DERIVOVÁNÍ SLOŽENÉ FUNKCE

Pro derivování funkcí složených se dá odvodit toto pravidlo: máme funkci (vnější) $f(y)$;
máme funkci (vnitřní) $g(x)$, bod, ve kterém je definována: $x_0 \in D(g)$, a VÍME, že g má v x_0 derivaci:
existuje $g'(x_0)$; označme $g(x_0) = y_0$.

Jestliže EXISTUJE derivace vnější funkce $f(y)$ v b. y_0,
existuje $f'(y_0)$,
pak platí:

$$(f \circ g)'(x_0) = (f(g))'(x_0) = f'(y_0) \cdot g'(x_0)$$
$$= f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

zderivuji vnější funkci a spočítám hodnotu její derivace v bodě $y_0 = g(x_0)$ (do kterého se x_0 zobrazí při g), toto číslo NÁSOBÍM derivací VNITŘNÍ funkce v b. x_0.
často užijeme VÍCEKRÁT PO SOBĚ.

Př. $(\ln(x^3))' = \frac{1}{x^3} \cdot 3x^2 = \frac{3}{x}$ platí pro $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$f(y) = \ln y$, $f'(y) = \frac{1}{y}$ vnější fce, $D(f) = (0, \infty)$
$D(f') = (0, \infty)$
$g(x) = x^3$, $g'(x) = 3x^2$
ex. derivace pro lib. $x \in \mathbb{R}$; potřebuji $3x^2 \in D(f')$!
$3x^2 \in D(f') \Leftrightarrow x \neq 0$

Př. $(\sqrt{2x-1})' = ((2x-1)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ $\quad \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$

$(2x-1)' = 2$; $(\sqrt{y})' = (y^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} y^{(-1+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\quad (x^k)' = k\,x^{k-1} = k\,x^{-1+k}$

$g(x) = 2x-1$ vnitřní; $f(y) = \sqrt{y}$ vnější fce

Př. Určete derivaci funkce $F(x) = e^{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}$.

Označme si: $f(u) = e^u$; $u \in \mathbb{R}$

$h(w) = w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{w}$; $w \in \langle 0, \infty)$ exponent

$g(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - x^{-1}$; je lepší na derivování

zadaná funkce vzniká postupně jako složení:

$$F(x) = f(h(g(x))),$$

užitím pravidla o derivování složených funkcí:

$$F'(x) = f'(h(g(x))) \cdot h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$(e^u)' = e^u$, $(\sqrt{w})' = (w^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{x-1}{x}\right)' = (1 - x^{-1})' = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ $-(-\;)$

Bude: $F'(x) = e^{\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x}}} \cdot \frac{1}{x^2}$.

Př. $(\sin(x^2+1))' = 2x \cos(x^2+1)$;

$(x^2+1)' = 2x$; $(\sin x)' = \cos x$;

$g'(x)$ $\quad f'(x)$

$\boxed{\text{D.CV.}}$ určete $f'(x)$ pro funkci $f(x) = e^{-x} \cdot \sqrt{x-e}$.

(Komu by to nešlo, pusťte si soubor o derivování na stránkách dr. J. Bulantové;) ☺ př. 10.

DOPORUČUJI PŘEPOČÍTAT SI VŠECHNA CVIČENÍ V KAPITOLE 3, řešená i neřešená, postupně. Na konci skript je KLÍČ a VÝSLEDKY. Podobné úlohy musíte řešit u zkoušky.

O DERIVOVÁNÍ INVERZNÍ FUNKCE

slouží např. pro odvození vztahů pro derivaci funkcí cyklometrických (inverzních k základním goniometrickým funkcím).

Vycházíme z funkce f, o které víme, že

- f je spojitá na jistém otevřeném intervalu $J = (a, b) \subset \mathbb{R}$
- f je na J RYZE MONOTÓNNÍ (T vosl. kus.)
- f má v bodě y_0 z J derivaci, a ta je nenulová!: $f'(y_0) \neq 0$. výraz půjde do jmenovatele zl.

Potom má inverzní funkce f^{-1} derivaci v bodě
$$x_0 = f(y_0)$$
a platí:
$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$$
převrácená hodnota (čísla)

Př. $f(x) = x^3$; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, existuje $f'(y_0) = 3y_0^2$ pro lib. $y_0 \in \mathbb{R}$, a je $f'(y_0) \neq 0$ pro vš. $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Zvolme $y_0 = 2$: $f'(2) = 3.2^2 = 12$, $f(2) = 2^3 = 8 = x_0$. | Tedy $(f^{-1})'(8) = \frac{1}{12}$.
MŮŽE SE NĚKDY HODIT.

