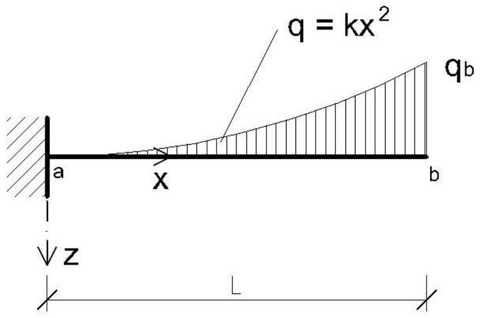


Obr.: Výpočtový model nosníku

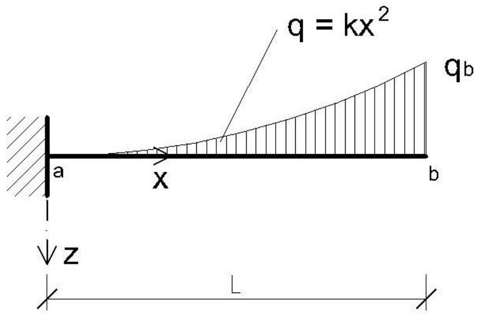
Průhyb nosníku - integrace ohybové čáry

Zadání

Nosník s konstantní ohybovou tuhostí EI je zatížen nerovnoměrným zatížením $q(x) = kx^2$ s maximální intenzitou q_b.

a) Určete rovnici pootočení průřezu $\varphi(x)$ a průhybu $w(x)$ metodou integrace ohybové čáry.

b) Pro hodnotu intenzity zatížení v bodě b q_b = 12 kN/m, délku nosníku L = 2,4 m, modul pružnosti E = 210 Gpa a moment setrvačnosti průřezu I = 21,4.10^{-6} m^4 určete maximální průhyb nosníku.



Obr.: Výpočtový model nosníku

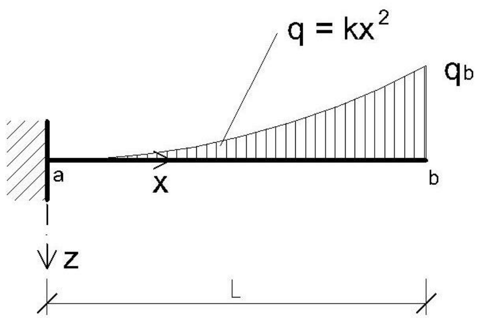
1) Určení rovnice pootočení a průhybu nosníku

Funkce zatížení je kvadratická funkce.

$q(x) = kx^2$

Integrací funkce zatížení určete rovnici posouvající síly včetně integračních konstant

$V(x) = \textbf{(?)}\ kL^3 + \textbf{(?)}\, kL^2 x + \textbf{(?)}\, kLx^2 + \textbf{(?)}\, kx^3$



Obr.: Výpočtový model nosníku

Funkce zatížení je kvadratická funkce.

$$q(x) = kx^2$$

Integrací funkce zatížení se určí rovnice posouvající síly:

$$V(x) = \int -q(x)dx$$

$$V(x) = \int -kx^2 dx$$

$$V(x) = -\frac{kx^3}{3} + C_1$$

Posouvající síla je známá na volném konci – z této okrajové podmínky určíme první integrační konstantu.

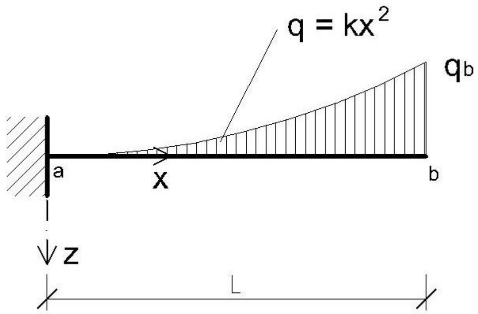
$$V_{(x=L)} = 0$$

$$-\frac{kL^3}{3} + C_1 = 0$$

$$C_1 = \frac{kL^3}{3}$$

Výsledná rovnice posouvající síly:

$$V(x) = -\frac{kx^3}{3} + \frac{kL^3}{3}$$



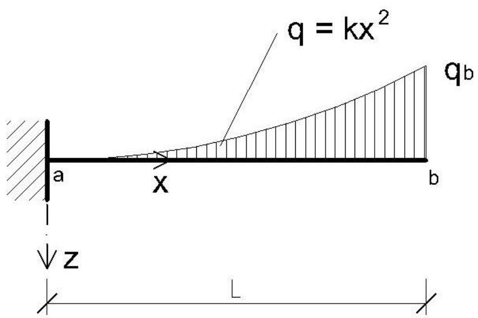
Obr.: Výpočtový model nosníku

Výsledná rovnice posouvající síly:

$$V(x) = -\frac{kx^3}{3} + \frac{kL^3}{3}$$

Integrací rovnice posouvající síly určete rovnici ohybového momentu včetně integrační konstanty:

$$M(x) = \mathbf{(?)}\,kL^4 + \mathbf{(?)}\,kL^3 x + \mathbf{(?)}\,kL^2 x^2 + \mathbf{(?)}\,kLx^3 + \mathbf{(?)}\,kx^4$$



