Ke 3. přednášce 1.

RACIONÁLNÍ FUNKCE

je funkce tvaru $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$; $m = $ st P, $n = $ st Q.

jejím def. oborem je

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; Q_n(x) \neq 0\}$$

(stručně, $R = \frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$ je definovaná tam, kde je nenulový mnohočlen ve jmenovateli)

Když $m < n$: $R(x)$ je **ryzí** racionální funkce,

když $m \geqq n$: R je **neryzí** rac. fce.

Každá racionální funkce je buď – polynomem
nebo se dá zapsat jako SOUČET polynomu a RYZÍ racionální funkce.

Pro budoucí integraci je potřeba vědět:

RYZÍ racionální funkci mohu VŽDY (jednoznačně) zapsat ve tvaru SOUČTU tzv. PARCIÁLNÍCH ZLOMKŮ

(a ty se v LS budeme učit integrovat)

Př Racionální funkci R rozložte v součet polynomu a parciálních zlomků:

$$R(x) = \frac{x^4+3x^2-4x-2}{x^3-x} \quad \left(= \frac{P_4(x)}{Q_3(x)} \right)$$

Řešení. • Nejprve provedeme rozklad polynomu ve jmenovateli (nad reál. čísly):

$$Q_3(x) = x\,(x+1)(x-1),$$

to umožní také najít definiční obor funkce R:

$$D(R) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

$$= (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty).$$

• Porovnáme stupeň čitatele a st. jmenovatele:

$$\text{st}\, P_4 = 4 > 3 = \text{st}\, Q_3$$

TO ZNAMENÁ, ŽE $R(x)$ NENÍ RYZÍ RAC. FUNKCE, MUSÍME NAPŘED DĚLIT!

Provedeme dělení $(x^4+3x^2-4x-2):(x^3-x)$ [SAMI]

a zjistíme, že

$$R(x) = x + \frac{4x^2-4x-2}{x^3-x}$$

$$= x + \frac{4x^2-4x-2}{x\,(x+1)(x-1)} =$$

OČEKÁVÁM ROZKLAD V SOUČET TVARU:

$$= \underbrace{x}_{\text{POLYNOM}} + \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

PARC. ZLOMKY

Nyní najdeme zatím neznámé koeficienty A, B, C v rozkladu (pomocné) racionální funkce:

JE RYZÍ, st. čit. = 2 < 3 = st. jm.

$$\tilde{R}(x) = \frac{4x^2-4x-2}{x^3-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

tak, že PŘEVEDEME PRAVOU STRANU NA SPOLEČNÉHO JMENOVATELE a pak porovnáme ČITATELE ZLOMKŮ VLEVO a VPRAVO (stejného jmenovatele tedy nemusíme opisovat):

$$4x^2-4x-2 = \underbrace{Ax^2-A} + Bx^2+Bx + Cx^2-Cx$$

užití jmen.: $(x-1)(x+1) = x^2-1$ atd.

nyní mohu
- využít toho, že znám kořeny, postupně je dosadit a získat rovnice pro koeficienty
- porovnat koeficienty u stejných mocnin
- oba postupy kombinovat; toho se užívá často, zkusme to:

• DOSADÍM KOŘENY:

vezmeme např. $\boxed{x=1}$: $L = 4-4-2 = -2$, $P = 2B$,

po dosazení, levá strana, pravá strana

porovnám: $-2 = 2B$, vypočtu: $\boxed{B=-1}$

(podobně mohu položit $\boxed{x=0}$: $-2=-A$, $\boxed{A=2}$

$\boxed{x=-1}$: $4+4-2 = \cancel{A}-\cancel{A}+\cancel{B}-\cancel{B}+C+C$,

$6 = 2C$, $\boxed{C=3}$)

• POROVNÁM KOEFICIENTY U ODPOVÍDAJÍCÍCH SI MOCNIN; dostávám rovnice pro koef.