Př. Určete $(\arcsin x)'$. ~~[illegible]~~

$y = \arcsin x \iff \sin y = x$ pro $y \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$;
$D(\arcsin x) = \langle -1, 1 \rangle$, ale MEZE VYNECHÁME

OVĚŘÍME PŘEDPOKLADY: $f(y) = \sin y / J$ na $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$:

- SPOJITÁ
- ROSTOUCÍ $\Rightarrow$ ryze monot.
- pro každé $x_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $(\sin y)' = \cos y > 0$ na J, $\neq 0$ na J.

MŮŽEME TEDY PRAVIDLO POUŽÍT,
a to pro všechna $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = J$.
(ve větě je y_0 pevné)

Počítání: pro všechna $x \in (-1,1)$

$$\underbrace{(\arcsin x)'}_{f^{-1}} = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} =$$

goniometr. vztahy:

$\cos^2 y + \sin^2 y = 1,$

$\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$

$|\cos y| = \sqrt{1-\sin^2 y}$

VÍME: $\cos y > 0$ na $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \qquad y = \arcsin x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin x))^2}} =$$

VÍME: $\sin(\arcsin x) = x$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

vynechali jsme meze $-1, 1$, krajní body intervalu; ty odpovídají bodům $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$, tedy nejsou splněny předpoklady (byly by tam nulový kořeny $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 = \cos\frac{\pi}{2}$, nemůže stát ve jmenovateli zlomku)

DOKÁZALI JSME TEDY JEDEN VZOREC Z TABULKY DERIVACÍ ELEM. FCÍ:

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1)}$$

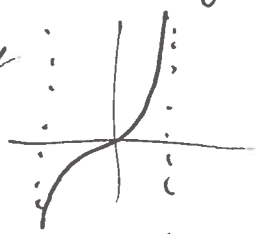
PAMATOVAT SI

PODOBNĚ SAMI:

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1,1)}$$

Př. Určete $(\operatorname{arctg} x)'$!

$\overset{f^{-1}}{\operatorname{arctg} x}$ je fce spojitá v $(-\infty, \infty)$, k ní inverzní funkce je $\operatorname{tg} y$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = J$, $y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y$:



f ... je tam
- SPOJITÁ
- ROSTE $\Rightarrow$ ryze monot.
- na J ex. $(\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, $\boxed{\neq 0}$, předpoklady SPLNĚNY.

přeznačení nezávisle proměnnou

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{\cos^2 y}{1} = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} =$$

TRIK, upravíme; TRIK, čit. i jmen. vytkneme $\cos^2 y$

$$= \underbrace{\frac{\cos^2 y}{\cos^2 y}}_{=1} \cdot \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$

ZAPAMATOVAT:

$$\boxed{(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}; \quad x \in \mathbb{R}.}$$

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ.

Zjistíme-li, že aspoň na části $M \subset D(f)$ svého definičního oboru má fce f KONEČNOU DERIVACI $f'(x) \in \mathbb{R}$, $x \in M$, můžeme se ptát, zda ve VNITŘNÍM bodě $x_0 \in M$ množiny M má tato derivace f' opět svoji derivaci, tj. zda existuje

funkce $f'(x)$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0};$$

pokud tomu tak JE, mluvíme o DRUHÉ DERIVACI $f''(x_0)$ v b. x_0. Můžeme dál postupovat ITERACÍ (opakováním postupu):

Je-li $f''(x)$ definována na $M' \subset D(f')$, a ve vnitřním bodě $\tilde{x}_0 \in M'$ existuje derivace $(f'')'(\tilde{x}_0)$ (tedy LIMITA...) označíme ji $f'''(\tilde{x}_0)$ ... Pro obecné přiroz. č. $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$$

Zavádíme ještě „pro pořádek" $f^{(0)}(x) = f(x)$.
nultá derivace = fce původní

některé funkce (polynomy, sinus, kosinus) mají derivaci všech řádů.

JEDINÉ FUNKCE s vlastn. $f'(x) = f(x)$

$$\boxed{\begin{aligned} (e^x)' &= e^x \\ (e^x)^{(n)} &= e^x \\ (ke^x)^{(n)} &= ke^x,\ k \in \end{aligned}}$$

$\boxed{\text{Př.}}$

$f: y = \cos x$

$f'(x) = -\sin x$

$f''(x) = (\cos x)'' = -\cos x$

$f'''(x) = \sin x$

$f^{(IV)}(x) = \cos x$

.....

