K videu ze 3. týdne. Racionální funkce. Poznámky

- V úloze "Určete znaménko racionální funkce" je obrázek dobrý, na konci stránky mělo být napsáno:

  zn R je kladné na $(-\infty, -\frac{1}{2})$, na $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ a na $(3, \infty)$.

(Stejně tak v okomentovaných materiálech ke 3. přednášce).

- Pro racionální funkci, kterou jsme rozkládali v polynom a parciální zlomky, neumíme našimi prostředky určit znaménko polynomu v čitateli. Byla to funkce

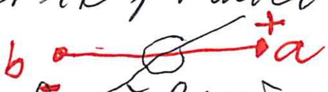
$$R(x) = \frac{x^4+3x^2-4x-2}{x^3-x};$$ v čitateli je polynom 4. st.

Zkusíme-li dosazovat dělitele absolutního členu $(\pm 1, \pm 2)$, třeba pomocí Hornerova schematu, zjistíme:

Pro $P_4(x) = x^4+3x^2-4x-2$, $P(1) = 1+3-4-2 \neq 0$,
$P(-1) = 1+3+4-2 \neq 0$,
(kořeny mohou být zlomky, nebo iracionální čísla). $P(2) = 16+12-8-2 \neq 0$,
$P(-2) = 16+12+8-2 \neq 0$.

NEMÁ CELOČÍSELNÉ KOŘENY.

Pro polynomy vyššího stupně neexistují algoritmus, jak je snadno stanovit pomocí (KOŘENY) koeficientů polynomu. V praxi se užívá přibližných a numerických metod (princip: jestliže v b. a je $P(a) > 0$ a v bodě b, $b < a$, je $P(b) < 0$, je kořen v (b, a).) TEDY:



průsečík grafu s osou x

NEUMÍME URČIT zn R.

Poznámka k tzv. Hornerovu schématu:

Hornerovo schéma je MNEMOTECHNICKÁ POMŮCKA, jak rychle zapsat a provést

- vydělení polynomu LINEÁRNÍM polynomem $(x-c)$, $c \in \mathbb{R}$.
- OVĚŘIT, zda $x_0 = c$ JE / NENÍ kořenem $P_n(x)$.
- SPOČÍTAT FUNKČNÍ HODNOTU $P_n(c)$.
- najít ROZKLAD $P_n(x)$, "když to dobře jde", tj. když se nám společně podařilo VYTIPOVAT všechny reálné kořeny; zjistíme "zbytek", který už reálný kořen nemá!

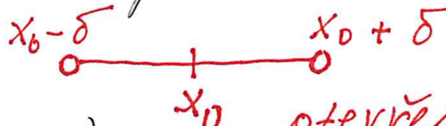
NEPOMŮŽE NÁM odhalit kořeny, pokud vhodný "TIP" nemáme předem.

POZN. Pro polynomy 3. stupně byla vypracována určitá metoda, jak kořeny hledat (tzv. CARDANOVY VZORCE, např. ve Wikipedii), pro polynomy vyšších stupňů se recept nebo návod dát NEDÁ (a užije se jiných numerických metod numerických) – můžete si sami najít.

Proč jsme se věnovali vysvětlení pojmu LIMITA POSLOUPNOSTI a učili se techniky, jak ji najít?
Pomocí posloupnosti zavedeme pojem

LIMITA FUNKCE

Úvodní část: Pojem limity funkce si přečtěte ve skriptech.
Připomeňme, že na začátku skripta je zavedeno toto označení: pro pevně vybraný bod $x_0 \in \mathbb{R}$ reálné osy a zvolené reálné číslo $\delta > 0$, "symetrický interval o středu v bodě x_0 a poloměru δ"



otevřený interval

$$(x_0-\delta,\ x_0+\delta) = U(x_0,\delta)$$

nazýváme: δ-okolí bodu x_0. (pro ty, kdo trochu znají němčinu (Umgebung))

Když z tohoto okolí vynechám právě jeho střed, dostanu tzv. prstencové δ-okolí bodu x_0:

$$U(x_0,\delta) - \{x_0\} = (x_0-\delta,\ x_0) \cup (x_0,\ x_0+\delta) = P(x_0,\delta)$$

nepočítám ho do prstencového okolí

DEFINICE (HEINEHO definice limity funkce)

Je-li $f: y = f(x)$ reálná funkce, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$ a platí

- funkce f je DEFINOVANÁ v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ ($\delta > 0$ teď není důležité zadat)
- pro každou posloupnost $(x_n) \subset P(x_0)$ bodů z prstencového okolí, pro kterou platí, že

$\mathbb{R}^*$ – ROZŠÍŘENÁ REÁLNÁ OSA

$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_n = x_0}$, existuje limita funkčních hodnot v bodech této posloupnosti

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.}$$

(vlastní nebo nevlastní, řídí se podle x_0) $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$

(vlastní / nevlastní podle b) $b \in \mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$

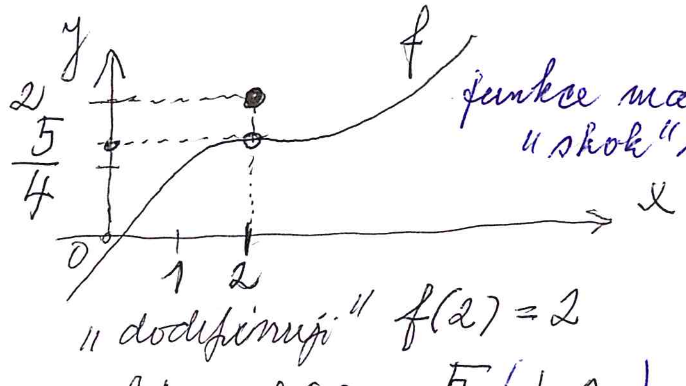
Potom řekneme, že **funkce f má v bodě x_0 za limitu číslo b.**

Píšeme:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = b.$$
„OBOUSTRANNÁ LIMITA"

Pozn. Ve skriptu někdy může být grafická chyba, budeme se to snažit uvést na pravou míru.