(u x^2) $4 = A + B + C$

(u x) $-4 = B - C$

("u x^0", absolutní člen) $-2 = -A$

řeším soustavu: $\Rightarrow$ (např.) $C = B + 4$, dosadím do 1. rovnice

$\Rightarrow$ $\boxed{A = 2}$

po dosazení plyne z 1. rovnice:

$$4 = 2 + B + (B+4), \quad 2B = -2, \quad \boxed{B = -1},$$

dosadím do vztahu pro C: $C = B + 4 = -1 + 4$, $\boxed{C = 3}$.

• KOMBINUJI:
beru kořen $x = 1$, dosadím, jak jsme to už zkusili, $B = -1$;
porovnám absolutní členy: $A = 2$;
porovnám koef. u x: z $C = B + 4$ plyne $C = 3$.

máme částečný výsledek

$$\tilde{R}(x) = \frac{4x^2 - 4x - 2}{x^3 - x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} \quad \Big(= ^{\text{nebo}} = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{3}{x+1} \Big)$$

a VÝSLEDEK:

$$R(x) = \underbrace{x}_{\text{NEZAPOMENOUT!}} + \underbrace{\frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1}}_{\text{PARC. ZLOMKY}}$$

PROČ TO MÁME UMĚT: takové výrazy budeme v dalším semestru INTEGROVAT:

$$\int R(x)\,dx = \int x\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{3}{x-1}\,dx$$

O tom, že jsme počítali správně, se můžeme přesvědčit ZKOUŠKOU:

$$x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{x^4+3x^2-4x-2}{x^3-x} = R(x)$$

to bylo ZADÁNO.

(pomocný výpočet si uděláme ve zvláštním „boxu")
společný jmenovatel bude

$$x(x-1)(x+1) = x(x^2-1) = \underbrace{x^3-x}_{\text{JMENOVATEL}};$$

v čitateli máme mít:

$$\underbrace{x^4-x^2}_{} + \underbrace{2(x^2-1)}_{} - (x^2+x) + 3(x^2-x) = (\text{upravíme})\ldots$$

to je za x, to je za $\frac{2}{x}$ ...

$$= \underbrace{4x^4+3x^2-4x-2}_{\text{ČITATEL}};$$ výsledný zlomek píši NAHORU.

Ve skriptu si najdete vyřešený příklad na situaci, kdy jmenovatel nemohu zcela rozložit na lineární kořenové činitele a součástí rozkladu je (dále nad $\mathbb{R}$ nerozložitelný) člen druhého stupně. Rozklad je tam nalezen s využitím Hornerova schematu. Dále je využit známý reálný kořen i metoda „porovnání koeficientů".

Zkušenosti, které jsme nasbírali u polynomů, využijeme k určení znaménka rac. funkce.

Jakého tvaru budou parciální zlomky?

To poznáme z rozkladu jmenovatele (nad $\mathbb{R}$):

- když má Q_m v rozkladu lin. polynom $(ex+d)^{k}$, pro $e \neq 0$, pak v rozkladu $\frac{P}{Q}$ mu odpovídá součet parciálních zlomků – v počtu k, což je násobnost,

$$\frac{C_1}{ex+d} + \frac{C_2}{(ex+d)^2} + \cdots + \frac{C_k}{(ex+d)^k}.$$

- když má Q_m v rozkladu (polynom 2. st.)$^{\text{na mocninu } \ell}$, $(ax^2+bx+c)^{\ell}$, s $a \neq 0$ a diskriminantem

$$D (= b^2-4ac) < 0,$$

pak v rozkladu mu odpovídá součet ℓ sčítanců

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_\ell x+B_\ell}{(ax^2+bx+c)^\ell}$$

parciální zlomky

[Pozn. V příkladech si koeficienty mohu označit JAK CHCI, nemusím užívat indexů; je lepší si ponechat velká písmena. Např. volím pořadě $A, B, C, D, E, F, \ldots$]

ZNAMÉNKO RACIONÁLNÍ FUNKCE

Racionální funkci upravíme na tvar

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

tak, aby polynomy P a Q už NEMĚLY SPOLEČNÉ KOŘENY (tj. v rozkladech kratším společné činitele).

