Pro skupinu tzv. ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ jsou pevně dohodnuty intervaly, na které je máme zúžit, aby zúžení bylo prosté, a inverzním funkcím k těmto zúžením byla vybrána jména.

Zopakujte si goniometrické funkce známé ze střední školy: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, jejich grafy a tabulky význačných hodnot. Přehled najdete ve skriptu (str. 37–40 v elektronické verzi).

Jako CYKLOMETRICKÉ označujeme tyto 4 funkce:

$\arcsin = \left(\sin|_{\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle}\right)^{-1}$, tedy funkci $\sin x$ zúžím na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, kde je PROSTÁ, k zúžení beru inverzní funkci, Obr. 2.16.

$\arccos = \left(\cos|_{\langle 0, \pi\rangle}\right)^{-1}$, tedy kosinus zúžím na interval $\langle 0, \pi\rangle$, zúžení je prosté, invertuji.

$\operatorname{arctg} = \left(\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}\right)^{-1}$, Obr. 2.17,

$\operatorname{arccotg} = \left(\operatorname{cotg}|_{(0, \pi)}\right)^{-1}$.

lichá fce: meze intervalu volím $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$

sudá: volím $0, \pi$

Naučte se jejich základní funkční hodnoty.

Podívejte se na MOCNINNÉ FUNKCE, 2.8.4.

Funkce HYPERBOLICKÉ

Pomocí exponenciely jsou zavedeny funkce:

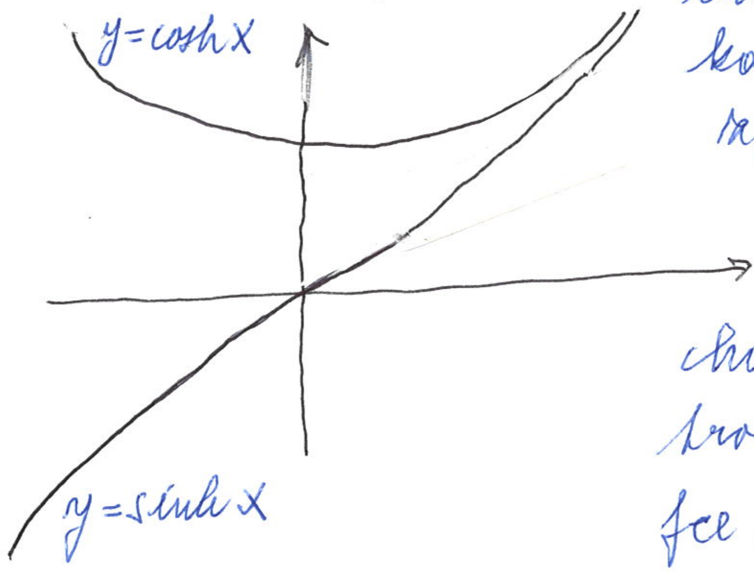
hyperbolický sinus

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$ ("sinus tam má minus")

a (aritmetický průměr obou funkcí)
hyperbolický kosinus, jehož grafem je ŘETĚZOVKA

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

řetězovka je technická křivka, lano nebo řetěz s upevněnými konci se prohne tímto způsobem (vlastní vahou)



chování grafu hyp. sinu trochu připomíná chování fce sin x v okolí počátku

Tyto funkce (a funkce inverzní) se vyskytují v technických aplikacích, v tzv. hyperbolické geometrii, některé vztahy mezi nimi jsou uvedeny ve skriptu. Uveďme aspoň vlastnost (která se ověří výpočtem)

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1;$$

má využití např. při parametrizaci hyperboly dané kanonickou rovnicí $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; lze použít funkce

$$x(t) = a \cosh t$$
$$y(t) = b \sinh t, \; t \in \mathbb{R}.$$

Zavádíme rovněž

hyperbolický tangens hyperbolický kotangens

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cotgh} x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \dots$$

Uvědomte si definiční obory a obory funkčních hodnot všech těchto funkcí, porovnejte se skripty.

Funkce HYPERBOLOMETRICKÉ

ve vybraných intervalech, kde jsou tyto funkce ryze monotonní, a tedy prosté a invertovatelné, zavádíme funkce k nim inverzní následovně:

argument hyperbolického sinu

$$\operatorname{argsinh} = (\sinh)^{-1} \quad \text{na celém } (-\infty, \infty)$$

$$\operatorname{argcosh} = \left(\cosh|_{\langle 0,\infty)}\right)^{-1}$$

není na $\mathbb{R}$ prostý

$$\operatorname{argtgh} = (\operatorname{tgh})^{-1} \quad \text{na celém } (-\infty, \infty)$$

$$\operatorname{argcotgh} = (\operatorname{cotgh})^{-1}$$

GRAFY NAJDETE VE SKRIPTECH.

