}{EI_2} (4,1667x^3 - 100x^2 + 563,621x - 242,30) \quad \text{platí pro } x \in \langle 2,8 \rangle$$

Určete průhyb v místě působení síly:

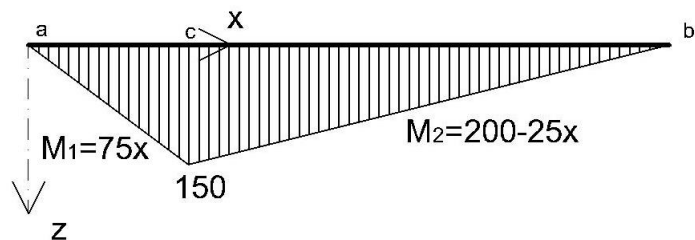
$$w_c = (?) \frac{10^3}{EI_2}$$

Určete průhyb uprostřed nosníku:

$$w_s = (?) \frac{10^3}{EI_2}$$



Obr.: Schéma nosníku a zatížení



Obr.: Průběhy ohybových momentů a jejich funkční popis

Průhyb pod silou:

$$w_c = w_{1(x=2)} = \frac{10^{-3}}{EI_1} (-12,5 \cdot 2^3 + 619,325 \cdot 2) = \frac{1138,66 \cdot 10^3}{EI_1}$$

$$= \frac{1138,66 \cdot 10^3}{2,197 EI_2} = \frac{518,28 \cdot 10^3}{EI_2}$$

nebo

$$w_c = w_{2(x=2)} = \frac{10^{-3}}{EI_2} (4,1667 \cdot 2^3 - 100 \cdot 2^2 + 563,621 \cdot 2 - 242,30) = \frac{518,28 \cdot 10^3}{EI_2}$$

Průhyb uprostřed nosníku:

$$w_s = w_{2(x=4)} = \frac{10^{-3}}{EI_2} (4,1667 \cdot 4^3 - 100 \cdot 4^2 + 563,621 \cdot 4 - 242,30) = \frac{678,85 \cdot 10^3}{EI_2}$$