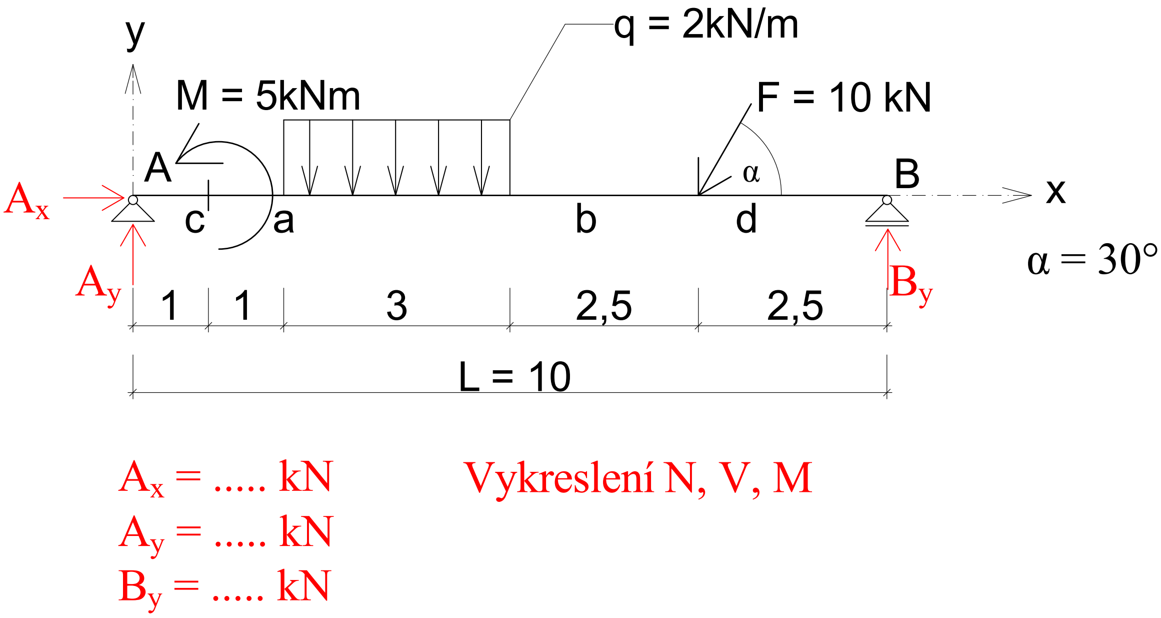
Vzorový příklad k 1. kontrolnímu testu
Prostý nosník

Zadání:

Vypočtěte složky reakcí a vykreslete průběhy vnitřních sil.



Rozklad síly F

$$F_x = F \cdot cos\alpha = 10 \cdot cos\,30^o = 8,66\,\mathrm{kN} \tag{1}$$

$$F_y = F \cdot sin\alpha = 10 \cdot cos\,30^o = 5,0\,\mathrm{kN} \tag{2}$$

Náhradní břemeno Q

Náhradní břemeno Q je rovno ploše dané velikostí spojitého zatížení q a jeho délce (v našem případě $q \in (a;b)$).

$$Q = q \cdot |ab| = 2 \cdot 3 = 6,0\,\mathrm{kN} \tag{3}$$

Poloha náhradního břemena Q leží vždy v těžišti spojitého zatížení (v našem případě rovnoměrného spojitého zatížení v polovině vzdálenosti mezi body a a b). Nyní máme vše potřebné pro výpočet složek reakcí.

Složky reakcí a podmínky rovnováhy

Vnější vazby zamezují v pohybu (posuvům, rotacím) konstrukce, odebírají stupně volnosti. Ve vnějších vazbách (podporách) vznikají reakce, které zajišťují rovnováhu se zatížením. Vzniká tedy rovnovážná soustava, pro kterou lze sestavit **podmínky rovnováhy**:

- Silová podmínka rovnováhy ve směru x $\Rightarrow \sum F_x = 0$
- Silová podmínka rovnováhy ve směru y $\Rightarrow \sum F_y = 0$

  Momentové podmínky rovnováhy je výhodné položit k bodům podepření, dojde ke snížení členů v rovnici

- Momentová podmínka rovnováhy k bodu A $\Rightarrow \sum M_i^A = 0$
- Momentová podmínka rovnováhy k bodu B $\Rightarrow \sum M_i^B = 0$

Výpočet složek reakcí

Použijeme **silovou podmínku rovnováhy ve směru** x a obě **momentové podmínky rovnováhy**, silovou podmínku rovnováhy ve směru y využijeme pro kontrolu.