Obr.: Výpočtový model nosníku

Výsledná rovnice posouvající síly:

$$V(x) = -\frac{kx^3}{3} + \frac{kL^3}{3}$$

Integrací posouvající síly se získá rovnice ohybového momentu:

$$M(x) = \int V(x)dx$$

$$M(x) = \int \left(-\frac{kx^3}{3} + \frac{kL^3}{3} \right) dx$$

$$M(x) = -\frac{kx^4}{12} + \frac{kL^3 x}{3} + C_2$$

Ohybový moment je známý na volném konci – z této okrajové podmínky určíme druhou integrační konstantu.

$$M_{(x=L)} = 0$$

$$-\frac{kL^4}{12} + \frac{kL^4}{3} + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{kL^4}{4}$$

Výsledná rovnice ohybových momentů:

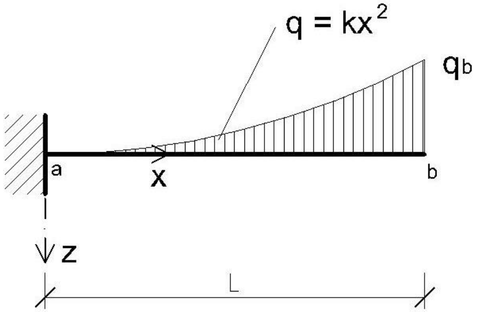
$$M(x) = -\frac{kx^4}{12} + \frac{kL^3 x}{3} - \frac{kL^4}{4}$$

Výsledná rovnice ohybového momentu:

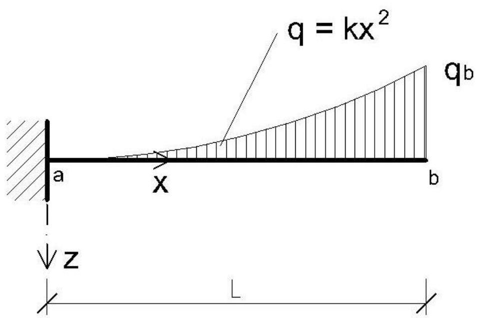
$$M(x) = -\frac{kx^4}{12} + \frac{kL^3 x}{3} - \frac{kL^4}{4}$$

Integrací rovnice momentu určete EI násobek rovnice pootočení včetně integrační konstanty:

$$EI\varphi(x) = \mathbf{(?)}\, kL^4 x + \mathbf{(?)}\, kL^3 x^2 + \mathbf{(?)}\, kL^2 x^3 + \mathbf{(?)}\, kLx^4 + \mathbf{(?)}\, kx^5$$



Obr.: Výpočtový model nosníku



Obr.: Výpočtový model nosníku

Výsledná rovnice ohybového momentu:

$$M(x) = -\frac{kx^4}{12} + \frac{kL^3x}{3} - \frac{kL^4}{4}$$

Integrací rovnice ohybového momentu se získá EI násobek rovnice pootočení:

$$EI\varphi(x) = \int -M(x)dx$$

$$EI\varphi(x) = \int -\left(-\frac{kx^4}{12} + \frac{kL^3x}{3} - \frac{kL^4}{4}\right)dx$$

$$EI\varphi(x) = \frac{kx^5}{60} - \frac{kL^3x^2}{6} + \frac{kL^4x}{4} + C_3$$

Pootočení je známo ve vetknutí. Z této okrajové podmínky určíme třetí integrační konstantu.

$$EI\varphi_{(x=0)} = 0$$

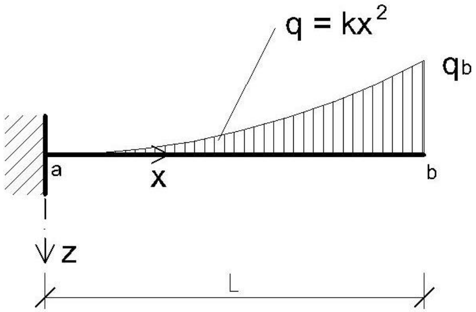
$$C_3 = 0$$

Výsledná rovnice:

$$EI\varphi(x) = \frac{kx^5}{60} - \frac{kL^3x^2}{6} + \frac{kL^4x}{4}$$

Hledaná rovnice pootočení je:

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{kx^5}{60} - \frac{kL^3x^2}{6} + \frac{kL^4x}{4}\right)$$