$f: y = \sin x$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)''' = (\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x$

$(\sin x)^{(IV)} = \dots = (-\cos x)' = \sin x$

Př: $(\ln x)' = \frac{1}{x} = x^{-1}$; $x \in (0, \infty)$

$(\ln x)'' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$(\ln x)''' = (-x^{-2})' = 2x^{-3}$ ← $-(-2)$

atd.

($x \in (0,\infty)$ i pro derivace)

$g(x) = \sin 3x$ (složená)

$g'(x) = 3\cos 3x$

$g''(x) = -9 \sin 3x$

$g'''(x) = -27 \cos 3x$

$g^{IV}(x) =$ SAMI

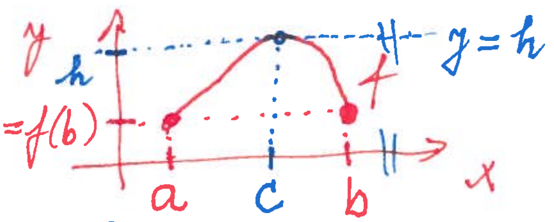
DERIVOVÁNÍ FUNKCÍ užijeme při:

- hledání průběhu funkce (roste ↗, klesá ↘, je ∩, konvexní ∪ ...)
- zavedení DIFERENCIÁLU funkce, užívaného v technické praxi $df(x_0, h)$
- konstrukci TAYLOROVA POLYNOMU funkce (přibližně nahradí průběh fce na okolí bodu)

.....

NĚKTERÉ VLASTNOSTI FUNKCÍ SPOJITÝCH NA INTERVALU.

ROLLEOVA VĚTA



Je-li f funkce SPOJITÁ na $\langle a, b \rangle$

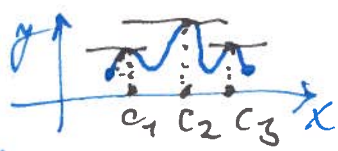
znamená: f spojitá na (a,b), f spojitá zprava v a, f spojitá zleva v b } současně

a platí:

- $f(a) = f(b)$
- f má DERIVACI v otevř. int. (a,b),

Potom EXISTUJE bod $c \in (a,b)$ (uvnitř int.) takový, že platí

aspoň jeden, možná víc:



$$\boxed{f'(c) = 0}$$

CO TO ZNAMENÁ GEOMETRICKY? tečna ke grafu fce f je rovnoběžná s osou x, tedy má rovnici $y = h$, $h \in \mathbb{R}$, $y = \text{konst.}$

LAGRANGEOVA VĚTA (o přírůstku funkce)

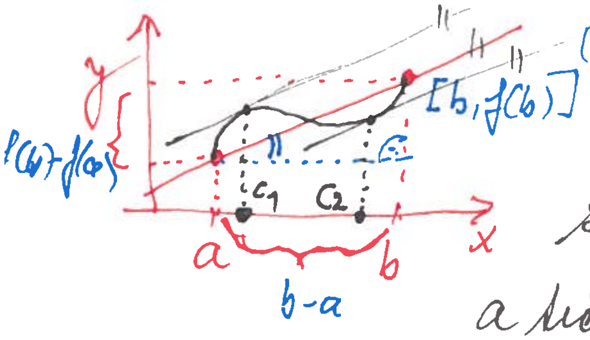
Když funkce f je SPOJITÁ na uzavřeném int. $\langle a,b\rangle$
a f má DERIVACI v otevřeném (a,b),
potom EXISTUJE bod $c \in (a,b)$ takový, že

$$\boxed{f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a).}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists c: \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ .... směrnice tečny grafu v b. c

(může jich být víc)



GEOMETRICKY:
spojnice bodů grafu $[a, f(a)]$ a $[b, f(b)]$
a tečna grafu v bodě $[c, f(c)]$ jsou ROVNOBĚŽNÉ
PŘÍMKY

Některé obrázky paměti najdete ve skriptu.

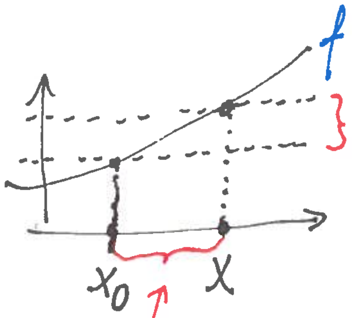
Př. Určete $(\mathrm{tg}\,x)''$.

Je $(\mathrm{tg}\,x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, jak najdete v tabulce derivací,
pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \text{ celé č.}\}$ ↳ to jsme neodvozovali.

