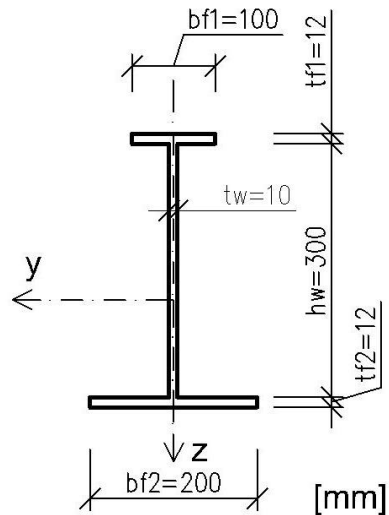


Obr.: Výpočtový model nosníku



Obr.: Průřez nosníku

## Ohýbaný nosník – napětí

### Zadání

Nosník s převislým koncem je zatížen spojitým zatížením  $q = 4\text{ kN/m}$  a osamělou silou  $F = 40\text{ kN}$ . Průřez nosníku je ocelový svařovaný profil.

Rozměry nosníku jsou:

$$L_1 = 3,6\text{ m}$$

$$L_2 = 1,2\text{ m}$$

Rozměry průřezu jsou:

šířka horní pásnice  $b_{f1} = 100\text{ mm}$

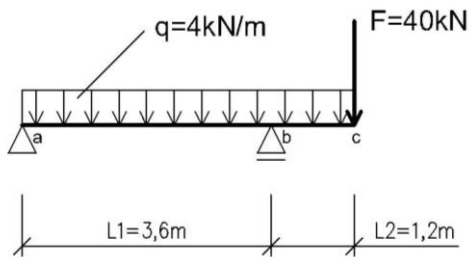
šířka dolní pásnice  $b_{f2} = 100\text{ mm}$

tloušťka pásnic  $t_f = 12\text{ mm}$

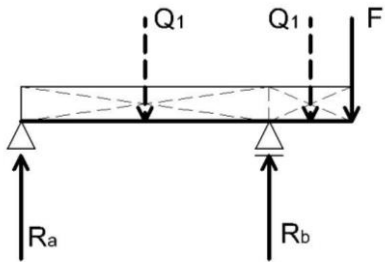
výška stojiny  $h_w = 300\text{ mm}$

tloušťka stojiny  $t_w = 10\text{ mm}$

- 1) Určete průřez, ve kterém vznikají extrémní normálová napětí  $\sigma_x$ .
- 2) V tomto kritickém průřezu (vpravo) průběh normálových napětí  $\sigma_x$  a smykových napětí  $\tau$  po průřezu, včetně směru jejich toku.



Obr.: Výpočtový model nosníku



Obr.: Schéma náhradních břemen a reakcí

### 1) Určení kritického průřezu

Normálová napětí určíme ze vztahu pro rovinný ohyb

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

Vzhledem k tomu, že není zadáno o jaký extrém se má jednat (tah, tlak) vznikne tento extrém ve vzdálenějších vláknech od těžiště – tedy v horních vláknech.

Je třeba nalézt místo extrému ohybového momentu.

Reakce nosníku

Určete náhradní břemena  $Q_1$  a  $Q_2$  pro spojitá zatížení v úsecích  $a-b$  a  $b-c$ .

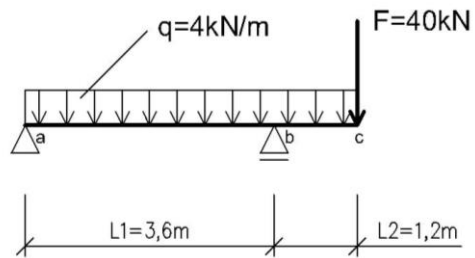
$$Q_1 = (?) \text{ [kN]}$$

$$Q_2 = (?) \text{ [kN]}$$

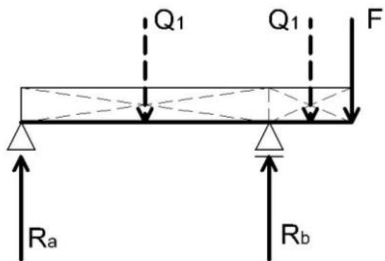
Určete svislé reakce  $R_a$  a  $R_b$ .