Hyperbolometrické funkce lze vyjádřit také pomocí přirozeného logaritmu (jako fce složené):

$\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), x \in \mathbb{R}$

$\operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), x \in \langle 1, \infty)$

$\operatorname{argtgh} x = 1/2 \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1)$

$\operatorname{argcotgh} x = 1/2 \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

POLYNOMY = mnohočleny (s reál. koef.)

budeme brát jako reálné funkce speciálního typu, které mají funkční předpisy ve tvaru

$$f:\ P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$D(f) = \mathbb{R}$, kde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ jsou KOEFICIENTY POLYNOMU, $a_n \neq 0$.

stupeň $\operatorname{st} f = n$ je nejvyšší mocnina, která se v f vyskytuje s nenulovým koeficientem, a_0 je absolutní člen. někdy se užívá zkrácený "sumační zápis" $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, užitečný v obecně zapsaných formulích; jednotlivé sčítance $a_k x^k$ se nazývají monomy.

$\boxed{\text{Př.}}$ Každá reálná nenulová konstanta (např. $a_0 = 17$) je polynom stupně 0 (nula). Samo číslo NULA je také možno brát jako polynom, NULOVÝ POLYNOM, ale žádný stupeň mu nepřisuzujeme (nefungovaly by nám některé "vzorečky"); $D(0) = \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Př.}}$ $P_7(x) = x^7 - x^3 - 3x^2 + 6x + 2$ je polyn. st. 7

kvadratický člen — lineární člen — absolutní člen

Pro (dva) polynomy zavádíme — násobení skalárem, součet, součin

ukažme na příkladech.

$\boxed{\text{Př}}$ $P_3(x) = -3x^3 + 4x^2 + 0.x + 0$
$Q_3(x) = 3x^3 + 0.x^2 - x + 2$
$P_3(x) + Q_3(x) = 4x^2 - x + 2$

sečteme koeficienty u stejných mocnin, "chybějící" členy doplníme s koef. 0

Co pozorujeme? stupeň součtu klesl oproti stupňům původních mnohočlenů.

Obecně můžeme psát: velké řecké sigma, "SUMACE"

je-li $f: y = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polynom st. n,

$g: y = Q_m(x) = \sum_{l=0}^{m} b_l x^l$ polynom st. $\boxed{m \leq n}$

potom $f(x) + g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$ (skripta)

a dá se odvodit: $st\,(f \pm g) \leq \max\,(st\,f, st\,g)$ maximum

stupeň součtu (rozdílu) mnohočlenů je roven nebo je menší než ten "větší z obou stupňů" (pokud nejsou stejné)

$\boxed{\text{Př}}$ Polynom násobím reálnou konstantou $r \in \mathbb{R}$ tak, že r-kem násobím každý koeficient:

$r = \frac{1}{2}$, $f(x) = 8x^4 - 4x^2 + 2$, $r.f(x) = 4x^4 - 2x^2 + 1$.

OBECNĚ ZAPSANÁ FORMULE JE VE SKRIPTU.

$\boxed{\text{Př.}}$ násobení polynomů provádějte tak, jak jste zvyklí. Jedna možnost:

$$4x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x$$
$$-2x^3 + x^2 - 3x + 1$$

$$\underbrace{(2x^3 - x^2 + 3x - 1)}_{f(x)} \cdot \underbrace{(2x - 1)}_{g(x)} = 4x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 1.$$

Pokud žádný z $f(x)$, $g(x)$ NENÍ NULOVÝ polynom 0, platí

$$st\,(f \cdot g) = st\,f + st\,g \quad \text{(u nás – "sedí")}$$

CO DĚLENÍ? Dělením polynomu polynomem obecně nemusí vzniknout polynom, výsledkem je lomená racionální funkce, symbolicky:

$$\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}} = \text{racionální funkce}$$

$\boxed{\text{Př.}}$ $\dfrac{x-1}{x^4+1}$ je RYZÍ lom. rac. fce (st. čitatele je menší než st. jmenovatele),

$\dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^3 - 4x}$ NENÍ RYZÍ, $\dfrac{x^4 - 2}{x^3 + 3}$ také ne (LZE DĚLIT)

EXISTUJE POSTUP, JAK "DĚLIT SE ZBYTKEM", dokonce se dá podat důkaz, proč "funguje": EUKLIDŮV ALGORITMUS.

Pro polynomy P_n, Q_m, kde stupně splňují $n \geq m > 0$ lze vždy najít polynomy H a R, pro které: $st\,H = n - m$,

$$P_n = H \cdot Q_m + R, \text{ kde } R = 0 \text{ nebo } st\,R < st\,Q,$$

a pro ta x, pro která $Q_m(x) \neq 0$, platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

H – částečný podíl

R – zbytek při dělení

Jestliže $R=0$, podaří se dělit beze zbytku a výsledkem je tedy polynom, řekneme, že polynom P je dělitelný polynomem Q (Q / P).