- Silová podmínka ve směru x, uvažovaný kladný směr $+ \rightarrow$

$$\sum F_x = 0 : A_x - F_x = 0 \Rightarrow A_x = F_x = 8,66\,\mathrm{kN} \tag{4}$$

- Momentová podmínka rovnováhy k bodu B, kladný smysl otáčení zvolíme $M^+ \circlearrowright$

$$\begin{aligned} \sum M_i^B &= 0 : A_y \cdot L - M - Q \cdot (6,5) - F_y \cdot (2,5) = 0 \Rightarrow \\ A_y &= \frac{M + Q \cdot (6,5) + F_y \cdot (2,5)}{L} = \frac{5 + 6 \cdot 6,5 + 5 \cdot 2,5}{10} = 5,65\,\mathrm{kN} \end{aligned} \tag{5}$$

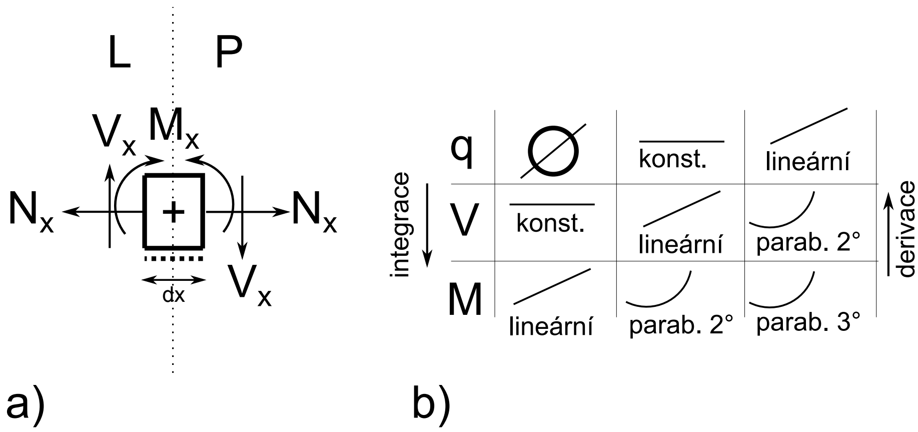
- Momentová podmínka rovnováhy k bodu A, kladný smysl otáčení zvolíme $M^+ \circlearrowleft$

$$\begin{aligned} \sum M_i^A &= 0 : B_y \cdot L + M - Q \cdot (3,5) - F_y \cdot (7,5) = 0 \Rightarrow \\ B_y &= \frac{-M + Q \cdot (3,5) + F_y \cdot (7,5)}{L} = \frac{-5 + 6 \cdot 3,5 + 5 \cdot 7,5}{10} = 5,35\,\mathrm{kN} \end{aligned} \tag{6}$$

- Kontrolní silová podmínka ve směru y, uvažovaný kladný směr $+ \uparrow$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 : A_y - F_y - Q + B_y &= 0 \\ 5,65 - 5 - 6 + 5,35 &= 0 \\ 0 &= 0 \Rightarrow \text{OK} \end{aligned} \tag{7}$$

Nyní známe všechny složky reakcí, které jsou v rovnováze s působícím zatížením. Než přejdeme k vykreslední složek vnitřních sil, připomínám kladnou konvenci složek vnitřních sil (obrázek 1) a tvar průběhu vnitřních sil, který plyne z derivačně-integračního schématu.



Obrázek 1: a) Kladný smysl vnitřních sil pro levou i pravou část nosníku. b) Tvar průběhu vnitřních sil - derivačně integrační schéma.

Průběhy vnitřních sil

Ve většině případů budeme postupovat zleva, za kladné uvažujeme vnitřní síly dle levé části obrázku 1a.