Ve skriptech máte půvabnější obrázky znázorňující několik funkcí, které v jistých bodech mají limity, i pár takových, které limitu nemají. Prohlédněte si je. FUNKCE MŮŽE MÍT V BODĚ NEJVÝŠE JEDNU LIMITU. 1 0

Př. Funkce může mít v bodě limitu a tato limita nemusí být rovna funkční hodnotě funkce v tom bodě; buď proto, že funkční hodnota je JINÁ, nebo proto, že tam funkce NENÍ DEFINOVANÁ!

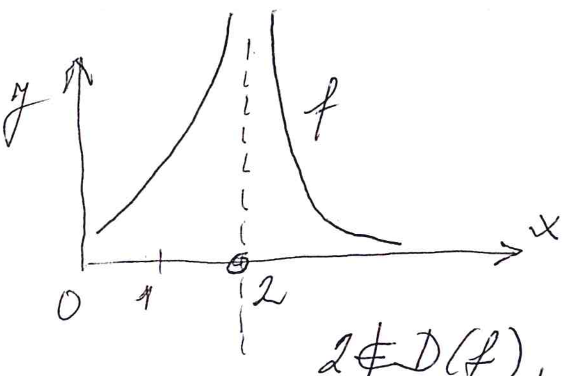


funkce má „skok" v $x_0=2$

„dodefinuji" $f(2)=2$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4} \ (\neq 2)$$

$x_0 = 2$: BOD NESPOJITOSTI



$2 \notin D(f)$,
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$$

V předchozích ukázkách jsme průběh grafu funkce v okolí bodu $x_0=2$ NEMOHLI NAKRESLIT JEDNÍM TAHEM, nemohli jsme „spojitě" pokračovat.

Pokud se to naopak podaří, umíme to hezky matematicky vyjádřit (a mluvíme o spojitosti v bodě).

SPOJITOST FUNKCE

DEFINICE Řekneme, že funkce f je SPOJITÁ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ (vlastním), jestliže

- f je definovaná v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0, x_0 tam PATŘÍ!
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ („limita v x_0 je rovna funkční hodnotě funkce v x_0")

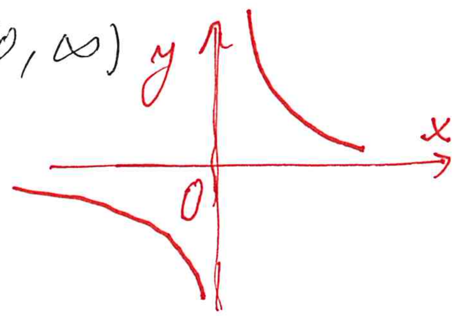
Pozn. Projděte si tzv. elementární funkce uvedené ve skriptu, připomeňte si jejich grafy: elementární funkce jsou spojité v každém bodě, který patří do definičního oboru!

Někdy potřebujeme pojem
- jednostranné limity v $x_0 \in \mathbb{R}$
- jednostranné spojitosti.

Př. Prozkoumejme chování funkce „nepřímá úměrnost"

$$f: \ y = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$$

v okolí bodu 0.



Uvažujme následující posloupnosti:

$(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ $\qquad$ $(\tilde{x}_n) = \left(-\frac{1}{n}\right)$

tedy $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

$$f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

$$\lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} -n = -\infty$$

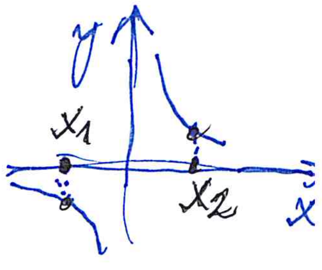
Pokud by funkce $y = \frac{1}{x}$ měla mít v $x_0 = 0$ limitu, musela by tato limita být JEDNOZNAČNĚ určena a byla by rovna limitě posloupnosti funkčních hodnot každé posloupnosti konvergující k $x_0 = 0$; my máme dvě posloupnosti „jdoucí k nule", funkční hodnoty jedné mají limitu ∞, funkční hodnoty druhé mají limitu $-\infty$.

Závěr: neexistuje oboustranná $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Pokud bychom se omezili na posloupnosti s prvky
- vpravo od počátku,
- vlevo od počátku,

můžeme něco rozumného říci.

Zkuste si rozmyslet: $\frac{1}{x}$ klesá v $(-\infty, 0)$;
$\frac{1}{x}$ klesá v $(0, \infty)$.



JE $y = \frac{1}{x}$ klesající funkce na CELÉM DEFINIČNÍM OBORU?

DEF. Řekneme, že prvek $b \in \mathbb{R}^*$ je LIMITOU ZLEVA funkce $f(x)$ v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ (zde bere VLASTNÍ BOD), jestliže

- f je definovaná v nějakém levém prstencovém okolí $P^-(x_0)$ bodu x_0 ($P^-(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0)$, tady nám na poloměru okolí $\delta > 0$ NEZÁLEŽÍ)

- pro každou posloupnost $(x_n) \subset P^-(x_0)$ bodů z tohoto okolí, která $\underbrace{\text{konverguje k b. } x_0}_{x_n \to x_0}$,

platí $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$.

obrazy členů posloupnosti při dané funkci f

společná hodnota

ZAPÍŠEME:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = b.}$$

Podobně se dá zavést limita v $x_0 \in \mathbb{R}$ ZPRAVA. Zkuste sami (záměnou $-, +$) a pak si to zkontrolujte se skripty, kde je uvedena.