$$R_a = (?) \text{ [kN]}$$

$$R_b = (?) \text{ [kN]}$$



Obr.: Výpočtový model nosníku



Obr.: Schéma náhradních břemen a reakcí

## 1) Určení kritického průřezu

Reakce nosníku

Náhradní břemena  $Q_1$  a  $Q_2$  pro spojitá zatížení v úsecích a-b a b-c

$$Q_1 = qL_1 = 14,4 \text{ kN}$$

$$Q_2 = qL_2 = 4,8 \text{ kN}$$

Reakce  $R_a$  se vypočte z momentové podmínky k bodu  $b$ .

$$\Sigma M_{b,i} = 0$$

$$-R_a L_1 + Q_1 \frac{L_1}{2} - Q_2 \frac{L_2}{2} - FL_2 = 0$$

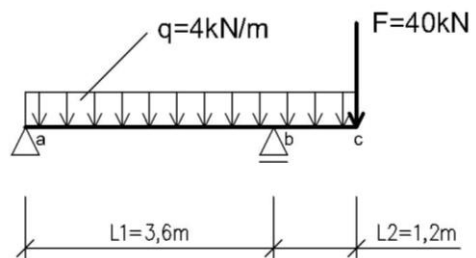
$$R_a = -6,93 \text{ kN}$$

Reakci  $R_b$  vypočteme ze silové podmínky do svislého směru

$$\Sigma F_{z,i} = 0$$

$$R_a + R_b - Q_1 - Q_2 - F = 0$$

$$R_b = 66,13 \text{ kN}$$



Obr.: Výpočtový model nosníku

### 1) Určení kritického průřezu

Určete hodnoty posouvajících sil

$$V_a = (?) \text{ [kN]}$$

$$V_{b,L} = (?) \text{ [kN]}$$

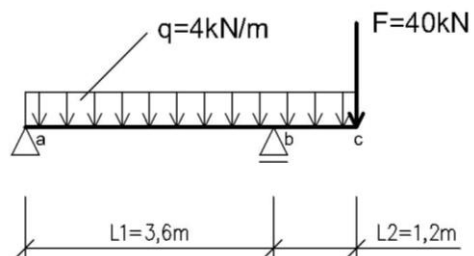
$$V_{b,P} = (?) \text{ [kN]}$$

$$V_c = (?) \text{ [kN]}$$

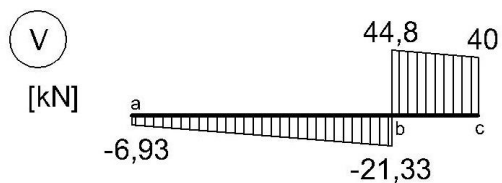
Určete ohybový moment v bodě b:

$$M_b = (?) \text{ [kNm]}$$

Vykreslete průběhy posouvajících sil a ohybových momentů.



Obr.: Výpočtový model nosníku



Obr.: Posouvající síly nosníku



Obr.: Ohybové momenty nosníku

## 1) Určení kritického průřezu

Výpočet posouvajících sil

$$V_a = R_a = -6,93\text{kN}$$

$$V_{b,L} = V_a - Q_1 = -21,33\text{kN}$$

$$V_{b,P} = V_{b,L} + R_b = 44,8\text{kN}$$

$$V_c = V_{b,P} - Q_2 = 40\text{kN}$$

Průběhy ohybových momentů

V úsecích  $a-b$  a  $b-c$  nedosahuje posouvající síla nulové hodnoty  $\rightarrow$  nebudou zde lokální extrém.

Extrém momentů bude v bodě  $b$ , kde posouvající síla mění znaménko.