Normálové síly N_x

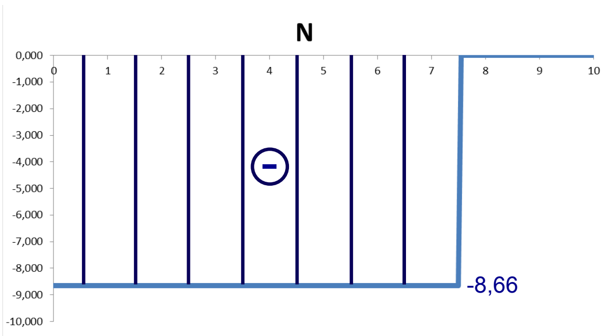
V bodě 0 působí reakce A_x v opačném smyslu než uvažovaný kladný směr (způsobuje tlak v nosníku). Pak:

$$N_{x,0} = -A_x = -8,66\,\mathrm{kN} \tag{8}$$

Postupujeme-li zleva narazíme na další sílu působící ve směru osy nosníku (osy x) až v bodě d. Po bod d zůstává normálová síla N_x konstantní a rovna $N_{x,0}$. V bodě d dojde vlivem F_x ke změně v průběhu normálové síly. Síla F_x působí ve shodném směru jako je kladná konvence normálové síly při postupu zleva

$$N_{x,d} = -A_x + F_x = -8,66 + 8,66 = 0,0\,\mathrm{kN} \tag{9}$$

Na zbylé části nosníku již žádná síla ve směru x nepůsobí, průběh normálových sil se tedy nezmění.



Obrázek 2: Průběh normálových sil.

Posouvající síly V_x

V bodě 0 působí reakce A_y v shodném smyslu jako uvažovaný kladný směr. Pak:

$$V_{x,0} = A_y = 5,65\,\text{kN} \tag{10}$$

Postupujeme-li zleva narazíme na další sílu působící ve směru osy y až v bodě a. Po bod a zůstává posouvající síla V_x konstantní a rovna $V_{x,0}$. Od bodu a po bod b působí spojité zatížení o intenzitě 2 kN/m. Je-li spojité zatížení konstantní bude průběh posouvající síly V_x v tomto úseku lineární a bude klesat s intezitou q až do bodu b. V bodě b je tedy posouvající síla rovna

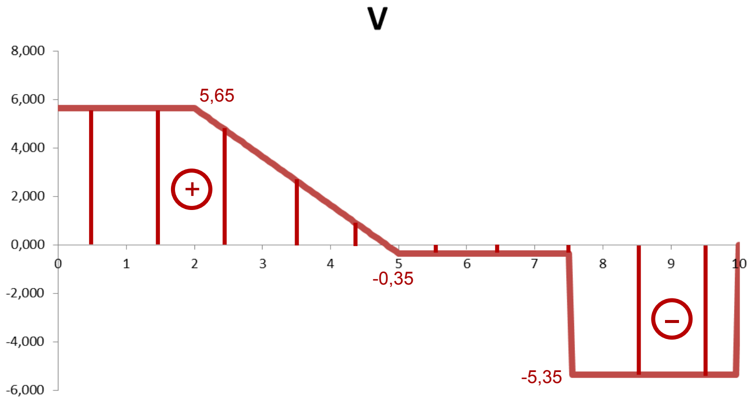
$$V_{x,b} = A_y - q \cdot |ab| = 5,65 - 2 \cdot 3 = -0,35\,\text{kN} \tag{11}$$

Od bodu b pod bod d zůstává posouvající síla opět konstantní a rovna $V_{x,b}$. V bodě d začne působit y-složka síly F, dojde ke skoku v průběhu posouvající síly.

$$V_{x,d} = A_y - q \cdot |ab| - F_y = 5,65 - 2 \cdot 3 - 5 = -5,35\,\text{kN} \tag{12}$$

Postupujeme-li dále po nosníku narazíme na reakci B_y působící ve směru osy y. Tato síla působí v uvažovaném kladném směru při postupu zleva, bude mít tedy znaménko +.

$$V_{x,B} = A_y - q \cdot |ab| - F_y + B_y = 5,65 - 2 \cdot 3 - 5 + 5,35 = 0,0\,\text{kN} \tag{13}$$



Obrázek 3: Průběh posouvajících sil.