Uvědomme si:

na změnu znaménka mají vliv pouze a jenom reálné kořeny LICHÉ násobnosti – ČITATELE / JMENOVATELE

(kořeny jmenovatele ovšem NEPATŘÍ do D(R), definičního oboru rac. fce). Stačí tedy spočítat hodnotu $R(x_0)$ ve "vhodném" bodě a postupovat přes "dělící body" = KOŘENY do dalších intervalů. Ukážeme na příkladě.

Př. Určete znaménko racionální funkce R, z u R, pro funkci

$$R(x) = \frac{\overset{\text{lichá násob.}}{(3x-2)^3}\ \overset{\text{sudá nás.}}{(2x+1)^2}\ \overset{D<0,\ \text{NEROZLOŽITELNÉ}}{(x^2-x+1)}}{\underbrace{(x-3)^1}_{\text{kořen LICHÉ NÁSOBNOSTI}}\ \underbrace{(3x^2+1)}_{D<0,\ \text{dále nelze rozložit nad } \mathbb{R}}}.$$

Všimneme si: $D(R) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$, $3 \notin D(R)$.

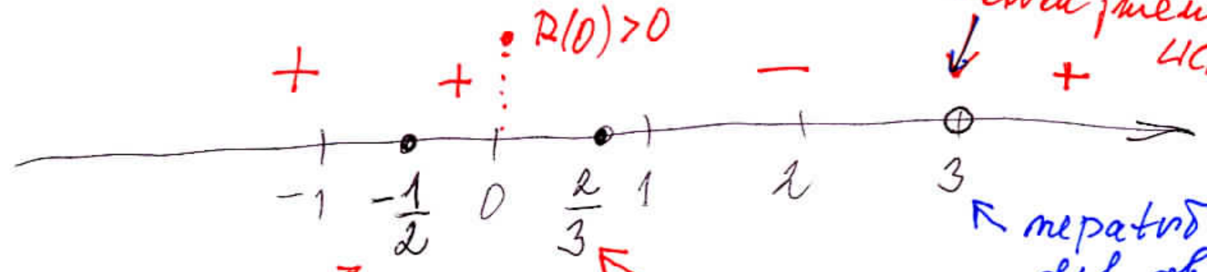
KOŘENY ČITATELE: $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$

JMENOVATELE: 3

VYZNAČÍME na reálné ose KOŘENY "dělicí body" — • PATŘÍCÍ do $D(R)$
○ NEPATŘÍCÍ do $D(R)$ (prázdný kroužek)

zn R:

kořen jmenovatele je LICHÉ NÁSOB., ZMĚNA ZN



nepatří do def. oboru

kořen sudé násobnosti, zn R se v něm NEMĚNÍ

kořen LICHÉ NÁSOBNOSTI, ZMĚNA ZNAMÉNÍ

Začneme tím, že určíme funkční hodnotu např. pro
$x_0 = 0 \in D(R)$: $R(0) = \frac{(-2)^3\cdot 1^2\cdot 1}{(-3)\cdot 1} = \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3} \underline{\underline{> 0}}$.

na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$, kde leží "náš" bod $x_0 = 0$,

VYZNAČÍME + na znamení, že je tam $R(x) > 0$.

Postupujeme dál "na pravou stranu" i "na levou stranu" a podle toho, jestli

narazíme na kořen liché / sudé násobnosti,

znaménko změníme / ponecháme, můžeme i zapsat:

zn R je kladné na $(-\infty, \frac{2}{3})$ a na $(3, \infty)$
záporné na $(\frac{2}{3}, 3)$.