(Stále uvažujeme $x_0 \in \mathbb{R}$, jednostranné limity nezavádíme v ∞, ani v $-\infty$)

Ráda bych ukázala, jak je to s chováním v okolí 0 a jednostrannými limitami v 0 pro funkci $y = \frac{1}{x}$. Mohu použít např. následující skutečnost.

VĚTA Je-li $x_0 \in \mathbb{R}^*$,

- existuje $P(x_0)$ – prstencové okolí – takové, že daná funkce f je na tomto okolí kladná (záporná):

  pro vš. $x \in P(x_0)$ $f(x) > 0$ $\quad$ ($f(x) < 0$)

- existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\quad$ LICENCE: $\left[\frac{1}{0+}\right] = \infty$

potom (existuje)

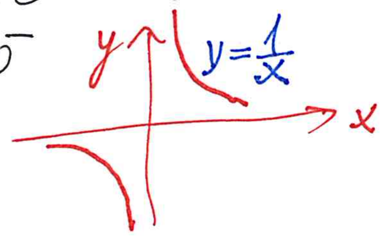
$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty}$$

LICENCE: $\left[\frac{1}{0-}\right] = -\infty$

$$\left(\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty \right)$$

POZN. ve VLASTNÍM bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ se dá tvrzení formulovat také pro JEDNOSTRANNÉ LIMITY

Př. ZVOLÍME nyní jako f funkci $f(x) = x$ a bod $x_0 = 0$. Pro (jakékoliv) levé prstencové okolí $(-\delta, 0)$ $-\delta \; x \; 0$ počátku ($x_0 = 0$) jistě platí $f(x) = x < 0$ kdykoliv $x \in (-\delta, 0) = P^-(0, \delta)$. Také platí $\lim\limits_{x \to 0^-} x = 0$. Podle naší věty tedy



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Podobně ukážeme (místo levého okolí 0 bereme pravé)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty.$$

JE PRAVDA, ŽE $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$?

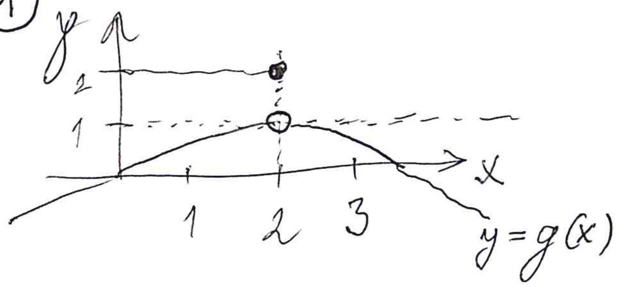
Podobně jako jsme zavedli limitu $\begin{cases}\text{zprava}\\ \text{zleva}\end{cases}$, můžeme zavést i SPOJITOST $\begin{cases}\text{ZPRAVA}\\ \text{ZLEVA}\end{cases}$ funkce f v b. x_0.

DEF Fce f je v x_0 spojitá zprava, jestliže

- f je definovaná v $U^+(x_0)$
- platí $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$.

Př. matematický zápiske, čemu se rovná limita zprava a zleva v čísle 2 funkce daná grafem na následujících obrázcích. Posuďte spojitost v 2.

(1)



Zřejmě platí

$$\lim_{x \to 2^+} g(x) = 1,$$

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 1;$$

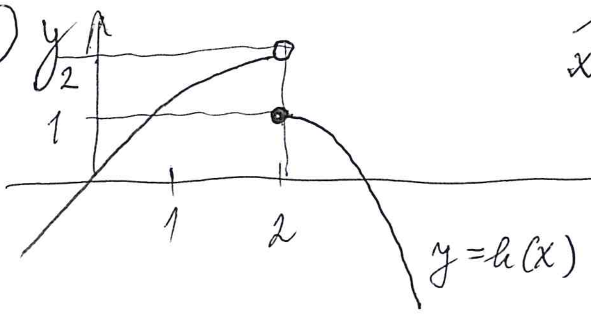
jestliže má funkce v 2 $\begin{cases}\text{limitu zleva}\\ \text{limitu zprava}\end{cases}$ a jsou sobě rovné, pak má fce v bodě 2 také oboustrannou limitu; $\boxed{\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1}$

(TO PLATÍ OBECNĚ:

ex. oboustranná lim $\Leftrightarrow$ ex. $\begin{cases}\text{zleva}\\ \text{zprava}\end{cases}$ a jsou stejné,

Povšimneme si ale, že funkční hodnota $g(2) = 2 \neq 1$

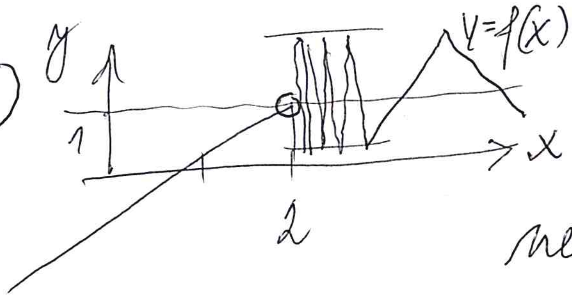
Funkce g NENÍ SPOJITÁ v bodě 2.

② 

$\lim_{x\to 2^+} h(x) = 1$, $\lim_{x\to 2^-} h(x) = 2 \neq 1$

h není v 2 spojitá, má tam "skok".

$h(2) = 2$, je tedy v 2 spojitá ZPRAVA

③ 

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$,

neexistuje $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (f "kmitá")

f NENÍ SPOJITÁ v b. 2.

