nad reálnými čísly se dá polynom (s reál. koef.) rozložit jen "částečně", nad komplexními vždy existuje rozklad na LINEÁRNÍ činitele.

ROZKLAD NAD KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

nad $\mathbb{C}$ lze polynom stupně n psát jako

kořenový činitel

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

kde $x_1 \in \mathbb{C}$, $x_2 \in \mathbb{C}, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ jsou všechny jeho kořeny; některé se mohou opakovat; říkáme tomu rozklad polynomu na součin kořenových činitelů.

Pozn. $x_1 = a_1 + ib_1$; $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ atd. Jestliže nějaké komplexní číslo $z = a + ib$ je kořenem polynomu, pak i číslo k němu komplexně sdružené je kořenem.

Vysvětlení: jestliže $P = a_n x^n + \ldots + a_0$ a $P(a+ib) = 0$, tedy $a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, počítejme

$$P(a - ib) = P(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + a_1 \bar{z} + a_0 =$$

$$= \bar{a}_n \bar{z}^n + \bar{a}_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{z} + \bar{a}_0 =$$

užijeme toho, že pro reálné číslo a_k, $\bar{a}_k = a_k$, $k = 0, .., n$.

$$= \overline{(a_n z^n)} + \ldots + \overline{(a_1 z)} + \bar{a}_0 =$$

užijeme toho, že $\bar{\alpha}.\bar{\beta} = \overline{(\alpha.\beta)}$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$= \overline{(a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0)} = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0.$$

užijeme toho, že $\overline{(\alpha + \beta)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}$ pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Je-li $a+ib=z$ k-násobný kořen polynomu P, potom i $a-ib=\bar{z}$ je k-násobný kořen P.

Protože komplexně sdružené kořeny jdou „po dvojicích", dostáváme:

Má-li polynom P LICHÝ STUPEŇ (např. 1, 3, 5, ...), pak má aspoň jeden REÁLNÝ kořen.

Př. $P_2(x)=x^2+1$, jak známo, reálný kořen NEMÁ; můžeme psát $x^2+1=(x-i)(x+i)$.

Ani $P_4(x)=x^4+1$ nemá reál. kořeny.

Pro $P_3(x)=x^3+1=\underbrace{(x+1)}_{(x-(-1))}\underbrace{(x^2-x+1)}_{\substack{D=1-4=-3<0,\\ \text{(nemá reál. kořen)}}}$ je č. -1 reálným kořenem (jediným).

Zkusme násobit kořenové činitele $(x-z)\cdot(x-\bar{z})$, tedy

$$(x-(a+ib))\cdot(x-(a-ib))=x^2-x(a-ib)-x(a+ib)+$$
$$+(a+ib)(a-ib)=$$
$$=\underbrace{x^2-2ax+a^2+b^2}=\underbrace{(x-a)^2+b^2};$$

kde diskriminant $D<0$:

$D=4a^2-4a^2-4b^2=-4b^2<0$

VÝRAZ SE NAD $\mathbb{R}$ NEDÁ DÁLE ROZLOŽIT

S takovými výrazy, případně ve vyšších mocninách, se setkáme v rozkladu polynomu nad reál. čísly $\mathbb{R}$.

ROZKLAD NAD REÁLNÝMI ČÍSLY.

Vždy můžeme psát

$$P_n(x) = a_n (x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x-x_r)^{k_r} \cdot$$

$$\cdot \left((x-a_1)^2 + b_1^2\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left((x-a_s)^2 + b_s^2\right)^{l_s};$$

$x_1, \ldots, x_r$ reálné kořeny, s násobnostmi $k_1, \ldots, k_r$

$a_1 + b_1 i, \ldots, a_s + b_s i$ komplexní kořeny,
s násobnostmi $l_1, \ldots, l_s$.

Přitom platí $k_1 + \cdots + k_r + 2l_1 + \cdots + 2l_s = n$.

Někdy se podaří "uhodnout" kořen polynomu díky následujícímu: nechť $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$.

Jsou-li všechny koeficienty $a_0, a_1, \ldots, a_n$ čísla CELÁ, a má-li být CELÉ číslo p KOŘENEM P, potom musí platit:

p dělí absolutní člen a_0.

Pozor, polynom s celočíselnými koeficienty
- nemusí mít reál. kořeny, (x^2+1),
- může mít reál. kořeny ve tvaru ZLOMKŮ! tedy NE celočíselné!

"ODSTRAŠUJÍCÍ"

Př. Mnohočlen $8x^2 - 2x - 3 = 8(x - \frac{3}{4})(x + \frac{1}{2})$ má dva reálné kořeny $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$. Dělitelé čísla $a_0 = -3$, tedy ± 1 a ± 3, polynom NEANULUJÍ!