POKUD je $x_0 = 0$ KOŘEN JMENOVATELE, VOLÍME NĚCO JINÉHO (1, −1, ...

Tentokrát jsme měli rozklad připravený.

Obvykle ho nejprve musíme VYHLEDAT, např. při použití Hornerova schematu.

Podívejte se na řešené příklady ve skriptech a zkuste si cvičení, která ve skriptech patří k tématu Racionální funkce.

K procvičení můžete používat také testovací úlohy z Autotestů, které jsou uvedeny na koncích jednotlivých KAPITOL.

(máme "podezření", že hodnoty a_n se s rostoucím indexem n "blíží" nule; body $(n, \frac{1}{n})$ leží na grafu fce: $y = \frac{1}{x}$).

Př. $\left(\frac{2n-1}{n}\right)$: někdy je lépe "výtvarný" zákon pro n-tý člen upravit, lépe odhadneme, co se děje:

zde $a_n = 2 - \frac{1}{n}$; tedy $a_1 = 2 - \frac{1}{1} = 1$

$a_2 = 2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

JE VIDĚT: s rostoucím n se a_n "blíží" dvojce"

$a_3 = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$

$\vdots$

"JAK MOC BLÍZKO ke 2" $a_k = 2 - \frac{1}{k} = \frac{2k-1}{k}$

se dostanu členy posloupnosti? ZKOUMÁM $|a_n - 2|$.

Když si předem stanovím nějakou hodnotu, třeba

$\varepsilon = 0{,}01 = \frac{1}{100} > 0$, bude zmíněný rozdíl

$$|a_n - 2| = |2 - \tfrac{1}{n} - 2| = |-\tfrac{1}{n}| = \frac{1}{n} \overset{\text{MENŠÍ}}{<} \underbrace{\frac{1}{100} = \varepsilon}_{\text{naše volba pro přiblížení (LIB.)}}$$

právě tehdy, když $n > \frac{1}{100}$.

(Ve skriptu zvolili ještě menší číslo, $\varepsilon = \frac{1}{1000} = 0{,}001$)

DOSTANU SE LIBOVOLNĚ BLÍZKO

Situaci popíšeme takto:

Jestliže (index) n ROSTE NADE VŠECHNY MEZE, symbolicky $n \to \infty$, potom $a_n \to 2$, zapíšeme v dohodnutém označení:

$$\underset{\text{LIMITA}}{\lim_{n \to \infty}} \left(\frac{2n-1}{n}\right) = 2.$$

Obecně můžeme zavést pojem LIMITA POSLOUPNOSTI:

DEFINICE Posloupnost (a_n) má za limitu číslo $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému kladnému reálnému číslu

$$\varepsilon > 0$$

(řecké epsilon)

existuje přirozené číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ (index členu posloupnosti) takové, že pro všechna větší přirozená čísla

$$n \in \mathbb{N}, \quad n \geqq n_0$$

je $|a_n - a| < \varepsilon$.

abs. h. rozdílu mezi členem posloupnosti a limitní hodnotou (= vzdálenost čísel a_n, a na reálné ose) je MENŠÍ než zvolené číslo ε. . $a_n \to a$ pro $n \to \infty$,

Píšeme: $\lim_{n \to \infty} a_n = a \; (\in \mathbb{R})$,

(z latiny: LIMES ... HRANICE)

říkáme: "posl. (a_n) MÁ VLASTNÍ LIMITU a", POSLOUPNOST JE KONVERGENTNÍ.

Tato situace nemusí nastat.

Jsou možné ještě další dvě situace.