SPOJITOST FCE NA INTERVALU

Funkce f je spojitá na:

- OTEVŘENÉM $\underbrace{\text{intervalu}}_{\text{v def. oboru}}$ $(a,b) \subseteq D(f)$,

  když je spojitá v KAŽDÉM bodě $x \in (a,b)$;

- UZAVŘENÉM intervalu $\langle a,b\rangle \subseteq D(f)$,

  když je
  - spojitá na (a,b)
  - spojitá v a zprava
  - spojitá v b zleva

  SOUČASNĚ

JINÝ ZPŮSOB ZAVEDENÍ LIMITY – CAUCHYOVA DEFINICE:
EKVIVALENTNÍ (také "ε-δ"- definice, často užívaná)

Funkce f má v b. $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu rovnu číslu $b \in \mathbb{R}$, když pro každé reál. č. $\varepsilon > 0$ existuje reál. č. $\delta > 0$ tak, že pro všechna $\underbrace{x \in (x_0-\delta, x_0+\delta),\ x \neq x_0}_{\Updownarrow\ 0<|x-x_0|<\delta}$ platí $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Zde δ závisí na volbě ε; $\delta(\varepsilon)$;

PRO SPOJITOST BUDE JEN $|x - x_0| < \delta$

ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI LIMITY FUNKCE

Pro počítání limit jsou užitečná pravidla plynoucí z podobných vlastností pro posloupnosti: součet, součin, podíl

Máme pevný bod $\boxed{x_0 \in \mathbb{R}^*}$ (vl. nebo nevl.) a uvažujeme jinou funkce, které jsou definovány na nějakém prstencovém okolí bodu x_0 (v samotném b. x_0 mohou/nemusí být definovány), ozn. $P(x_0)$.

VĚTA Jestliže (ex.) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$,

(ex.) $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$,

PRAVIDLA PRO LIM: $+$, $\cdot$, $\div$ — SKRIPTA

potom, pokud má pravá strana SMYSL, platí:

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = a + b$$

(limita součtu je součet limit, když se tam součet limit dá rozumně zapsat)

$$\lim_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = a \cdot b$$

(. . . součin . . .)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

zde „když se dá zapsat" obsahuje i to, že $b \neq 0$

(. . . podíl . . .)

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |a|$$

Pro VLASTNÍ b. $x_0 \in \mathbb{R}$ platí totéž i pro limity JEDNOSTRANNÉ $\lim\limits_{x \to x_0^+} \ldots$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \ldots$

POČÍTÁNÍ LIMIT

- Z HEINEHO DEFINICE limity (jde jen někdy)

$$\lim_{x\to 2} \underbrace{(x^3 - x + 6)}_{f(x)} = 12.$$

napíšeme výsledek

uvažujeme obecnou libovolnou posloupnost (x_n), která konverguje k číslu 2, tedy předpokládáme, že

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2.$$

Z vlastností limit posloupností odvodíme:

$$\boxed{\text{při } n\to\infty} \quad \underbrace{x_n^3 - x_n + 6}_{f(x_n)} \longrightarrow \underbrace{2^3}_{8} - 2 + 6 = 12,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 12.$$

- Užitím pravidel o součtu / součinu / podílu limit a "triků" známých z limit posloupností.

$$\lim_{x\to -\infty} (x^3 - x + 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = (-\infty)\cdot 1 = -\infty.$$

$$x^3 \to -\infty,\quad \underbrace{1 \to 1,\quad \frac{1}{x^2} \to 0,\quad \frac{2}{x^3} \to 0}_{\to 1}$$

CV Pro stejnou funkci $f(x) = x^3 - x + 2$ určete limitu pro $x \to \infty$. Zapište.

Mnoho dalších příkladů najdete ve skriptech.

POČÍTÁNÍ LIMITY FUNKCE – TRIKY

Neexistuje obecný návod, který by vedl na výpočet libovolné limity, ale existují okruhy příkladů, kde se osvědčí určitý společný TRIK, úskok.

- Někdy se dá počítat přímo z definice:

Př. Určete
$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+x+2}{1-x^2} = \frac{4}{-3} = \boxed{-\frac{4}{3}}.$$

Beru posloupnost (x_n) s vlastností $x_n \to -2$, jinak libovolnou. Tak: $x_n^2 \to 4$, $x_n^2 + x_n \to 2$, $x_n^2 + x_n + 2 \to \boxed{4}$.
Tedy čitatel $\to 4$.

Dále $1 - x_n^2 \to \underbrace{1-4}_{-3}$; dostáváme zlomek $\frac{4}{-3}$.

- Pokud už VÍM, že daná funkce je SPOJITÁ (a to je známo pro polynomy a pro nám již známé elementární funkce), stačí počítat limitu v bodě jako funkční hodnotu.

Př. $\lim_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 0 = 0.$

- Někdy se osvědčí vytýkání ze zlomku, nebo vytknutí ze součtu, jako u posloupností:

Př.
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{3x^3 - x + 2}{2 + x - 4x^2} \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right)}{x^2\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 4\right)} = \text{(krátím)}$$

NEURČ.

$$= \lim_{x\to -\infty} \Bigg(\underset{(-\infty)}{x} \cdot \frac{\overset{\to 3}{3} - \overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}} + \overset{\to 0}{\frac{2}{x^3}}}{\underset{\to 0}{\frac{2}{x^2}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{x}} \underset{(-4)}{-4}}\Bigg) = (-\infty)\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{-4}\right)}_{\text{koef.} < 0} = \boxed{\infty}$$

D.CV. STEJNÁ FUNKCE, $x \to \infty$

- někdy se osvědčuje představit si limitovaný výraz jako zlomek se jmenovatelem 1 a rozšíření zlomku výrazem "sdruženým":

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}}{1} = [\infty-\infty] \;=$$

nepůjde přímo

použiji si ZLOMEK, se jmenovateli 1

v pomocném boku upravíme limitovaný výraz:

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x} \underset{\text{vhodně rozšířím}}{=} \frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}} =$$

$$\underset{\text{násobím v čitateli}}{=} \frac{(x^2+x+1)-(x^2-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}} \underset{\text{upravím čitatele}}{=}$$

$$= \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}, \text{ takto nově vyjádřím LIMITOU}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}} \underset{\text{vytknu}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}\cdot\left(\overset{\to 2}{2}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\underbrace{\sqrt{1+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x^2}}}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}_{\to 1}\right)} =$$

užijeme ve jmenovateli: v čit., ve jmen.

$$\sqrt{x^2} = |x| = x$$

protože $x\to\infty$, tedy $x>0$

$$= \boxed{1}$$

(mohlo být rozepsáno: $1\cdot\frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$)

Podobně se počítá: $[\infty-\infty]$

Př. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right)\left(\sqrt{(x+a)(x+b)}+x\right)}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} =$$

doplním

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+(a+b)x+ab-\cancel{x^2}}{\sqrt{(x+a)(x+b)}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left(a+b+\overset{\to 0}{\frac{ab}{x}}\right)}{x\cdot\left(\underbrace{\sqrt{\left(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{a}{x}}\right)\left(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{b}{x}}\right)}}_{\to 1}+\underset{\downarrow 1}{1}\right)} = \boxed{\frac{a+b}{2}}$$

1.

LIMITOVÁNÍ (A souvislost se SPOJITOSTÍ) SLOŽENÝCH FUNKCÍ

Často se setkáváme se složenými funkcemi a musíme si umět poradit s jejich limitami. Když máme funkce, třeba h, která vzniká složením "$f \circ g$":

VĚTA $h = f \circ g$, tedy $h(x) = f(g(x))$ ($D(h)$ najdeme), máme zadán bod $x_0 \in \mathbb{R}^*$, ve kterém nás limita zajímá (musíme ověřit jisté předpoklady) a $u_0 \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, a víme, že pro skládané funkce EXISTUJÍ LIMITY

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \quad \lim_{u \to u_0} f(u) = b,$$

"náš bod"

limita fce složené (v x_0)

argument vnější fce označíme jinak

potom můžeme tvrdit (dá se zapsat DŮKAZ):

- (LIM SLOŽ.) Jestliže NAVÍC existuje prstencové okolí $P(x_0)$ bodu x_0 takové, že

  podm. (*) $g(x) \neq u_0$ pro všechny body $P(x_0)$ (z tohoto okolí),

  pak je
  $$\lim_{x \to x_0} \boxed{\underbrace{f(g(x))}_{=h(x)} = b.}$$
  existuje, rovná se právě b.

- (O SPOJITOSTI f) Je-li fce f SPOJITÁ v b. u_0 ($\Leftrightarrow \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = b$), potom
  $$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(u_0) = b.$$

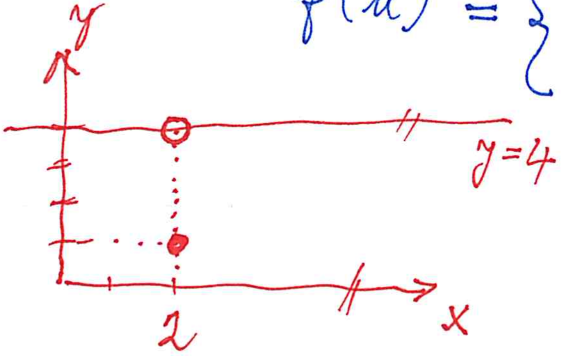
Pro spojitou f, FUNKČNÍ HODNOTU POČÍTÁM V LIMITĚ VNITŘNÍ FCE g

Proč musí být splněna podmínka (*)?

$$\text{tj: } \underbrace{g(x) \neq u_0}$$

Př. Jako vnější fci volím třeba:

$$f(u) = \begin{cases} 4 & \text{pro } u \neq 2,\ u \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{pro } u = 2. \end{cases}$$



Kdybych do ní vložila jako fci vnitřní konstantní funkci

$$g(x) = 2 \text{ pro vš. } x \in \mathbb{R},$$

vyšla by mi složená funkce $\underbrace{f(g(x))}_{h(x)} = 1$, tedy fce konstantní, a ta má limitu $h(x)$; $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 2} h(x) = \underline{1}.$$

Je $\lim_{x \to 2} g(x) = 1$, $u_0 = 1$; $\lim_{u \to u_0} f(u) = \lim_{u \to 1} f(u) = 4$

$\boxed{\text{kde } x_0 = 2}$

nedá se najít prstencové okolí $P(2)$ bodu $x_0 = 2$ tak, aby $g(x) \neq 1 (= u_0)$ na tomto okolí, TVRZENÍ by NEPLATILO $\left(\lim_{u \to u_0} f(u) = 4 \neq 1 = \lim_{x \to x_0} h(x) \right)$

$\boxed{b = 4}$

Pozn. Při spojité vnější funkci se tedy dá dokázat VLC.

Přečtěte si KOMENTÁŘ k naší "VĚTĚ", uvedený ve skriptech.

VNITŘNÍ FCE g nemusí být v b. x_0 definovaná (takže o spojitosti g v x_0 ani o spojitosti $h = f \circ g$ v x_0 NEHOVOŘÍME, Podívejte se na výpočet limit složených funkcí ve skriptu, tři příklady tam máte už řešené, další k procvičení.

