TAYLORŮV POLYNOM dané funkce.

V různých situacích je praktické nahradit zadanou funkci vhodným mnohočlenem, a to aspoň lokálně, na nějakém okolí daného bodu. S polynomem se lépe pracuje. Tento postup se uplatňuje v technické praxi i při výpočtu křivek v počítači.

Protože jsme si právě nacvičili počítání diferenciálů, přivedeme nejprve stručný a přehledný zápis tzv. Taylorova polynomu funkce a pak teprve vysvětlíme, jak by se k němu dalo dospět úvahou a výpočtem.

Má-li funkce f v bodě $\boxed{x_0 = a} \in \mathbb{R}$ VLASTNÍ derivace až do řádu n (včetně), pak tzv. Taylorův polynom řádu n funkce f v bodě a je polynom n-tého stupně

$$T_n(x) = T_n(f, a, \underbrace{x-a}_{=h}) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{d f(a, h)}{1!} + \frac{d^2 f(a, h)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(a, h)}{n!}.$$

$0! = 1! = 1$, nemusíme psát

Faktoriál : $n(n-1)\dots 2.1$

Jak víme, diferenciál spočítáme pomocí derivací v bodě a a mocnin h, takže:

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} \cdot f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Stále platí, že v b. a musí existovat $f'(a), \dots, f^{(n-1)}(a), f^{(n)}(a)$.

Jak se dá tuto tvar odvodit:

Hledáme polynom T_n, stupně nejvýše n; tedy chceme stanovit jeho KOEFICIENTY; takový, aby v DANÉM bodě a měl STEJNÉ DERIVACE jako PŮVODNÍ FUNKCE f:

$$f(a) = T_n(a), \quad f'(a) = T_n'(a), \ldots, f^{(n)}(a) = T_n^{(n)}(a).$$

Označme-li koeficienty hledaného polynomu jako $a_0, a_1, \ldots, a_n$, tedy hledáme T_n ve tvaru

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-\underset{\text{daný bod}}{a}) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \ldots a_n(x-a)^n,$$

mají derivace tvar

$$T_n'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1},$$

$$T_n''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2},$$

atd. Porovnáme jednotlivé derivace pro T_n a f:

0. derivace: $\underbrace{T_n(a)}_{\text{zůstane } a_0}= f(a)$, proto $a_0 = f(a)$.

zůstane a_0,
ostatní se anulují, $(a-a)=0$.

1. derivace: $\underbrace{T_n'(a)}_{\text{zůstane } a_1} = f'(a)$, proto $a_1 = f'(a)$.

2. derivace: $\underbrace{T_n''(a)}_{\text{zůstane } 2a_2} = f''(a)$, proto $2a_2 = f''(a)$, $a_2 = \frac{1}{2}f''(a) = \frac{1}{2!}f''(a)$

...

k-tá derivace: $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$

$$\underbrace{(k.(k-1)\ldots.2.1)}_{k!}.a_k = f^{(k)}(a), \quad \boxed{a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(a)}$$

$\boxed{k = 0,1,\ldots,n}$

Př: Určete $T_2(f; x_0; x-x_0)$ pro funkci $f(x)=e^{\cos x}$ a bod $x_0=0$.

Řešení:

v $x_0=0$:

$f(x)=e^{\cos x}$; $f(0)=e^1=e$

$f'(x)=-\sin x\cdot e^{\cos x}$; $f'(0)=-0\cdot e^1=0$

$f''(x)=-\cos x\cdot e^{\cos x}+\sin^2 x\cdot e^{\cos x}$; $f''(0)=-1\cdot e^1+0=-e$

doporučuji úpravu výpočtu takto:

	v $x_0=0$:
$f(x)=\dots$	$=e$
$f'(x)=\dots$	$=0$
$f''(x)=\dots$	$=-e$

Odpověď:

$$T_2(f; x_0=0; x-0)=\underbrace{e}_{\frac{1}{0!}}\underbrace{\quad}_{+0\cdot(x-0)^1}-\frac{e}{2}x^2.$$

SAMI: $T_3(f; 0; x)=\dots$

Př. Určete $T_3(f; x_0; x-x_0)$ pro $f(x)=\ln(2-3x)$, $x_0=-1$.

Řešení:

$\boxed{\text{v } x_0=-1:}$

$f(x)=\ln(2-3x)$ $\quad = \ln 5$

$f'(x)=-\dfrac{3}{2-3x}$ $\quad = -\dfrac{3}{5}$

složená fce, $h(y)=\ln y$, $h'(y)=\dfrac{1}{y}$,
vnitřní: $g(x)=2-3x$, $g'(x)=-3$

$f''(x)=\dots=-\dfrac{3^2}{(2-3x)^2}$ $\quad =-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

SAMI, úprava neupravovat!
SKRIPTA! JE TAM ZÁKONITOST!