DEFINICE Když ke každé hodnotě $h \in \mathbb{R}$ najdu člen posloupnosti a_{n_0} (tj. existuje $n_0 \in \mathbb{N}$) takový, že pro ten a všechny další (tedy pro $n \geqq n_0$) platí

$a_n > h$ ... $\lim_{n \to \infty} a_n = \infty$ "posloupnost má NEVLASTNÍ limitu nekonečno"

$a_n < h$ ... $\lim_{n \to \infty} a_n = -\infty$ "posloupnost má NEVLASTNÍ limitu mínus nekonečno"

Jestliže posloupnost má nevlastní limitu (∞ nebo $-\infty$), říkáme, že

(an) DIVERGUJE; je divergentní

ZBÝVÁ POSLEDNÍ MOŽNOST: neexistence limity posloupnosti:

DEFINICE

Řekneme, že posloupnost (a_n) OSCILUJE, nebo je oscilující,

jestliže NEEXISTUJE limita a_n pro $n \to \infty$.

Př. Pro konstantní posloupnost (b_n), kde $b=1$, tj. $(b_n) = (1, 1, \dots, 1, \dots)$ je $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 1$.

Každá konstantní posloupnost konverguje (proč).

Př. Posloupnost $\left(\frac{1}{n}\right)$ je divergentní, existuje limita

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \text{(proč).}$$

Př. Posloupnost s n-tým členem tvaru $a_n = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right) = (0, 1, 0, 1, \dots)$ limitu NEMÁ, OSCILUJE.

střídají se hodnoty 0,1 pravidelně

Dalo by se to ukázat i přímo z definice, ale snazší je užití následujících tvrzení

(která se matematikům dokazuje, ale to zabere čas, my to bereme "uživatelsky" a budeme tomu věřit).

(1) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

nemůže mít dvě různé: $<$ JEDNU / ŽÁDNOU

Def.
Zvolíme-li nějakou rostoucí posloupnost přirozených čísel (k_n) ... budou hrát roli INDEXŮ
a posloupnost (a_n), můžeme uvažovat jenom ty členy posloupnosti, které mají indexy $k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$
("jen některé", a "vybíráme" je z dané posloupnosti),
utvoříme tak novou posloupnost

$$(a_{k_n})$$

a říkáme: (a_{k_n}) je VYBRANÁ posloupnost z posloupnosti (a_n). Platí:

(2) Jestliže posloupnost MÁ limitu, $\lim\limits_{n\to\infty} = a \in \mathbb{R}^*$,
pak každá z ní VYBRANÁ posloupnost má STEJNOU limitu,
tj. platí

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a.$$

"rozšířená reálná osa"

Poznámka Když chceme zahrnout případ vlastní a nevlastní limity do společného označení, užijeme symbol zavedený v úvodu skript

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\} \; (= \langle -\infty, \infty \rangle)$$

Další užitečné vlastnosti posloupností najdete ve skriptu pod nákresem (v rámečku, boxu):

Základní vlastnosti limit posloupností.

vlastnosti 1. a 2. jsme již zmínili, o vlastnostech 3., 4., 5., 6. a 7. zkuste sami přemýšlet.

Sami si přečtete Komentář o konvergenci (q^n), $q \in \mathbb{R}$, udělejte si CVIČENÍ. Dále si zapamatujte vztahy uvedené v rámečku pod nákresem

Algebra limit posloupností

(limita součtu posloupností je rovna součtu limit těchto posloupností, pokud má tento součet smysl, podobně pro rozdíl, součin, podíl, absolutní hodnota)

a v následujících rámečcích

1) $\infty + \infty = \infty$, ...

⋮

6)

naopak nejsou definovány $\infty - \infty$, ...

Procvičíme na příkladech.

VÝPOČET LIMIT POSLOUPNOSTÍ

Naučte se vlastnosti limit a v každém kroku výpočtu si řekněte, čeho právě používáte.

