K 1. přednášce BAA001, ZS

Pojem FUNKCE – (zatím) reálná funkce jedné reál. proměnné

značení např: $f: \quad y = f(x), \quad x \in \underbrace{A = D(f)}_{\text{definiční obor funkce}}$

x... NEZÁVISLE PROMĚNNÁ

(často: sjednocení intervalů reál. čísel)

MOTIVACE: technika, mechanika, fyzika, optika, geometrie ...

Součástí funkce je

DEFINIČNÍ OBOR, FUNKČNÍ PŘEDPIS, OBOR HODNOT
$D(f) \subseteq \mathbb{R}$ (zadání funkce) $H(f) \subseteq \mathbb{R}$

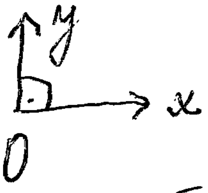
$x \longmapsto \underbrace{f(x) = y}$ ... EXPLICITNÍ zadání fce

předpis musí být takový, aby

každému x z def. oboru přiřadil JEDINOU reálnou hodnotu závisle proměnné y, obor hodnot je souhrn všech funkčních hodnot, do kterých se předpisem „dostaneme".

Pokud NENÍ D(f) předem DÁNO, bereme za něj podmnožinu všech reál. čísel, pro která má předpis $y = f(x)$ smysl, kde je definován; to je PŘIROZENÝ definiční obor

Funkci můžeme znázornit jejím GRAFEM:

v euklidovské rovině E_2 s pravoúhlou soustavou souřadnic 

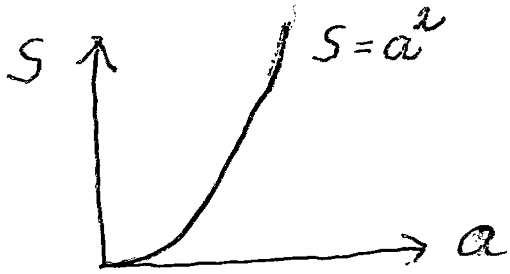
(kladnou) bereme všechny body $[x,y]$ takové, že $\begin{cases} x \in D(f), \\ y = f(x), \end{cases}$ tvoří $\boxed{\text{graf } f}$.

nezávisle proměnná se NEMUSÍ vždy jmenovat x, ani funkce se nemusí jmenovat právě f.

$\boxed{\text{Př. 1}}$ Souvislost (plošného) obsahu čtverce, ozn. $\underline{S}$, a jeho strany $\underline{a}$, můžeme vidět takto:

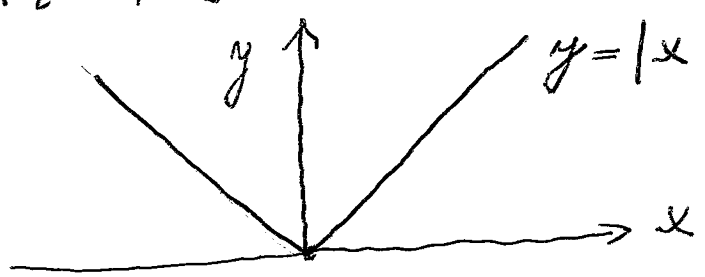
$$\underline{a} \longmapsto S = S(a) = a^2,$$

kde (velikost, délka strany) $a \in (0,\infty) = D(S)$, $H(S) = (0,\infty)$, a vznikající graf S má vlastně tvar části paraboly:



$\boxed{\text{Př. 2}}$ Funkce ABSOLUTNÍ HODNOTA (pro reál. čísla):

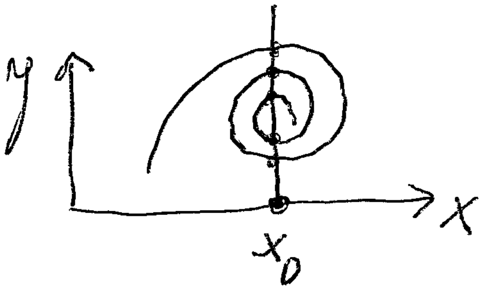
$f(x) = |x| = \max\{-x, x\}$,
$D(f) = (-\infty, \infty)$,
$H(f) = \langle 0, \infty)$.