$f'''(x)=\dots=-\dfrac{3^3\cdot 2}{(2-3x)^3}$ $\quad =-\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\cdot 2$

$$T_3=\ln 5-\frac{3}{5}(x+1)^1-\underbrace{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2(x+1)^2-\underbrace{\frac{2}{3!}}\left(\frac{3}{5}\right)^3(x+1)^3$$

zde lze psát: $\dfrac{(2-1)!}{2!}$

$\dfrac{(3-1)!}{3!}=\dfrac{2}{3\cdot 2}=\dfrac{1}{3}$

Ve skriptech je tvar pro $T_n(f; x_0; x-x_0)$. (poučné)

$$T_3=\ln 5-\frac{3}{5}(x+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^2(x+1)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^3(x+1)^3.$$

Speciální případ, kdy $x_0 = 0$, má název

Maclaurinův polynom.

ČV Určete Maclaurinův polynom pro funkce:

(a) $f(x)=\sqrt{x+1}$, bod $x_0=0$, řád $n=3$.

(b) $f(x)=xe^x$, bod $x_0=0$, řád 4 (nebo n lib.)

TAYLOROVA VĚTA.

Taylorův polynom se v okolí bodu x_0 od původní funkce „o něco liší", rozdíl $f(x)-T_n(x)=\boxed{R_n(x)}$ je funkce, kterou nazýváme ZBYTEK ŘÁDU n. Tento zbytek se dá ODHADNOUT, my ho zapíšeme v tzv. LAGRANGEOVĚ tvaru.

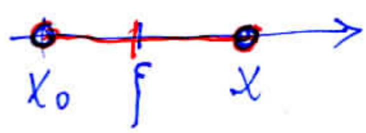
Věta (TAYLOR) Má-li funkce f v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$, pak pro body $x \in U(x_0)$ v okolí platí: $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$, kde zbytek můžeme zapsat ve tvaru

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

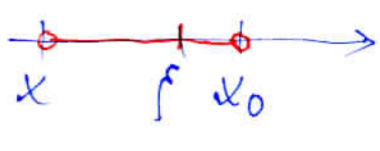
kde bod $\underbrace{\xi = x_0+t(x-x_0) \text{ pro } t\in(0,1)}$.

to znamená: ξ patří intervalu s krajními body x a x_0;

pokud $x_0 < x$:



pokud $x < x_0$: (na to se ve skriptech zapomnělo)



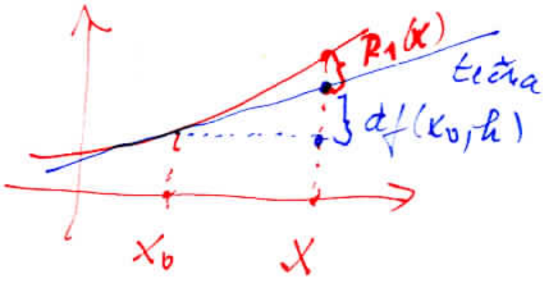
Připomeňme, že s 1. zbytkem jsme se už vlastně setkali, byla to vlastně "chyba", které jsme se dopustili při nahrazování skutečného přírůstku funkce přírůstkem na tečně, tedy při výkladu DIFERENCIÁLU:

psali jsme $f(x) \doteq f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}(x-x_0)$,

pokud $f'(x_0) \neq 0$,
aproximujeme fci f lokálně FUNKCÍ LINEÁRNÍ = polynomem 1. stupně

můžeme nyní zapsat rovnost:

$$f(x) = f(x_0) + \boxed{f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\text{ozn. } h}} + \underbrace{R_1(x)}_{\text{1. zbytek, "chyba"}}$$



$$\| \qquad f'(x_0)h = df(x_0,h) \quad \text{1. diferenciál}$$

Platí: $\lim\limits_{x\to x_0} R_1(x) = 0$,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$$

ZNAMENÁ: "chyba jde k nule rychleji než přírůstek $(x-x_0)$ nezávislé proměnné"!

POZN. V počítačové grafice se užívá jinak konstruovaných polynomů na aproximaci funkce.

K názvu (něco z historie).

Polynomy můžeme brát jako několik prvních členů tzv. mocninné řady (prostě pokračujeme pořád dál, pro každé $n \in \mathbb{N}$). Metoda aproximace funkce mocninnou řadou byla objevena v r. 1671 Jamesem Gregorym. Výsledek publikoval později, v r. 1712, Brook TAYLOR, anglický matematik (Wikipedia, TAYLOROVA ŘADA).

Pro n-tý zbytek se dá dokázat: označme-li $h = x - x_0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x) - T_n(f, x_0, h)}{|h|^n} = 0, \text{ tj. } \lim_{h \to 0} \frac{R_n(f, x_0, h)}{|h|^n} = 0.$$

(Pro $h \to 0$, R_n konverguje k 0 RYCHLEJI než n-tá mocnina přírůstku nezávislé proměnné).