Zkusíme:

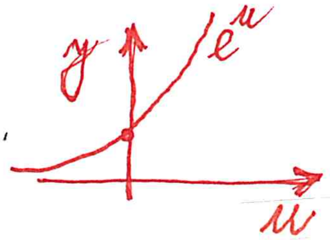
Př. $\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}}$. Za vnitřní funkci vezmeme

$$g(x)=\frac{x^2}{x-1}, \quad D(g)=\mathbb{R}\setminus\{1\} \text{ (g je rac. fce)}$$

(g je vlastně také složená, ale teď ji bereme jako celek)

Vnější funkce bude

$$f(u)=e^u, \quad D(f)=\mathbb{R}.$$



Pro vnitřní funkci počítejme:

$$\lim_{\substack{x\to-\infty \\ (x_0=-\infty)}} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1} \underset{\text{(vytknu)}}{=} \lim_{x\to-\infty} \overbrace{\frac{x}{x}}^{=1}\cdot\frac{\overset{\to-\infty}{x}}{\underbrace{1-\frac{1}{x}}_{\to 1}} = -\infty = u_0$$

($\frac{1}{x}\to 0$)

Ať volíme jakékoliv prstencové okolí b. $-\infty$,

$$P(u_0)=P(-\infty)=(-\infty, r); \text{ lib. } r\in\mathbb{R},$$

bude určitě splněna podmínka (*) : $g(x)\neq-\infty=u_0$.

Můžeme tedy užít 1. část naší "VĚTY":

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} f(g(x)) \overset{\text{ZDE}}{=} \underbrace{\lim_{u\to u_0} f(u)}_{\text{obecně}} = \underbrace{\lim_{u\to-\infty} e^u}_{\text{konkrétně}} = \boxed{0}.$$

2. část VĚTY se hodí např. v úloze (viz SKRIPTA):

Určete $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$; vnitřní funkce $g(x)=\frac{x+2}{x-1}$ $(x\neq1)$ není sice spojitá v ∞, ale má tam LIMITU: $\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{x-1} \underset{\text{SAMI}}{=\dots=} 1 = u_0$,

proto $\lim_{x\to\infty}\sqrt{g(x)} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} g(x)} = f(1)=\sqrt{1}=1.$

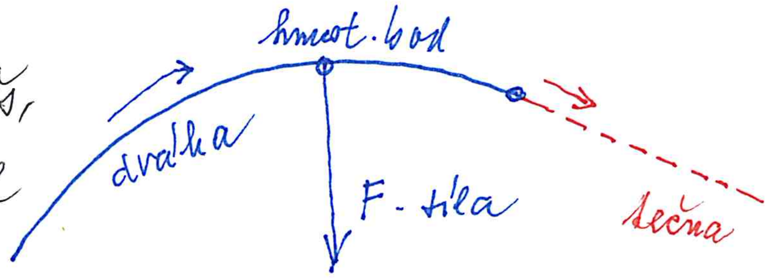
$f(u)=\sqrt{u}$ na $\langle 0,\infty)$ je spojitá

DERIVACE FUNKCE

Motivace (krátce ze SŠ)

Představme si pohybující se hmotný bod. Pokud na pohyb hmotného bodu působí síla a zakřivuje jeho dráhu, pro zjednodušení si představme jen pohyb v eukleidovské rovině, ne v prostoru, dráha je obecně nějaká křivka.

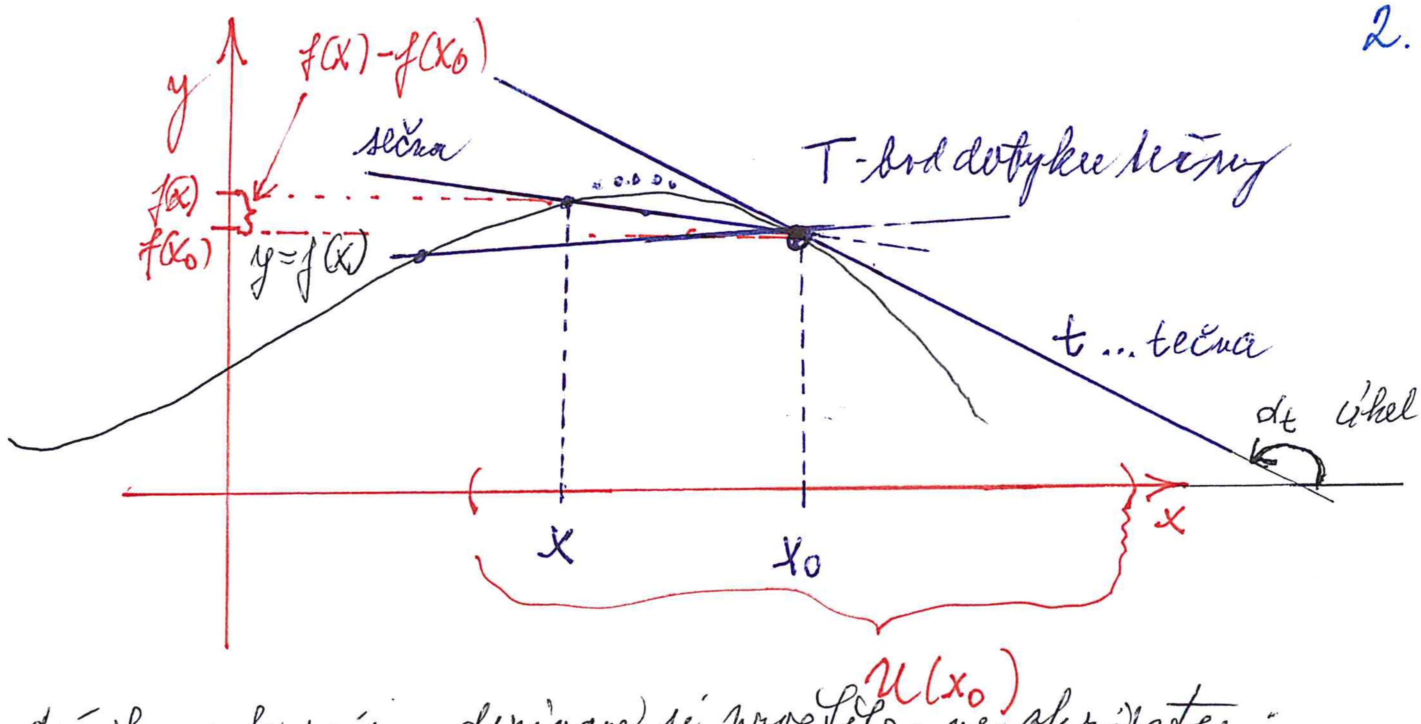
Ve chvíli, kdy síla působit přestane, např. se přetrhne závěs, hmotný bod se bude pohybovat po přímce, která je tečnou křivky (dráhy bodu, trajektorie).