Cvič. Sami si zakreslete graf funkce

$$f(x) = |\cos x|, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle,$$
$$g(x) = |\sin x|, \quad x \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle.$$

MŮŽE BÝT JAKÁKOLIV "MALŮVKA" GRAFEM FUNKCE? ASI NE. Jak poznám "NE-graf"?



"Šnek" na obrázku NENÍ grafem funkce; pro GRAF totiž musí každá rovnoběžka s osou y protínat "křivku" v JEDINÉM bodě.

Dokonce ani kružnice v rovině, ani elipsa (ať má střed a osy kdekoliv) není grafem funkce.

ROVNOST FUNKCÍ.

Dvě funkce f a g jsou si rovny, $f = g$, jestliže

- MAJÍ STEJNÉ DEFINIČNÍ OBORY, $D(f) = A = D(g)$,
- a současně pro každý prvek $x \in A$ platí rovnost funkčních hodnot $f(x) = g(x)$.

Př. 3 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Po formální stránce se předpis liší, přesto jsou to stejné funkce.

SOBĚ ROVNÉ FUNKCE MAJÍ STEJNÝ GRAF.

$\boxed{\text{CV}}$ Zjistěte, kdy funkce $g: y = 2x - 3$ a
$f: y = \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}$ (brané na svých přirozených def. oborech) se rovnají.

$\boxed{\text{CV}}$ Určete přiroz. defin. obor a obor hodnot funkcí!
$f: y = \sqrt{x^2 - 1}$, $h: y = \sqrt{-x}$, $g: \sqrt{-x^2}$,
$k: \sqrt{e^x}$ (další si navrhněte sami).

JEDNÍM Z NAŠICH CÍLŮ BUDE UMĚT (ALESPOŇ ZHRUBA) SESTAVIT GRAF FUNKCE.

Základní vlastnosti, které můžeme na funkcích pozorovat, jsou uvedeny v učebních oporách (O. Dlouhý, V. Tryhuk: Matematika I. Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné), str. 19-21 v elektronické verzi, odst. 1.4. Zopakujte si je.

PARAMETRICKÉ ZADÁNÍ FUNKCE

Kromě již zmíněného explicitního zadání funkce se můžeme setkat ještě s IMPLICITNÍM („skrytým") způsobem a parametrickým způsobem zadání funkce. Vzájemnou souvislost ukažme na kružnici a elipse.

$\boxed{\text{Př. 4}}$ Uvažujme body v rovině, jejichž souřadnice splňují $x^2+y^2=r^2$, $y>0$ ($r\in\mathbb{R}$ je pevné kladné). Můžeme psát také $x^2+y^2-r^2=0$, na levé straně máme funkci dvou proměnných:

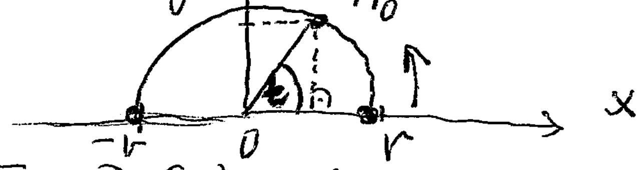
$$(*) \qquad F=F(x,y)=x^2+y^2-r^2\ (=0).$$

Role x a y v rovnici je "souměrná", kteroukoliv z nich bychom se mohli pokusit vypočítat pomocí té druhé, obecně ne jednoznačně ($x^2=\sqrt{r^2-y^2}$, $|x|=\sqrt{r^2-y^2}$). My máme ještě další podmínku pro y, proto mu dáme přednost:

$y^2=\sqrt{r^2-x^2}$, $|y|=\sqrt{r^2-x^2}$, teoreticky tedy

$$y = \left\langle \begin{array}{l} -\sqrt{r^2-x^2} \\ \sqrt{r^2-x^2} \end{array}\right.$$, ale víme, že $y>0$,

tedy $\boxed{y=\sqrt{r^2-x^2}.}$ Tím získáme (již explicitně vyjádřenou) funkci



$$f:\ y=y(x)=\sqrt{r^2-x^2},\quad D(f)=\langle -r, r\rangle,$$
$$H(f)=\langle 0,r\rangle.$$

Tato f byla původně "implicitním" předpisem (*) určena pomocí funkce F. Grafem f je "horní půlkružnice" kružnice k o rovnici $x^2+y^2=r^2$.