Dále $(\mathrm{tg}\,x)'' = (\underbrace{\cos^{-2}(x)}_{\text{fce složená}})' = -2\cos^{-3}(x)\cdot(-\sin x) =$

$$= 2\,\frac{\sin x}{\cos^3(x)}.$$

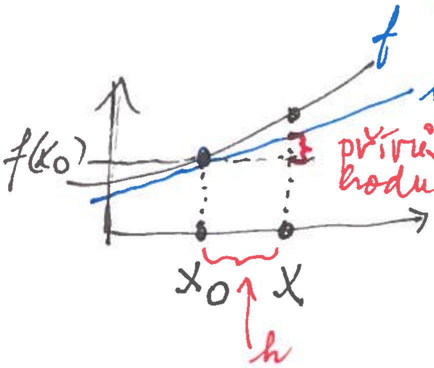
DIFERENCIÁL FUNKCE (1. diferenciál)



$\} \; f(x)-f(x_0)$ přírůstek funkčních hodnot

$x - x_0 = h$

(přírůstek nezávisle proměnné)



tečna v b. $[x_0, f(x_0)]$

přírůstek JENOM k TEČNĚ hodnot

$$\underbrace{f'(x_0)(x-x_0) = f'(x_0)\cdot h}$$

OZN. $d(f_0, h)$, 1. diferenciál v b. x_0 pro přírůstek h nezávisle prom.

Pro funkci f, která $\boxed{\text{má v b. } x_0 \text{ vlastní derivaci } f'(x_0)}$, můžeme udělat následující odhad. Je

$$\underbrace{f'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

užijeme ε–δ definici limity funkce

hodnota limity $\longleftarrow$ (čteme odprava)

proto pro lib. pevně zvolené $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že
(jedno zvolíme)

v prstencovém okolí $P(x_0, \delta)$ bude splněno

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \underbrace{f'(x_0)}_{\text{limitní bod}} \right| < \varepsilon;$$

protože ε lze volit MALÉ, máme v okolí $P(x_0,\delta)$:

$$f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0).$$

PŘIBLIŽNĚ

NEBO: $\underbrace{f(x)-f(x_0)} \doteq f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{h} = f'(x_0)\,h = \boxed{d(f_0,h)}$

skutečný přírůstek funkčních hodnoty přibližně nahradíme přírůstkem funkčních hodnot NA TEČNĚ.

TEČNA: rov. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$

DEF. Má-li funkce f v b. x_0 derivaci (vlastní), pak výraz

$$df(x_0;h) = \overbrace{f'(x_0)}^{\text{číslo}}h$$ ... výraz lineární v h

nazveme diferenciálem fce f v b. x_0 pro přírůstek h nezávislé proměnné.

Př. Vypočtěte $df(0;h)$ pro funkci $f = e^x \cdot \cos 3x$.

Určíme: $f'(x) = e^x \cdot \cos 3x - 3e^x \cdot \sin 3x$; přírůstek h je zatím libovolný, bod $x_0 = 0$, dosadíme:

$$f'(x_0) = f'(0) = \underbrace{e^0}_{1} \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} - 3\underbrace{e^0}_{1} \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} = 1 - 0 = \boxed{1}.$$

Odpověď:

$$df(0;h) = \underbrace{h}_{1 \cdot h}.$$

užití: odhad chyby (absolutní, relativní) při výpočtech založených na měření zatížených chybou měření (v určitých mezích).

Př. Pro funkci $f = x^3$ určete 1. diferenciál $df(x_0, h)$.

může být: objem V krychle o hraně $a = x$.

Stanovíme derivaci $f'(x) = 3x^2$, spočtáme ji v daném „bodě":

$$f'(x_0) = 3x_0^2, \text{ najdeme diferenciál:}$$

$$\boxed{df(x_0,h) = 3x_0^2 h.}$$

Speciálně pro $x_0 = 1$: $df(1,h) = \underline{3h}$

$x_0 = 2$: $df(2,h) = 3 \cdot 2^2 h = \underline{12h}$.

často se berou „MALÁ" h, např. $|h| = 2 \cdot 10^{-4}$ [m] apod.

A teď zkusme udělat předchozí příklad "aplikovaněji", ukážeme, jak se v praxi odhadují chyby.

Př. Určete absolutní a relativní chybu, která vznikne při výpočtu OBJEMU V krychle z naměření DÉLKY HRANY krychle

$$a_0 = 2\,m,$$

jestliže víte, že měření je zatíženo $\underbrace{\text{chybou, která NEPŘEVYŠUJE}}_{\text{ozn. } h}$ 0,2 mm.