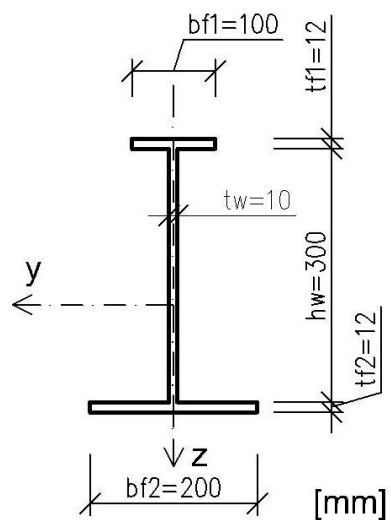
Moment v bodě  $b$  je možné určit například z momentové podmínky rovnováhy k bodu  $b$  na vyjmuté pravé části nosníku.

$$\Sigma M_{b,i} = 0$$

$$-M_b - Q_2 \frac{L_2}{2} - FL_2 = 0$$

$$M_b = -50,88\text{kNm}$$

Průřez  $b$  je také místem, kde se vyskytuje největší normálové napětí.



Obr.: Průřez nosníku

## 2) Průběhy napětí v průřezu *b*

K výpočtu normálového i smykového napětí je třeba znát moment setrvačnosti průřezu k těžišti průřezu.

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\tau = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y t}$$

K tomu je třeba určit polohu těžiště průřezu.

Určete polohu těžiště průřezu

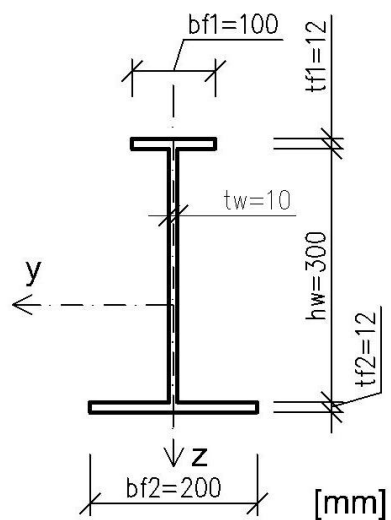
Vzdálenost těžiště od horní hrany průřezu

$$z_t = (?) \text{ [m]}$$

Určete souřadnice horní a dolní hrany v souřadném systému jdoucím těžištěm

$$z_h = (?) \text{ [m]}$$

$$z_d = (?) \text{ [m]}$$



Obr.: Průřez nosníku

## 2) Průběhy napětí v průřezu *b*

Určete polohu těžiště průřezu

Osa *y* se pracovně vloží do horní hrany průřezu.

Výška průřezu

$$h = 2t_f + h_w = 0,324 \text{ m}$$

Plocha průřezu

$$A = (b_{f1} + b_{f2})t_f + h_w t_w = 0,0066 \text{ m}^2$$

Statický moment k pracovní ose *y*

$$S = b_{f1} t_f \frac{t_f}{2} + b_{f2} t_f \left( h - \frac{t_f}{2} \right) + h_w t_w \frac{h}{2} = 0,0012564 \text{ m}^3$$

Vzdálenost těžiště od horní hrany průřezu

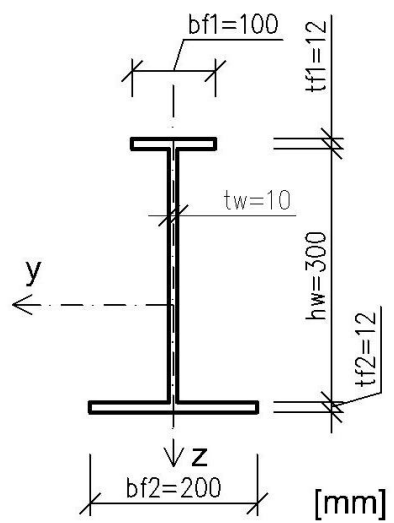
$$z_t = \frac{S}{A} = 0,19036 \text{ m}$$

Počátek souřadného systému se posune do těžiště.