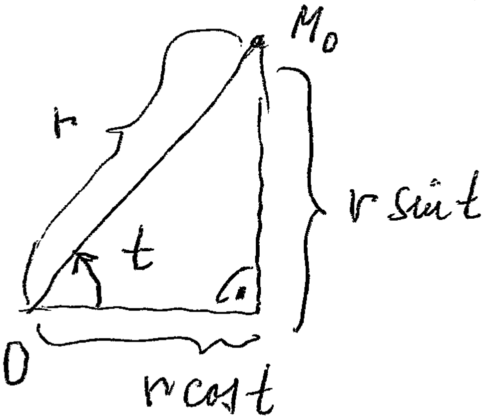
Uvažujme bod M_0 na naší půlkružnici a úhel mezi průvodičem OM_0 a kladnou poloosou x, jeho velikost označme t. První souřadnice bodu M_0 je $r\cos t$, druhá $r\sin t$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníku:

Dostáváme funkce

$x = x(t) = r\cos t$,

$y = y(t) = r\sin t$,

kde $t \in \langle 0, \pi \rangle$.



Představme si "parametr" t jako čas, dvojice funkcí $[x(t), y(t)]$ pak zadává "obíhání" po půlkružnici od koncového bodu $[r, 0]$ obloukem k bodu $[-r, 0]$. (Tato představa křivky jako "trajektorie" pohybujícího se bodu je užitečná pro fyziku a mechaniku.) Přečtěte si Definici 2.5.1. ve skriptech, str. 22.

Můžeme takto "parametrizovat" celou kružnici?

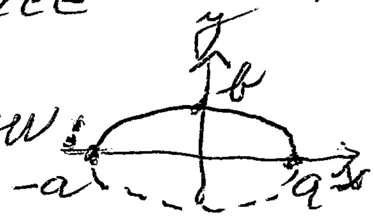
ANO: body $[x, y]$, kde $x = x(t) = r\cos t$,

$y = y(t) = r\sin t$; $t \in \mathbb{R}$

leží na kružnici o rovnici $x^2 + y^2 = r^2$, a naopak každý bod té kružnice lze napsat tímto způsobem. (Stačilo vzít $t \in \langle 0, 2\pi)$, proč?)

NEDOSTANEME ALE PARAMETRICKÉ ZADÁNÍ FUNKCE, ani grafickým znázorněním NEBUDE GRAF FUNKCE.

$\boxed{\text{Př}}$ Podobně můžeme postupovat pro elipsu:



„horní polovina" elipsy

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ y>0$$

$x=x(t)=a\cos t,$

$y=y(t)=b\sin t,$

$t\in\langle 0,\pi\rangle.$

Dvojice funkcí $(x(t),y(t))$, dává parametr. zadání funkce, jejímž grafem je polovina elipsy.

Existuje i možnost „přirozené" parametrizace:

$x(t)=t,\ y(t)=\sqrt{r^2-t^2},\ t\in\langle -r,r\rangle.$

Elipsa:

pokud vezmeme funkce

$x(t)=a\cos t,$

$y(t)=b\sin t$

se společným def. oborem $\mathbb{R}$, nebo bereme $t\in\langle 0,2\pi\rangle$, „vykreslíme" celou elipsu, ale nedostaneme graf funkce.