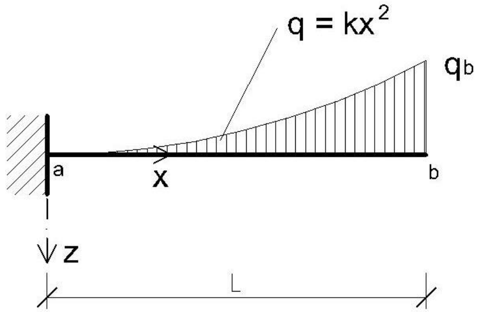
Obr.: Výpočtový model nosníku

EI násobek pootočení:

$$EI\varphi(x) = \frac{kx^5}{60} - \frac{kL^3x^2}{6} + \frac{kL^4x}{4}$$

Integrací rovnice určete EI násobek rovnice průhybu včetně integrační konstanty:

$$EI\varphi(x) = \textbf{(?)}\,kL^4x^2 + \textbf{(?)}\,kL^3x^3 + \textbf{(?)}\,kL^2x^4 + \textbf{(?)}\,kLx^5 + \textbf{(?)}\,kx^6$$



Obr.: Výpočtový model nosníku

EI násobek pootočení:

$$EI\varphi(x) = \frac{kx^5}{60} - \frac{kL^3x^2}{6} + \frac{kL^4x}{4}$$

Integrací se získá EI násobek rovnice průhybu:

$$EIw(x) = \int EI\varphi(x)dx$$

$$EI\varphi(x) = \int\left(\frac{kx^5}{60} - \frac{kL^3x^2}{6} + \frac{kL^4x}{4}\right)dx$$

$$EI\varphi(x) = \frac{kx^6}{360} - \frac{kL^3x^3}{18} + \frac{kL^4x^2}{8} + C_4$$

Průhyb je znám ve vetknutí. Z této okrajové podmínky určíme čtvrtou integrační konstantu.

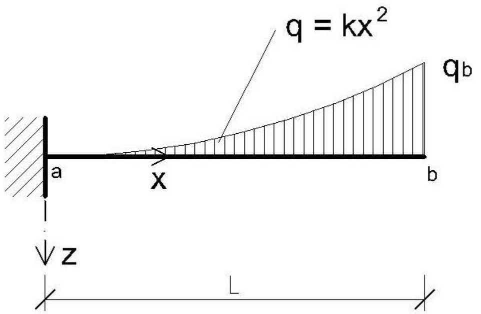
$$EIw_{(x=0)} = 0$$

$$C_4 = 0$$

$$EIw(x) = \frac{kx^6}{360} - \frac{kL^3x^3}{18} + \frac{kL^4x^2}{8}$$

Hledaná rovnice průhybu je

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{kx^6}{360} - \frac{kL^3x^3}{18} + \frac{kL^4x^2}{8}\right)$$



Obr.: Výpočtový model nosníku

2) Výpočet maximálního průhybu nosníku

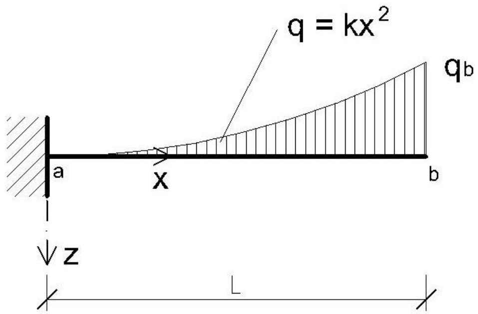
q_b = 12 kN/m
L = 2,4 m
E = 210 Gpa
I = 21,4.10^{-6} m^4

Vzhledem k podepření a zatížení nosníku je zřejmé, že maximální průhyb nosníku bude na volném konci nosníku. Vyjádřete průhybu volného konce nosníku dosazením délky prutu L za x .

$w(L) = \textbf{(?)}\, kL^6$

Vyjádřete číselnou hodnotu průhybu:

$w(L) = \textbf{(?)}$ [m]



Obr.: Výpočtový model nosníku

2) Výpočet maximálního průhybu nosníku

Vzhledem k podepření a zatížení nosníku je zřejmé, že maximální průhyb nosníku bude na volném konci nosníku. Pro vyjádření průhybu volného konce nosníku dosadíme za *x* délku prutu *L*.

$$w_b = w_{(x=L)} = \frac{1}{EI}\frac{26kL^6}{360} = \frac{13kL^6}{180}$$

Zatížení se vyjádří jako funkci maximální intenzity a za ni se dosadí.

$$q_{(x=L)} = kL^2 = q_b$$

$$k = \frac{q_b}{L^2}$$

$$w_b = w_{(x=L)} = \frac{13 q_b L^4}{180 EI} = 0{,}0064 m = 6{,}4 mm$$