*z*-ová souřadnice horní a dolní hrany.

$$z_h = -z_t = -0,19036 \text{ m}$$

$$z_d = h - z_t = 0,13364 \text{ m}$$



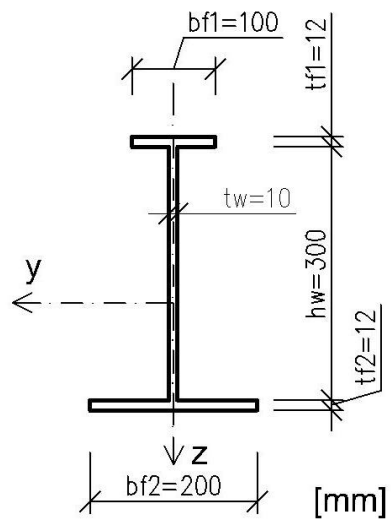
Obr.: Průřez nosníku

## 2) Průběhy napětí v průřezu $b$

Určete moment setrvačnosti průřezu

$$I_y = (?) \text{ [m}^4\text{]}$$





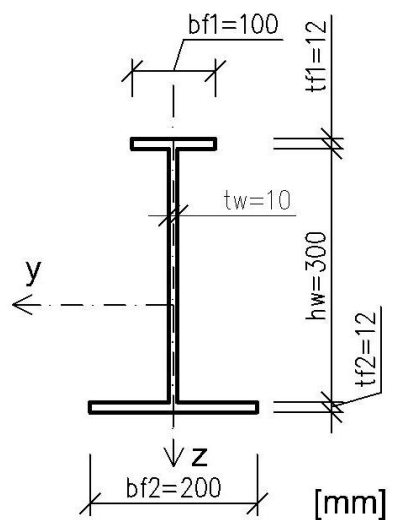
Obr.: Průřez nosníku

## 2) Průběhy napětí v průřezu $b$

Moment setrvačnosti průřezu

$$I_y = \frac{1}{12} b_{f1} t_f^3 + b_{f1} t_f \left( -z_h - \frac{t_f}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} t_w h_w^3 + b_w t_w \left( z_h + \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} b_{f2} t_f^3 + b_{f2} t_f \left( z_d - \frac{t_f}{2} \right)^2 = 104,69 \cdot 10^{-6} m^4$$

POZN: členy odpovídající momentům setrvačnosti pásnic k vlastnímu těžišti lze obvykle zanedbat.



Obr.: Průřez nosníku

## 2) Průběhy napětí v průřezu *b*

Normálová napětí

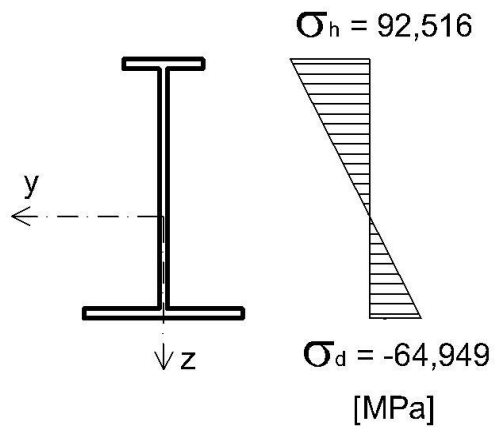
Normálová napětí jsou počítána pro extrémní moment, kterého je dosaženo v bodě *b*.

$$M_y = M_b = -50,88 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{x,h} = (?) \text{ [MPa]}$$

$$\sigma_{x,d} = (?) \text{ [MPa]}$$

Vykreslete průběh normálového napětí po výšce průřezu.



## 2) Průběhy napětí v průřezu *b*

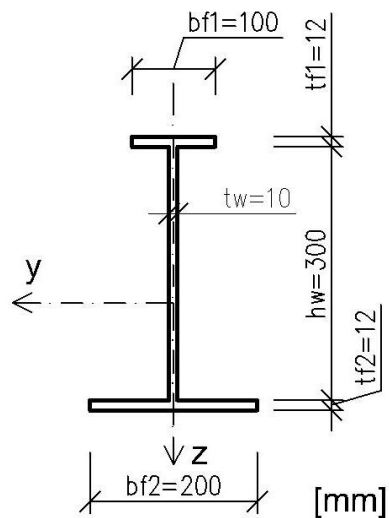
Normálová napětí

Normálová napětí jsou počítána pro extrémní moment, kterého je dosaženo v bodě *b*.