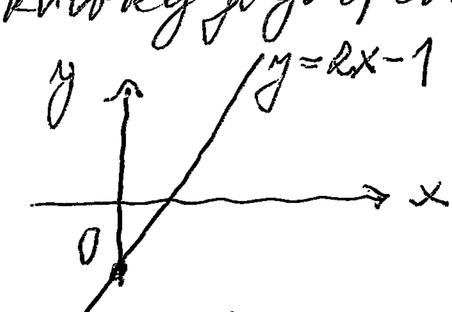
POZOR; TADY t UŽ NENÍ ÚHEL BODU NA ELIPSE, vychází se z konstrukce elipsy uvedené ve skriptu na str. ~~22~~, 23; Obr. 2.6.

ROZLIŠUJEME:

parametrizace FUNKCE (musí to být „dobré zadání")

parametrizace „KŘIVKY", nezadávající funkci; mnoho „technických křivek" má právě parametrické zadání, vhodný výběr části křivky je grafem fce

$\boxed{\text{Př}}$ Parametrizace [illegible] pro PŘÍMKY: „ŠIKMÁ PŘÍMKA"



obecná rovnice pro př. p:

$2x-y-1=0$, dostaneme funkci:

„směrnicový tvar", „se směrnicí" $y=y(x)=2x-1;\ x\in\mathbb{R}$ a graf fce, parametrické zadání může být:

$$p: \begin{cases} x = x(t) = t, \\ y = y(t) = 2t-1;\ t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

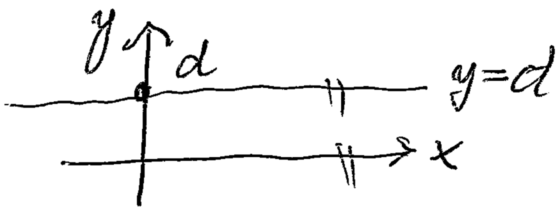
(„přirozená" parametrizace)

ale také třeba

$$p: \begin{cases} x(l) = 17l, \\ y(l) = 34l-1;\ l \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Zpravidla volíme to nejjednodušší. Pokud bychom měli dostat ZLOMKY v koeficientech, můžeme je ODSTRANIT VOLBOU PARAMETRU.

Pokud koeficient u x bude NULOVÝ, dostaneme „VODOROVNOU PŘÍMKU":



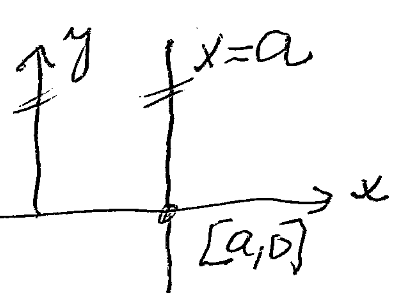
obecná rovnice

$y - d = 0$, směrnice je 0

vede na $y = d$, grafem je rovnoběžka s osou x.

(můžeme počítat při hledání ASYMPTOT grafu fu).

Ještě zbývají „SVISLÉ" přímky:



obecná rovnice — někdo jim

$x - a = 0$, — říká BEZ SMĚRNICE

$x = a$,

není tu žádný předpis pro y; nevzniká graf funkce.

y může být jakékoliv reálné číslo ($y \in \mathbb{R}$), takže:

parametrizace „křivky": $\begin{cases} x = a,\ a \in \mathbb{R} \text{ pev.} \\ y = t;\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Zúžení = RESTRIKCE FUNKCE:

může se stát, že nepotřebujeme funkci na celém jejím přirozeném oboru, ale jenom na vhodném "kousku" definičního oboru:

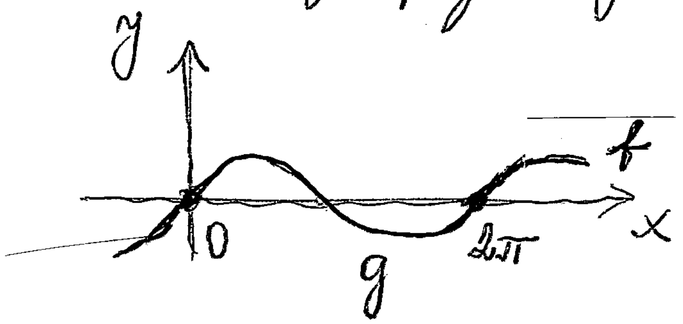
$\boxed{\text{Př}}$ uvažujme f: $\sin x$ a $D(f) = (-\infty, \infty)$.
Zvolme podmnožinu $D(g) = \langle 0, 2\pi \rangle \subseteq D(f)$ a v bodech této podmnožiny stanovme funkční hodnoty "nové funkce" g stejně jako před tím:

$$g(x) = \sin x, \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle;$$

novou funkci nazveme ZÚŽENÍM funkce f na interval $\langle 0, 2\pi \rangle$, značíme

$$g = f|_{\langle 0, 2\pi \rangle};$$

zřejmě graf $g \subset$ graf f:



Použijeme toho
- při parametrizacích
- při hledání některých inverzních funkcí.

KE SKLÁDÁNÍ FUNKCÍ

Př. A napíši-li výraz

$$e^{\cos x}$$

mohu si ho představit jako "složenou funkci":

tzv. VNĚJŠÍ FUNKCE má tvar

$$f: \; y = e^{x}; \; x \in \mathbb{R},$$

nebo teď raději

$$f: \; y = e^{u}; \; u \in \mathbb{R},$$

a VNITŘNÍ FUNKCE má tvar

$$g: \; u = \cos x; \; x \in \mathbb{R}.$$

Když vnitřní funkci "VLOŽÍM" do vnější, tedy v dohodnutém pořadí, vznikne nová funkce, tzv. SLOŽENÁ FUNKCE, tu zapíšeme jako

$$h: \; y = h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\cos x},$$

směr skládání, "f po g"

kde $x \in \mathbb{R}$, stručně $h = f \circ g$ (zkuste graf).

Př. B. Můžeme se setkat s funkcí vícenásobně složenou, třeba $y = \ln\left(\sin\left(x^2\right)\right)$

Naznačený "BRAMBORY SYSTÉM" usnadní rozklad.
(a může se časem hodit ještě při derivování funkcí).

Způsob rozkladu nemusí být jediný a řídí se i praktickým účelem.
(Proč to tak rozebíráme? Pochopení struktury funkce ulehčí odvození jejich derivace).

Přirozená $\boxed{\text{OTÁZKA:}}$
Co když pořadí skládání funkcí VYMĚNÍM?
Ukáže se, že někdy to jde docela dobře, jindy s tím bude trochu potíž.

$\boxed{\text{Př. A1}}$ Složit funkce z Př. A můžeme,

$$(g\circ f)(u) = g(f(u)) = \cos e^{u};\ u \in \mathbb{R},$$

ale dostaneme zcela JINOU FUNKCI; chcete-li, po výměně proměnných $u \leftrightarrow x$, můžete psát

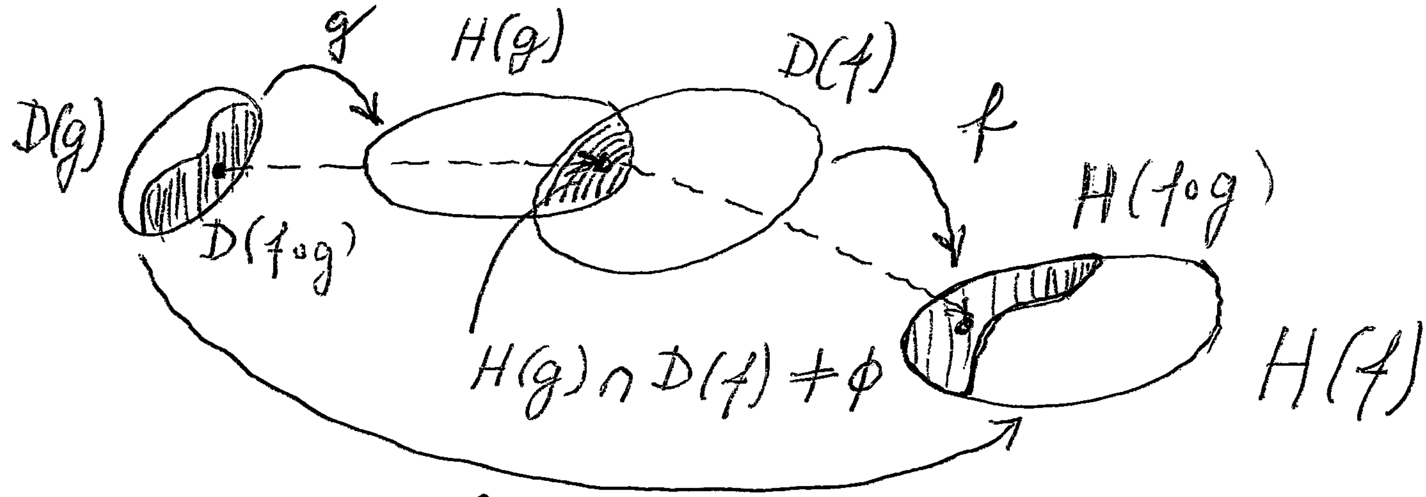
$$g(f(x)) = \cos e^{x};\ x \in \mathbb{R}\ (\text{zkuste graf}).$$