Matematickým popisem této situace se postupně zabývala řada fyziků, např. I. Newton vytvořil "teorii fluxí", nebyla dotažena do konce, i když v řadě případů uměli spočítat výsledek. Korektní formulace a moderní popis situace se opírá o pojem LIMITY FUNKCE, kterou jsme zde zavedli za pomoci LIMITY POSLOUPNOSTI ("HEINE").

CO POTŘEBUJI NA TEČNU KŘIVKY = trajektorie:

- bod (to je ten, ve kterém to "pustila") - BOD DOTYKU
- další údaj o přímočaré dráze, např. SMĚRNICI TEČNY.



Úvodní slovo k pojmu derivace si přečtěte ve skriptech: je tam zmíněna klasická představa, že tečna ke grafu funkce v bodě dotyku T (ve skripta značen P_0) se dá chápat jako limitní poloha "posloupnosti sečen" jdoucích tímto bodem T, a posloupnost SMĚRNIC těchto sečen konverguje ke směrnici tečny t. Po této úvaze zavedeme:

DEF. Je-li $x_0 \in \mathbb{R}$ bod ("vlastní") a je-li f FUNKCE definovaná v nějakém OKOLÍ $U(x_0)$ bodu x_0, sestavme limitu

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}. \qquad \left(= f'(x_0)\right)$$

Geometricky: SMĚRNICE TEČNY

Když tato LIMITA EXISTUJE, říkneme, že je to DERIVACE fce f v BODĚ x_0, značme $f'(x_0)$.

limita $f'(x_0)$ může být
- vlastní: $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, f má v b. x_0 VLASTNÍ DERIVACI
- nevlastní: $f'(x_0) = \infty$, $f'(x_0) = -\infty$ } f má v x_0 NEVLASTNÍ derivaci

Když limita NEEXISTUJE: f NEMÁ v x_0 DERIVACI

FUNKCÍ, CO NEMAJÍ NĚKDE ([illegible]) DERIVACI, JE OPRAVDU HODNĚ...

Pozn. Porovnejte "náš" obrázek s obrázkem ve skriptu. Uvědomme si, že sice máme také $f(x) > f(x_0)$, náhodou, nemusí to tak být, ale máme x PŘED x_0; výrazy v čitateli a jmenovateli zlomku v definici limity tedy nemusejí nutně znamenat velikosti úseček.

Př. Zvolme funkci $f(x) = x^2$ a nějaké libovolné, pevné $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom

$$(x^2)'_{x=x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x+x_0)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Jestliže pro funkci f označíme jako M množinu

$$M = \{x \in \mathbb{R} : \text{existuje VLASTNÍ derivace v } x,\ f'(x) \in \mathbb{R}\}$$

těch bodů, ve kterých má f vlastní derivaci, pak můžeme uvažovat novou funkci f'

$$f' : x \longmapsto f'(x), \quad D(f') = M \ldots$$ DERIVACE FCE f NA MNOŽINĚ M

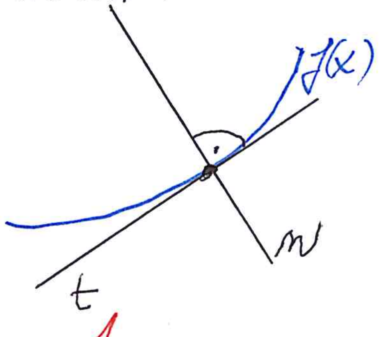
Př. $(x^2)' = 2x$; dá se ukázat, že $(x^n)' = n x^{n-1}$; až budeme vědět, že

① $(f+g)' = f' + g'$

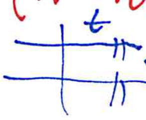
② $(\lambda f)' = \lambda f'$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

umožní nám to derivovat funkce polynomiální.

Rovnice TEČNY NORMÁLY ke grafu funkce f v bodě $[x_0, f(x_0)]$ je



$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ $\quad$ $n: y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$, když $f'(x_0) \neq 0$

když $f'(x_0) = 0$: 

$y = f(x_0)$ (n je "svislá")

PRAVIDLA PRO DERIVOVÁNÍ

(ve skriptech, NAUČIT SE)

bereme: bod $x_0 \in \mathbb{R}$, číslo $c \in \mathbb{R}$

Když EXISTUJÍ

$$f'(x_0),\ g'(x_0),$$

pak platí:

- $(cf)'(x_0) = c\,f'(x_0)$ derivace násobku fce = $\underbrace{\text{násobek}}_{\text{stejnou konstantou}}$ derivace v bodě
- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ derivace součtu = součet derivací, podobně pro rozdíl funkcí

pro součin dvou funkcí (v bodě) – DŮKAZ je ve skriptech:

- $(f \cdot g)'(x_0) = \underbrace{f'(x_0)\cdot g(x_0)}_{\text{derivace 1. fce v bodě násobená hodnotou druhé funkce v bodě}} \overset{\text{sčítá}}{\pm} \underbrace{f(x_0)\cdot g'(x_0)}_{\text{součin funkční hodnoty 1. fce a derivace 2. fce v daném bodě}}$

- pro podíl („když to jde")

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^{2}} \quad \text{pokud } g(x_0) \neq 0$$

SPECIELNĚ: $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$ $(g(x_0) \neq 0)$

Př. Pro $f(x) = 4x^5 + 2x^3 + \frac{1}{x}$, $f'(x) = 20x^4 + 6x - \frac{1}{x^2}$.