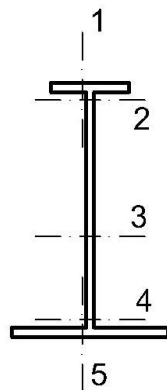
$$M_y = M_b = -50,88 \text{ kNm}$$

$$\sigma_{x,h} = \frac{M_y z_h}{I_y} = \frac{-50,88 \cdot 10^3 \cdot (-0,19036)}{104,69 \cdot 10^{-3}} = 92516160 \text{ Pa} = 92,516 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{x,d} = \frac{M_y z_d}{I_y} = \frac{-50,88 \cdot 10^3 \cdot 0,13364}{104,69 \cdot 10^{-3}} = -64949882 \text{ Pa} = -64,949 \text{ MPa}$$



Obr.: Průřez nosníku



Obr.: Uvažované řezy, ve kterých se bude počítat smykové napětí

## 2) Průběhy napětí v průřezu *b*

Statické momenty plochy

K výpočtu smykového napětí

$$\tau = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y t}$$

je třeba znát statický moment plochy. Statický moment plochy ve vzorci se uvažuje pro dolní část plochy oddělenou vyšetřovaným řezem k těžišti celého průřezu. Vzhledem k tomu, že statický moment horní části plochy oddělené myšleným řezem se liší pouze znaménkem, je možné využít pro výpočet i tuto část a výsledek dát do absolutní hodnoty.

Určete Statický moment plochy pro řezy dle obrázku:

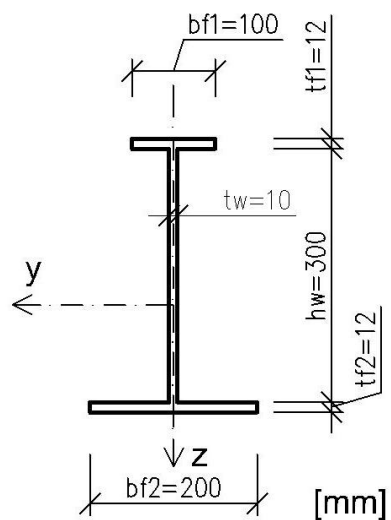
$$\bar{S}_{y1} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$

$$\bar{S}_{y2} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$

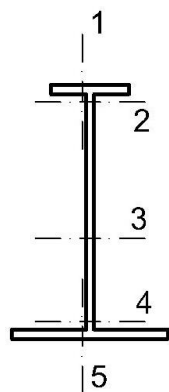
$$\bar{S}_{y3} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$

$$\bar{S}_{y4} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$

$$\bar{S}_{y5} = (?) \text{ [m}^3\text{]}$$



Obr.: Průřez nosníku



Obr.: Uvažované řezy, ve kterých se bude počítat smykové napětí

## 2) Průběhy napětí v průřezu $b$

Statický moment plochy pro řezy dle obrázku:

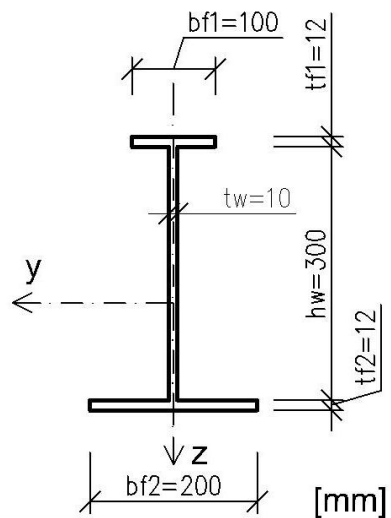
$$\bar{S}_{y1} = t_f \frac{(b_{f1} - t_w)}{2} \left(-z_h - \frac{t_f}{2}\right) = 99,5544 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$\bar{S}_{y2} = t_f b_{f1} \left(-z_h - \frac{t_f}{2}\right) = 221,232 \cdot 10^{-6} m^3$$