Dělit jste se už učili, ukázkový příklad je ve skripta.

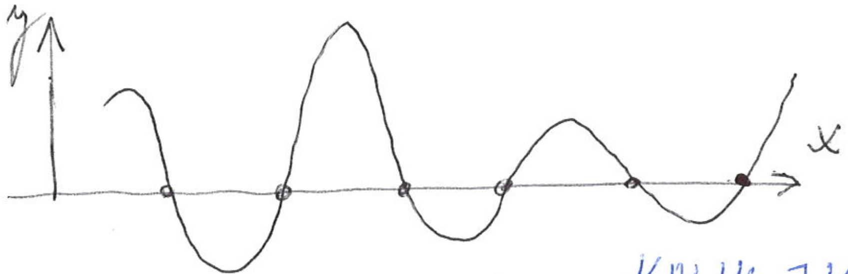
Zmiňme se o rovnosti polynomů; pokud jsou si rovny jako funkce, lze ukázat, že mají – stejný STUPEŇ
– u každé mocniny sobě rovné koeficienty.

KOŘENY MNOHOČLENŮ

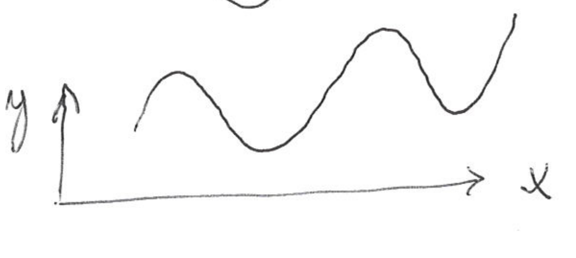
reálné – např. $x_0 \in \mathbb{R}$ (množ. reál. č.)

komplexní – $x_0 \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$ (množ. komplexních č. "complex")

Ty prvky $x_0 \in \mathbb{R}$ / $x_0 \in \mathbb{C}$, ve kterých má polynom funkční hodnotu nulovou, $P_n(x_0) = 0$, nazýváme jeho KOŘENY.



Reálné kořeny polynomu: PRŮSEČÍKY S OSOU x



KOLIK JICH MŮŽE BÝT?
nejvýše tolik, kolik je jeho STUPEŇ (ale nemusí být žádný)

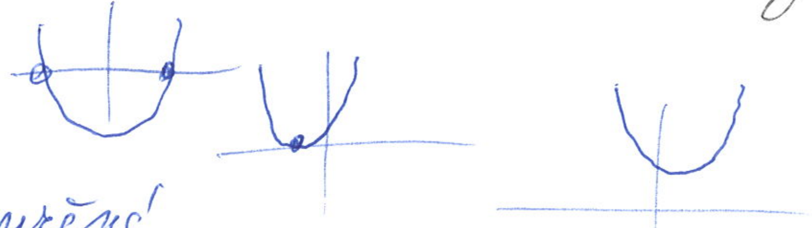
Hledání kořenů polynomu st. 2 znáte ze střední školy, probíhá jako výpočet kořenů kvadratické rovnice a je zopakováno ve skriptech, i s příslušnými obrázky

(dva různé kořeny

jeden dvojnásobný

dva komplexně sdružené,

v závislosti na tom, zda diskriminant $\begin{cases} D>0 \\ D=0 \\ D<0 \end{cases}$)



Jestliže $P_n(x_0)=0$ pro $\begin{cases} x_0\in\mathbb{R} \\ x_0\in\mathbb{C} \end{cases}$, lineární polynom $(x-x_0)$ se dá z polynomu P VYTKNOUT (a říkáme mu KOŘENOVÝ ČINITEL): $\underbrace{P(x)}_{st\,P=n}=\underbrace{(x-x_0)}_{st\,1}\cdot\underbrace{Q(x)}_{st\,Q=n-1}$

Co když se dá tohle $(x-x_0)$ VYTKNOUT VÍCKRÁT?

Jestliže se mi podaří vytknout $(x-x_0)^k$,

$$P_n(x)=(x-x_0)^k\cdot Q_{n-k}(x),$$

a "víckrát to nejde", což poznám podle toho, že $Q_{n-k}(x_0)\neq 0$ (x_0 není kořenem pro polynom Q), řekneme, že

x_0 je k-násobný kořen polynomu P.

PROČ PÁTRÁME PO KOŘENECH? ABY SE NÁM ZDAŘILO POLYNOM "CO NEJVÍCE ROZLOŽIT" a pomocí rozkladu určit VLASTNOSTI $\begin{cases} \text{polynomu} \\ \text{racionální funkce.} \end{cases}$