Př. Určete ← znamená: snažíme limitovaný výraz upravit, pak dojít k výsledku.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{3n^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$ (zkusíme z čitatele, jmenovatele vytknout nejvyšší mocninu)

LIMITA ČITATELE: $\lim\limits_{n\to\infty} (2n-3) = \infty$,

LIMITA JMENOVATELE: $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^2+4) = \infty$, jejich podíl patří mezi tzv. NEURČITÉ VÝRAZY, NENÍ DEFINOVÁN, užíjeme zápisu: $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$; musíme na to JINAK.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(2-\frac{3}{n}\right)}{n^2\left(3+\frac{4}{n^2}\right)} \underset{\text{krátíme}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{3}{n}}{n\left(3+\frac{4}{n^2}\right)} =$$

(POMOCNÉ) protože limita součtu je součet limit, pokud obě existují a dají se sečíst, máme v čitateli:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{3}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 - \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}}_{\text{skripta, pravidlo 5): } \frac{k}{\pm\infty}=0} = 2-0 = 2.$$

Dále $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\left(3+\frac{4}{n^2}\right)\right] = \infty . 3 = \infty$

lim součinu je součin limit, pokud ex.

$$= \frac{2}{\infty} = 0.$$ ← pravidlo 5)

ODPOVĚĎ: $$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{3n^2+4} = 0.}$$ ← TEDY EXISTUJE VLASTNÍ LIM.

Př. Podobného postupu můžeme někdy s výhodou využít i v jiných případech, kde zpočátku zlomek zadán není a my si ho tam „přimyslíme" díky tomu, že pro reálné $r \in \mathbb{R}$, $r = \frac{r}{1}$.

Určete:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+3n} - 2n\right) = [\infty - \infty] =$$

přímo to nepůjde, užijeme triku

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{4n^2+3n} - 2n\right)\left(\sqrt{4n^2+3n} + 2n\right)}{\sqrt{4n^2+3n} + 2n} \overset{!}{=}$$

[rozšířili jsme zlomek $\frac{\sqrt{4n^2+3n} - 2n}{1}$ výrazem „sdruženým" ke čitateli; k výrazu $a+b$ utvoříme sdružený výraz změnou znaménka: $a-b$.]

$$\overset{!}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{4n^2} + 3n - \cancel{4n^2}}{\sqrt{4n^2+3n} + 2n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{\sqrt{4n^2+3n} + 2n} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n} \cdot 3}{\cancel{n}\left(\sqrt{4+\underbrace{\tfrac{3}{n}}_{\to 0}} + 2\right)} =$$

upravíme a krátíme

vzniklo z $\sqrt{n^2}$

kde: $\sqrt{4} = 2$

$$= \frac{3}{2+2} = \boxed{\frac{3}{4}}.$$

Odpověď: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{4n^2+3n} - 2n\right) = \frac{3}{4}$ (je vlastní).

Př. určete

$$\lim_{n\to\infty}(-7n^3+2n-8)=\lim_{n\to\infty}\Big[\underbrace{n^3}_{\to\infty}\cdot\underbrace{\Big(\underbrace{-7}_{-7}+\underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{8}{n^3}}_{\to 0}\Big)}_{\to -7}\Big]=$$

$$=\infty\cdot(-7)=\boxed{-\infty}\,.$$

Př. Prozkoumejte, jak se chovají posloupnosti

$$(\sin n\pi)_{n=1}^{\infty},\quad(\cos n\pi)_{n=1}^{\infty},\quad\left(\sin n\tfrac{\pi}{2}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

- Pozor, posloupnost (tedy její členy) může vznikat empiricky, měřením dat; nemusí se dát popsat matematickou formulkou; třeba:

pacient číslo	1	2	3	4	...	10	11	12
naměřená teplota	36,2	37,1	38,4	36,5	...	36,8	0	0....

„neměřeno"!..

- Pokud bych zadala úlohu: jsou dány členy posloupnosti (2, 3, 5, 7, 11, ◦, ◦, ◦, ...), jak budou vypadat její (zatím neznámé) další členy? Po zralé úvaze musím odpovědět, že NEVÍM. Pokud by si autor zadání „myslel na prvočísla", mohlo by vyhovovat pokračování 13, 17, 19, ..., ale možností je mnoho. Otázka by nebyla správně položena.