HORNEROVO SCHEMA

Ověřit, jestli $x=c$ je kořen polynomu P znamená tolik, jako ptát se, zda polynom P je lineárním polynomem $(x-c)$ dělen beze zbytku. Dělení
$$P_n(x) = (x-c)H(x) + d \begin{cases} d=0 & \text{(kořen)} \\ d\neq 0 & \text{(není kořen)} \end{cases}$$
se dá uspořádat do schématu ("Hornerova"). Označme $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_0$,

$$H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n} + \dots + b_1 x + b_0.$$ Potom:
$a_n = b_{n-1}$, $a_{n-1} = b_{n-2} - c b_{n-1}$, ..., zapíšeme takto:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \\
\boxed{x=c} & - & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \dots & cb_2 & cb_1 & cb_0 & \\
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_1 & b_0 & \boxed{d=P_n(c)} & = a_0 + cb_0
\end{array}$$

Umožňují rychle
- VYDĚLIT $P(x)$ lineárním pol. $(x-c)$
- ověřit, zda $x_0 = c$ je / není kořen P
- spočítat funkční hodnotu $P_n(c)$
- postupným opakováním i najít rozklad P (tedy, když to dobře jde ...)

Rozklad polynomu se dá užít např. k určení, kde má P znaménko kladné (graf nad osou x) a kde záporné (graf pod osou x).

Platí tedy:

ZNAMÉNKO polynomu se mění POUZE v reálných kořenech LICHÉ NÁSOBNOSTI. Pochopíme-li tuto ideu, je to geniálně jednoduché!

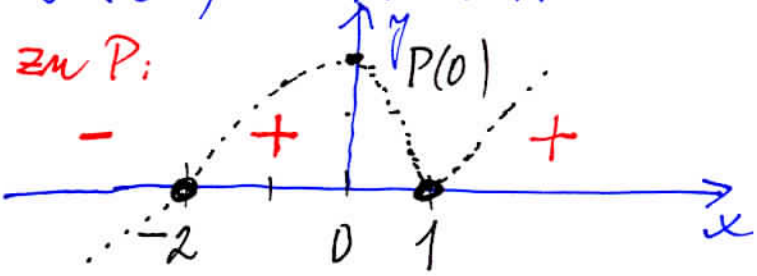
Př. Určete znaménko zn P polynomiální funkce

$$P_5(x)=(x-1)^2(x+2)(\underbrace{2x^2+x+1}).$$

kořen 1
2-násobný
zn NEMĚNÍ

kořen −2
1-násobný
MĚNÍ zn P

$D=1-8<0$, dále rozložit nelze



Určíme rozklad (zde je už připravený), reál. kořeny a funkční hodnotu ve vybraném bodě (kde se dobře spočítá), např. v $x=0$:

$$P_5(0)=(-1)^2\cdot 2\cdot 1=2>0 \text{ (kladná)},$$

odpověď můžeme vyznačit obrázkem (stačí), nebo zapsat:
pro $x\in(-\infty,-2)$, $P(x)<0$;
pro $x\in(2,\infty)$, $P(x)>0$.

Zkusme rozklad nahoře uvedený "početně najít"!

Př. Určete rozklad polynomu nad $\mathbb{R}$:

$$P_5(x)=2x^5+x^4-5x^3+x^2-x+2.$$

Zkusme, jestli některý z dělitelů $\pm1, \pm2$ čísla $a_0=2$

je kořenem.

	2	1	−5	1	−1	2	
$\boxed{x=-1}$	−	−2	1	4	−5	6	
	2	−1	−4	5	−6	$\boxed{8 = P(-1)}$	$x=-1$ NENÍ kořen

$\boxed{x=1}$	−	2	3	−2	−1	2	
	2	3	−2	−1	−2	$\boxed{0 = P(1)}$	$x=1$ JE kořen

koeficienty polynomu 4. st. $H_4(x)=2x^4+3x^3-2x^2-x-2$,

zkusím štěstí znova, nebo si zjistím: $P(x)=(x-1)\cdot H_4(x)$. $\boxed{\text{1 je kořen } H_4}$

$H4(1)=2+3-2-1-2=0.$

$\boxed{x=1}$	−	2	5	3	2	
	2	5	3	2	$\boxed{0}$	

$x=1$ je kořen DVOJNÁSOBNÝ

koeficienty polynomu 3. st. $\tilde{H}_3(x)=2x^3+5x^2+3x+2$

zatím, $P(x)=(x-1)^2\cdot\tilde{H}_3(x)$

zkusím: $\tilde{H}_3(1)=2+5+3+2\neq 0$, tedy 1 není kořenem $\tilde{H}$,

proto 1 nebude vyšší násobnosti než 2 ani pro P.

$\boxed{x=-2}$	−	−4	−2	−2	
	2	1	1	$\boxed{0}$	$=\hat{H}(-2)=H(-2)=P(-2)$

(nemám to dobře pod sebou)

koef. pro $\hat{H}_2(x)=2x^2+x+1$ ... ten je dále NEROZLOŽITELNÝ nad $\mathbb{R}$, nemá vliv na K u P

Máme rozklad (nad $\mathbb{R}$):

$$P_5(x) = (x-1)^2 \cdot (x+2) \cdot (2x^2 + x + 1),$$

tentokrát skutečně získaný postupným výpočtem s užitím Horner. schématu, a mnozí se vrátí na str. 13 k úvahám o ZV P.