Zkusme prověřit, že $g\circ f \neq f\circ g$: stačí najít jediný bod, v němž se liší funkční hodnoty (def. oborem je u obou celá reálná osa $\mathbb{R}$); zkusme bod $x_0 = 0$.

$(g\circ f)(0) = \cos e^{0} = \cos 1$; určitě platí $\cos 1 < 1$;
$(f\circ g)(0) = e^{\cos 0} = e^{1} = e \doteq 2{,}71828\ldots > 1$. Jsme hotovi.

Pokud bychom měli k dispozici grafy, třeba z počítače, bylo by to jistě názornější.

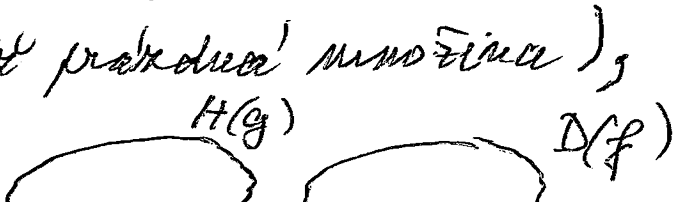
FUNKCE $f(g)$ a $g(f)$ se mohou lišit def. oborem, předpisem, případně obojím ("SKLÁDÁNÍ FCÍ NENÍ KOMUTATIVNÍ") jak to bude s definičním oborem a s oborem funkčních hodnot pro složenou funkci? Zkusme schematický obrázek:



$h = f \circ g = f(g)$

Taková x z $D(g)$, pro která má mít výraz $f(g(x))$ smysl, musí splňovat: $g(x) \in D(f)$.

Kontrolní otázka: mohu skládat libovolně zvolené funkce (ve zvoleném pořadí)? Odpověď je: teoreticky ANO, ale výsledkem může být "prázdná" funkce ($D(h)=\emptyset$, $H(h)=\emptyset$, funkční předpis sice mohu zapsat, ale nebude mít použití; graf h je rovněž prázdná množina), odpovídá to situaci:



$\boxed{\text{CV}}$ Zkuste složit funkce postupně v jednom i v druhém pořadí:

$g(x) = -x^2-1$, $D(g) = (-\infty, \infty)$,

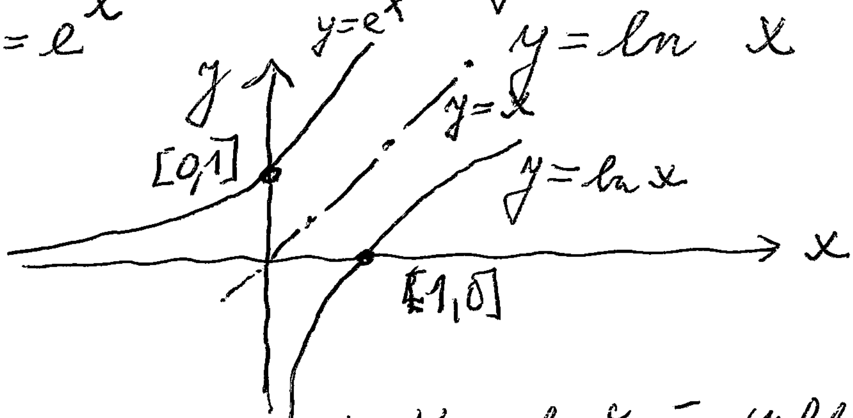
$f(x) = \sqrt{x}$. Stanovte def. obory i obory hodnot pro všechny funkce.

