

MATEMATIKA BA07 - Test 4

I. ročník kombinovaného studia

Příklad 1. Ukažte, že funkce $z(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}}$ vyhovuje Laplaceově rovnici $z''_{xx} + z''_{yy} = 0$.

Příklad 2. Zjistěte, zda funkce $u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$ vyhovuje parciální diferenciální rovnici pro vedení tepla $u''_{xx} - \frac{1}{a^2} u'_t = 0$.

Příklad 3. Vypočítejte $d^2 f(A, \vec{u})$ funkce $f(x, y) = \sin x \sin y$, je-li:

- a) $A = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $\vec{u} = (dx, dy)$;
- b) $A = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, $B = [x, y]$, $\vec{u} = A\vec{B}$.

Příklad 4. Určete Taylorův polynom funkce f stupně n v bodě A , je-li:

- a) $f(x, y) = e^x \ln(1 + y)$, $A = [0, 0]$, $n = 2$;
- b) $f(x, y) = x^y$, $A = [1, 1]$, $n = 3$.

Příklad 5. Určete rovnici tečné roviny a normály v bodě T , gradient v bodě A a derivaci ve směru $\vec{s}$ v bodě A funkce f :

- a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$, $T = [3, 4, ?]$, $A = [3, 4]$, $\vec{s} = (3, 4)$;
- b) $f(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, $T = [1, 1, ?]$, $A = [1, 1]$, $\vec{s} = (1, 1)$.

Příklad 6. Nalezněte lokální extrémy funkce

- a) $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$;
- b) $f(x, y) = y^3 + 3xy^2 + 2x^3 + 9x^2$.

Příklad 7. Určete y' funkce y dané implicitně rovnicí $3x^2 y^2 + x \cos y = 0$.

Příklad 8. Zjistěte, zda je funkce y daná implicitně rovnicí $y \sin x + x^2 + y^3 = 1$ v bodě $x = 0$ rostoucí a konvexní.

Příklad 9. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce y dané implicitně rovnicí $\ln \sqrt{x^2 + y^2} - \arctg \frac{y}{x}$ v bodě $T = [1, 0]$ ležícím na grafu.

Výsledky:

1. vyhovuje **2.** vyhovuje **3. a)** $d^2 f(A, \vec{u}) = \frac{1}{2} d^2 x + dx dy + \frac{1}{2} d^2 y$ **b)** $d^2 f(A, \vec{u}) = \frac{1}{2} (x + \frac{\pi}{4})^2 + (x + \frac{\pi}{4})(y - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} (y - \frac{\pi}{4})^2$ **4. a)** $T_2(x, y) = y + xy - \frac{1}{2} y^2$ **b)** $T_3(x, y) = 1 + x + xy + \frac{1}{2} x^2 y$ **5. a)** $\tau : 17x + 11y - 5z - 60 = 0, n : x = 3 + 17t, y = 4 + 11t, z = -7 - 5t, t \in R, \text{grad} f(A) = (-\frac{17}{5}, -\frac{11}{5}), \frac{dF(A)}{ds} = -\frac{19}{5}$ **b)** $\tau : x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0, n : x = 1 + t, y = 1 - t, z = \frac{\pi}{4} + 2t, t \in R, \text{grad} f(A) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{dF(A)}{ds} = 0$ **6. a)** V bodě $S = [\frac{1}{2}, -1]$ nastane ostré lokální minimum. **b)** V bodě $S_1 = [0, 0]$ nelze rozhodnout, v bodě $S_2 = [-3, 0]$ nastane ostré lokální maximum, v bodě $S_3 = [-1, 2]$ lokální extrém nenastává. **7.** $y'(x) = \frac{6xy^2 + \cos y}{x \sin y - 6x^2 y}$ **8.** Funkce y je v bodě 0 klesající ($y'(0) = -\frac{1}{3}$) a konkávní ($y''(0) = -\frac{2}{3}$) **9.** $t : y = x - 1, n : y = -x + 1$.

Příklad	1	2	3a	3b	4a	4b	5a	5b	6a	6b	7	8	9
Body	10	10	5	5	10	20	10	10	20	20	10	20	10