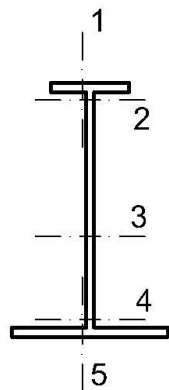
$$\bar{S}_{y3} = \bar{S}_{y2} + t_w \left(-z_h - t_f\right) \frac{(-z_h - t_f)}{2} = 380,293 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$\bar{S}_{y4} = t_f b_{f2} \left(z_d - \frac{t_f}{2}\right) = 306,336 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$\bar{S}_{y5} = t_f \frac{(b_{f2} - t_w)}{2} \left(z_d - \frac{t_f}{2}\right) = 145,510 \cdot 10^{-6} m^3$$



Obr.: Průřez nosníku



Obr.: Uvažované řezy, ve kterých se bude počítat smykové napětí

## 2) Průběhy napětí v průřezu *b*

Smyková napětí

Smyková napětí jsou počítána v místě největšího normálového napětí (dle zadání) tedy v bodě *b* a to zprava. Posouvající síla zde je

$$V_z = V_{b,p} = 44,8 \text{ kN} .$$

$$\tau_1 = (?) \text{ [MPa]}$$

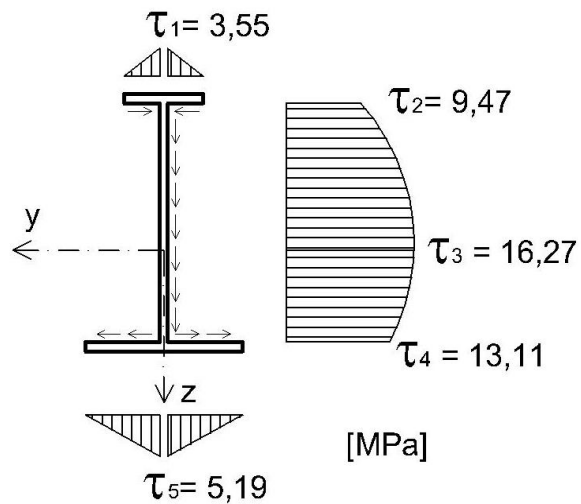
$$\tau_2 = (?) \text{ [MPa]}$$

$$\tau_3 = (?) \text{ [MPa]}$$

$$\tau_4 = (?) \text{ [MPa]}$$

$$\tau_5 = (?) \text{ [MPa]}$$

Vykreslete průběhy velikostí smykového napětí a směr smykového toku v řezu *b<sub>p</sub>*.



Obr.: Průběh smykového napětí a směr smykového toku v průřezu  $b_p$ .

## 2) Průběhy napětí v průřezu $b$

Smyková napětí

Smyková napětí jsou počítána v místě největšího normálového napětí (dle zadání) tedy v bodě  $b$  a to zprava. Posouvající síla zde je

$$V_z = V_{b,p} = 44,8N .$$

$$\tau_1 = \frac{V_z \bar{S}_{y1}}{I_y t_f} = 3550193Pa = 3,55MPa$$

$$\tau_2 = \frac{V_z \bar{S}_{y2}}{I_y t_w} = 9467182Pa = 9,47MPa$$

$$\tau_3 = \frac{V_z \bar{S}_{y3}}{I_y t_w} = 16273881Pa = 16,27MPa$$

$$\tau_4 = \frac{V_z \bar{S}_{y4}}{I_y t_w} = 13109038Pa = 13,11MPa$$

$$\tau_5 = \frac{V_z \bar{S}_{y5}}{I_y t_f} = 5189008Pa = 5,19MPa$$

Vzhledem k tomu, že posouvající síla vpravo od podpory  $b$  je kladná, působí na levou část konstrukce směrem dolů. Stejný směr má smykový tok na stojině. Smykový tok na pásnicích navazuje na smykový tok na stojině. Tím je dán jeho směr – na horní pásnici se sbíhá směrem ke stojině a na dolní pásnici se rozchází směrem od stojiny.