K INVERZNÍ FUNKCI

Jdeme na inverzní funkci, o té už něco víte. Připomeňme si dvojici funkcí

exponenciální fce – logaritmus, přirozený,

$y = e^x$ $y = \ln x$



Jejich grafy jsou souměrně položené vzhledem k ose 1. a 3. kvadrantu, tj. k přímce $y = x$. Stejnou zákonitost najdeme pro každou dvojici (vzájemně) inverzních funkcí.

Př. Uvažujme rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční rychlostí; dráha s, čas t a zrychlení a jsou vázány vztahem $s = \frac{1}{2} a t^2$. Pro pevnou danou dráhu s_0 mohu buď vyjádřit čas pomocí zrychlení, nebo naopak. Postupně máme

$$a t^2 = 2 s_0, \quad a = \frac{2 s_0}{t^2} = a(t),$$

$$t^2 = \frac{2 s_0}{a}; \quad t = \sqrt{\frac{2 s_0}{a}} = t(a).$$

(a předpokládáme, že čas $t > 0$)

Pozorujme schema: $t \xmapsto{a(t)} a \xmapsto{t(a)} t$,

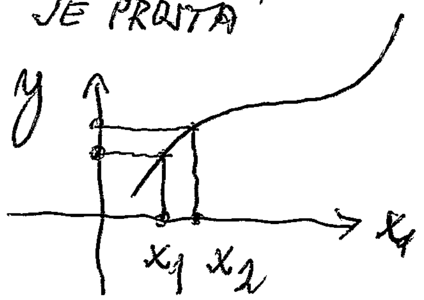
podobně $a \xmapsto{t(a)} t \xmapsto{a(t)} a$

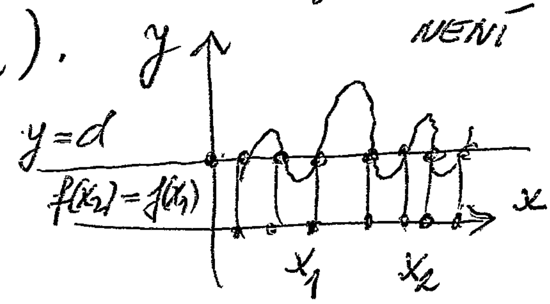
postupným složením se „dostanu zpátky".

KDY MOHU OČEKÁVAT EXISTENCI INVERZNÍ FUNKCE? (Je to jakási "cesta zpět" a musí být jednoznačně určena).

POZN. Připomeňme, že funkce je PROSTÁ, jestliže ke dvěma různým hodnotám $x_1 \neq x_2$; $x_1, x_2 \in D(f)$ nemůže patřit stejná funkční hodnota, tedy je

$$f(x_1) \neq f(x_2).$$





Jestliže f je prostá na $A = D(f)$, potom k ní inverzní funkce, označení f^{-1}, EXISTUJE na $D(f^{-1}) = H(f)$, je dána vztahem

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

$$\begin{tikzcd} D(f) \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "||"] & H(f) \arrow[d, phantom, "||"] \\ H(f^{-1}) & D(f^{-1}) \arrow[l, "f^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Platí: $[x,y] \in$ graf f právě když $[y,x] \in$ graf f^{-1},

$D(f) = H(f^{-1})$, $H(f) = D(f^{-1})$, tedy funkce f, f^{-1} mají

- vyměněný def. obor a obor hodnot příslušné funkce
- vzájemné složení rovné příslušné identické funkce:

pro každé $x \in D(f)$, $f^{-1}(f(x)) = x$,

pro každé $y \in D(f^{-1}) = H(f)$, $f(f^{-1}(y)) = y$.