NAUČIT SE ZE SKRIPT: Tabulka derivací elementárních funkcí (i s definičními obory)

Můžeme zavést také

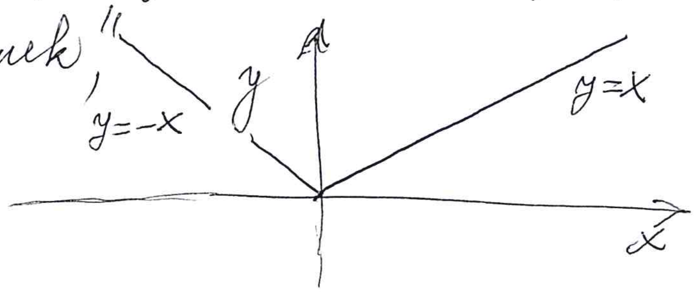
JEDNOSTRANNÉ DERIVACE $<$ ZPRAVA / ZLEVA funkce v bodě.

Jestliže existuje limita

$$\left(f'_+(x_0) \underset{\text{OZN}}{=}\right) \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$ nazýváme ji DERIVACÍ ZPRAVA fce f v b. x_0

$$\left(f'_-(x_0) \underset{\text{OZN}}{=}\right) \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$ DERIVACÍ ZLEVA

Př: Uvažujme funkci $f: y = |x|$, jejímž grafem je „sjednocení polopřímek", jdoucích počátkem,



mohu také psát:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \\ -x & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

GRAF FCE $|x|$ NEMÁ TEČNU v $x_0 = 0$.

Funkce f je SPOJITÁ v bodě $x_0 = 0$, existuje

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$

existuje

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1,$$ jsou různé.

Graf funkce $|x|$ má v počátku „polotečny", nemá tečnu.

SOUVISLOST DERIVACE A JEDNOSTRANNÝCH DERIVACÍ:

Funkce má v bodě derivaci $\Longleftrightarrow$ (právě tehdy, když) má v tom bodě derivaci zprava i zleva a platí jejich ROVNOST:

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

VĚTA Má-li funkce f v b. x_0 VLASTNÍ DERIVACI $f'(x_0)$, potom je f v x_0 SPOJITÁ!

VLASTNÍ DERIV. $\Rightarrow$ SPOJ.

DOKAŽME TO. Předpokládáme, že existuje

$$\lim_{x\to x_0} \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Máme dokázat, že $\lim\limits_{x\to x_0} \boxed{f(x)} = f(x_0)$ (existuje)

TO TAM MÁM

předtím LEVOU STRANU

TO MODRÉ TAM CHCI DOSTAT

Počítáme:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)\right) =$$

pravidla pro limity
- součet
- součin

TRIK: něco tam „vpašuji", napíšu se:

$$f(x) = f(x)-f(x_0)+f(x_0) =$$
$$= \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+f(x_0)$$

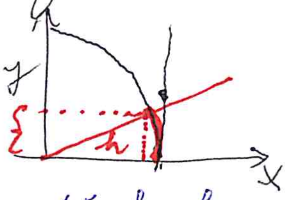
$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\text{z def. limity}}\cdot\lim_{x\to x_0}\underbrace{(x-x_0)}_{\to 0}+\lim_{x\to x_0} f(x_0) =$$

lim (konst) = konst

$$= f'(x_0)\cdot 0 + f(x_0) = f(x_0)$$; opravdu, limita funkce se v x_0 rovná její funkční hodnotě, tedy f je v x_0 spojitá!

Př. Pro funkci $f(x)=\sin x$
- nalezněte DERIVACI v lib. bodě $x_0\in\mathbb{R}$;
- rozhodněte o spojitosti v x_0.

Musíme znát goniometrické vzorce a předem od někud vědět, že $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1$. To se dá dokázat precizně, my tomu raději uvěříme, trochu pomůže obrázek.



h je velikost úhlu v obloukové míře $\sin h$

„pro malé úhly se to moc neliší!"

$\sin h < h$

Pochtanie:

$$(\sin x)'_{x=x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} \overset{\text{TRIK}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{2 \sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} =$$

do jmenovatele složeného zlomku

$$= \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}}_{=1} \cdot \lim_{x\to x_0} \cos\frac{x+x_0}{2} = \cos x_0 \in \mathbb{R}.$$

limita zaručena = ...

(ve skriptech je tisková chyba)

TEDY dáme ODPOVĚĎ: $(\sin x)' = \cos x$ (pro vš. $x\in\mathbb{R}$),

čímž je funkce spojitá v celém def. oboru $\mathbb{R}$.

POZN. někdy se užívá označení $x - x_0 = h$, tedy "nový" bod $x = x_0 + h$

↳ něco malého, o tolik bod x_0 posunu { vlevo ($h<0$) / vpravo ($h>0$) } po reálné ose.

Zápis derivace pak má tvar

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overbrace{x_0+h}^{\text{místo } x}) - f(x_0)}{\underbrace{h}_{\text{místo } (x-x_0)}}.$$

Znovu připomeneme u DIFERENCIÁLU.

Př. Ověřte, že $(\cos x)' = -\sin x$.

Užije se podobných prostředků jako v předchozím.

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-\sin x \sin h + \cos x \cos h - \cos x}{h} =$$

$$= \dots = \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{2}\sin(x+\frac{1}{2}h)\cdot \sin\frac{h}{2}}{\cancel{2}\cdot\frac{1}{2}h} = -\sin x.$$

$\to 1$

detaily nebudeme ukazovat, jelikož užije se mimo jiné:

$$\boxed{\sin^2\frac{h}{2} = \frac{1-\cos h}{2}}$$