Ohybový moment M_x

Postupujeme-li zleva uvažujeme za kladný smysl otáčení účinky působící ve směru hodinových ručiček. V bodě 0 působí reakce A_y v shodném smyslu jako uvažovaný kladný směr, ale na nulovém rameni r. Pak:

$$M_{x,0} = A_y \cdot 0 = 0\,\text{kNm} \tag{14}$$

Další bod, ve kterém určíme velikost momentu, bude bod c, v němž působí osamělý moment M. Nejprve určíme hodnotu těsně vlevo před bodem c. Mezi body A a c nepůsobí spojité zatížení, průběh ohybových momentů bude lineární (dle derivačně-integračního schématu).

$$M_{x,c}^{L} = A_y \cdot |0c| = 5,65 \cdot 1 = 5,65\,\text{kNm} \tag{15}$$

V bodě c nastane skok vlivem osamoceného momentu M, jehož účinek je záporný.

$$M_{x,c}^{P} = A_y \cdot |0c| - M = 5,65 \cdot 1 - M = 0,65\,\mathrm{kNm} \tag{16}$$

Další bodem ve výpočtu bude bod a, v něm určíme moment následujícím způsobem

$$M_{x,a} = A_y \cdot |0a| - M = 5,65 \cdot 2 - 5 = 6,3\,\mathrm{kNm}. \tag{17}$$

Pokračujeme bodem b. Mezi body $|ab|$ působí spojité zatížení $\Rightarrow$ průběh momentů bude parabola 2^o.

$$M_{x,b} = A_y \cdot |0b| - M - Q \cdot \frac{|ab|}{2} = 5,65 \cdot 5 - 5 - 6 \cdot 1,5 = 14,25\,\mathrm{kNm}. \tag{18}$$

Moment k bodu d si určíme postupem z pravé strany nosníku, kladný směr je nyný dle konvence protisměru hodinových ručiček.

$$M_{x,d} = B_y \cdot |dB| = 5,35 \cdot 2,5 = 13,375\,\mathrm{kNm}. \tag{19}$$

V bodě B je ohybový moment roven 0, reakce B_y působí na nulovém rameni r. Provedeme ještě kontrolu k bodu b postupem z pravé části.

$$M_{x,b} = B_y \cdot |bB| - F_y \cdot |bd| = 5,35 \cdot 5 - 5 \cdot 2,5 = 14,25\,\mathrm{kNm}. \tag{20}$$

Kontrola k bodu b nám potvrdila správnost výpočtu, mezi body b a B bude průběh ohybového momentu linérní, jak nám ukazuje derivačně-integrační schéma.

Lokální maximum ohybového momentu se nachází v tzv. místě přechodového průřezu, tj. místo, v němž je posouvající síla rovna 0. Toto místo označme jako X. Polohu X určíme z následující rovnice

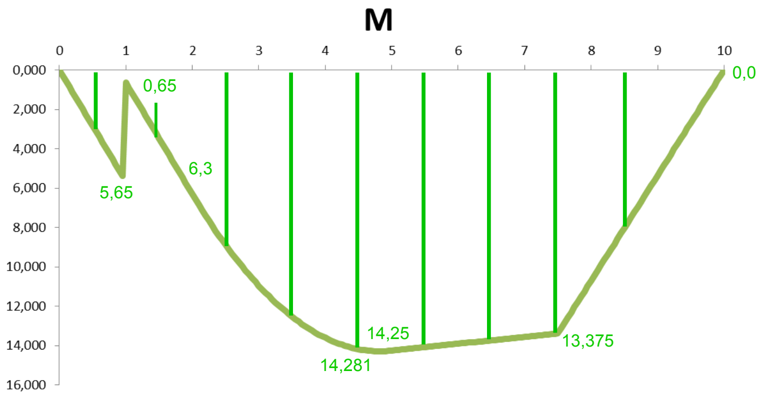
$$V_{x,a} - \int_a^X q\,dx = 0, \tag{21}$$

integrál $\int_a^X q\,dx$ je plocha spojitého zatížení mezi body a a $X \Rightarrow \int_a^X q\,dx = q \cdot |aX|$. Pak lze v tomto případně jednoduše určit vzdálenost $|aX|$ jako:

$$|aX| = \frac{V_{x,a}}{q} = \frac{5,65}{2} = 2,825\,\mathrm{m}. \tag{22}$$

V tomto místě bude maximální ohybový moment, který vyjádříme například zleva takto:

$$M_{x,X} = A_y \cdot |0X| - M - q \cdot |aX| \cdot \frac{|aX|}{2} = 5,65 \cdot (2 + 2,825) - 5 - 2 \cdot 2,825 \cdot \frac{2,825}{2} = 14,281\,\mathrm{kNm}. \tag{23}$$



Obrázek 4: Průběh ohybových momentů.

Shrnutí

Doufám, že vám následující příklad pomůže zvládnout bez problémů 1. kontrolní test, který vás čeká v 5. týdnu výuky.