Absolutní chybu odhadneme absolutní hodnotou diferenciálu:

$$|\Delta V| \doteq |dV(a_0,h)|$$

Víme: $V = a^3$ (a je hrana), $a_0 = 2$ [m], $V(a_0) = 2^3 = 8$,

$$|h| \overset{(\le)}{=} 2\cdot 10^{-4} \text{ [m]}$$

$$|dV(a_0,h)| = |V'(a_0)\cdot h| = |\underbrace{3a_0^2}_{3\cdot 2^2}\cdot h| = 12\cdot 2\cdot 10^{-4},$$

tedy $|dV(a_0,h)| = 0{,}0024$ [m³] je chyba, které se můžeme při výpočtu objemu dopustit.

Relativní chybu odhadneme jako absolutní hodnotu podílu absolutní chyby ku objemu:

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| \doteq \frac{|dV|}{V} = \frac{24\cdot 10^{-4}}{8} = 3\cdot 10^{-4} = 0{,}0003.$$

DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ.

Pro funkci f, která má v bodě x_0 derivaci $f^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}$

n-tá derivace   vlastní $n \in \mathbb{N}$

zavádíme

n-tý diferenciál funkce f v b. x_0

jako funkci

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n \; ; \; h \in \mathbb{R}$$

Můžeme zavést n-tý diferenciál na množině $M \subset D(f)$:

Jestliže existuje n-tá derivace $\underbrace{f^{(n)}(x)}_{\text{vlastní}}$ pro $\overbrace{x}^{\text{každé}} \in M \subset D(f)$,

pak

$$d^n f(x, h) = f^{(n)}(x) \cdot h^n, \quad x \in M, \; h \in \mathbb{R}$$

je diferenciál n-tého řádu funkce f, je definovaný na kartézském součinu $M \times \mathbb{R}$, je to funkce DVOU PROMĚNNÝCH x a h, $(x, h) \in M \times \mathbb{R}$.

Pokud je h pevné zadané (dané), stačí psát $d^n f(x_0)$.

Př. Určete $d^2 f(0, h)$ pro funkci $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Máme tedy zadáno $x_0 = 0$, h libovolné. Máme určit $f''(x)$:

$$f'(x) = (\underbrace{(\cos x)^{-1}}_{\text{složená fce}})' = \frac{-\sin x}{-\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x \cdot (\cos x)^{-2}$$

$df(0,h) = 0$

složená fce, $(u^{-1})' = -u^{-2}$ je derivace vnější fce

$(\cos x)' = -\sin x$ je derivace vnitřní fce

Můžeš VYBRAT, jestli to budu dále derivovat jako podíl / součin fcí

Derivuji jako součin:

$$f''(x) = \left(\sin x \cdot (\cos x)^{-2}\right)' = \cos x \cdot (\cos x)^{-2} + \sin x \cdot (-2) \cdot$$

$$\cdot \cos^{-3}(x) \cdot (-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{\cos x} + \frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x},$$

$$f''(0) = \frac{1}{\cos 0} + \frac{2 \cdot \sin^2(0)}{\cos^3(0)} = 1 + 0 = \underline{1}, \quad \boxed{d^2 f(0,h) = \underline{\underline{h^2}}}$$

$\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$ koef. 1 nepíšeme

JAKO PODÍL:

−(−) dá +

$$f''(x) = \Big(\underbrace{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}_{f'(x)}\Big)' = \frac{\cos x \cdot \cos^2 x - \sin x \cdot (2\cos x \cdot (-\sin x))}{\cos^4 x} =$$

VYTKNU $\cos x$, pak krátím

$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos^3 x} \quad \left(= \frac{1 + \sin^2 x}{\cos^3 x} \right), \quad f''(0) = \frac{1+0}{1} = $$

Př. Urečte $d^3 f(x_0, h)$ pro funkci $f(x) = x^3$ (vč. jsme počítali 1. diferenciál), $d^2 f(x_0, h)$.

$f'(x) = 3x^2$ (bylo: $df(x_0,h) = 3x_0^2 \cdot h$)

$f''(x) = 6x$ $d^2 f(x_0, h) = 6x_0 h$, $\boxed{x_0 = 1}: d^2 f(1,h) = 6h$, $\boxed{x_0 = 2}: d^2 f(2,h) = 12h$

$f'''(x) = 6$

$d^3 f(x_0, h) = 6h$ (bez ohledu na x_0),

(Co další, vyšší diferenciály? Protože $f^{(IV)}(x) = 0, \dots$, budou nulové)