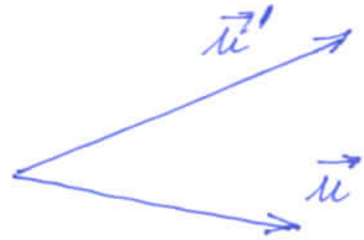
Vlastní čísla a vlastní vektory matice

motivace.

uvažujme $n=2$, zvolme regulární matici $A=(a_{ij})$ řádu 2 a vektor $\vec{u}=(u_1,u_2)$, který zapíšeme jako sloupeček, $U=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$. Napíšeme součin (matic) $A.U$, výsledek označíme U':

$$\underbrace{\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}}_{U}=\underbrace{\begin{pmatrix}u_1'\\u_2'\end{pmatrix}}_{=U'}$$



Vztah můžeme vysvětlit tak, že matice A působí, funguje, na vektorech jako "TRANSFORMAČNÍ MATICE", způsobuje zobrazení $A: \vec{u}\to\vec{u}'=A\vec{u}$ vektoru na (možná jiný) vektor. Řada geometrických a technických aplikací vede na následující úlohu:

Zjistěte, zda existují vektory, které se působením matice A transformují na svůj násobek, tedy:

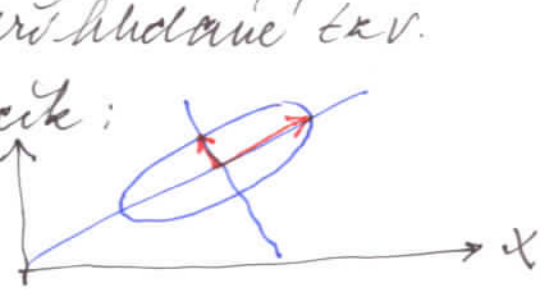
pro danou A hledám vektor $\vec{u}\neq\vec{o}$ tak, aby platilo:

$$A\cdot\vec{u}=\lambda\cdot\vec{u} \qquad \text{v maticích: } \underbrace{A.U}_{}=\underbrace{\lambda.U}_{=U'}$$

Úlohu můžeme formulovat pro libovolné n.

Pro $n=2$ se řešení úlohy objevuje při hledání tzv. hlavních směrů (a os) kuželoseček:

(když osy nebo osa kuželosečky NENÍ rovnoběžná s osou x ani y soustavy souřadnic).



Pro $n=3$ podobně hledáme osy kvadrik $\begin{cases}\text{elipsoid}\\ \text{hyperboloidy}\\ \text{paraboloid}\end{cases}$ analyticky. – bude v DG obecně neúspěšná $\lambda \in \mathbb{C}$! C2

Jak takové vektory $\vec{u}$ a "násobky" $\lambda \in \mathbb{R}$ budeme hledat? Nejprve si vhodně přepíšeme maticovou rovnici $A\vec{u} = \lambda\vec{u}$ do tvaru $A\vec{u} = \lambda(E\vec{u})$, převedu do leva, vytknu "vektor"

ZÁPIS SOUSTAVY ROVNIC $\boxed{(A-\lambda E)\vec{u} = 0}$ → sloupec pravých stran; nulová matice

kde mohu mít sloupcovou matici U - její prvky HLEDÁM,

mám tedy soustavu HOMOGENNÍCH rovnic s maticí soustavy $(A-\lambda E)$, homog. soustava má NETRIVIÁLNÍ řešení $U \neq 0$ právě tehdy, když

$P_n(\lambda) = \underbrace{\det(A-\lambda E_n)}_{\text{determinant soustavy}} = 0$ - začnu tím, že tuto rovnici vyřeším, najdu možné hodnoty pro λ a pak pro každé nalezené λ řeším odpovídající homog. soustavu pro složky vektoru.

polynom st. n v λ, MŮŽE MÍT KOŘENY reálné / komplexní!

NEMUSÍ SE MI PODAŘIT NAJÍT ROZKLAD POLYNOMU $P_n(\lambda)$!

Užívaná terminologie:

$A-\lambda E_n$ charakteristická matice příslušná k matici A

$\det(A-\lambda E)$ charakteristický polynom matice A

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vlastní čísla matice A = kořeny char. polynomu $|A-\lambda E| = P_n(\lambda)$.

$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = \operatorname{Sp} A$ ... spektrum matice A ... soubor vlastních čísel, každé je uvedeno tolikrát, jaká je jeho NÁSOBNOST jako kořene

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ VLASTNÍ VEKTORY matice A odpovídající vlastnímu číslu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nebo $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ (může mít komplexní souřadnice)

$V_\lambda(A)$ – vlastní „podprostor" ← není přesné, nepočítáme tam nulový vektor, který by byl příslušný vlast. číslu λ neurčil každý $\lambda \in \mathbb{R}$

$$V_\lambda(A) = \{ \vec{x} \in \mathbb{C}^n ; \underbrace{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}_{}, \vec{x} \neq \vec{o} \}$$

existuje $\lambda \in \mathbb{C}$.

Je-li λ k-násobným kořenem char. polynomu, říkáme, že **k je algebraická násobnost kořene λ**

je-li l „maximální počet" lineárně nezávislých řešení soustavy $(A-\lambda E)\vec{x} = \vec{o}$:

l je geometrická násobnost č. λ

(obecně může nastat $k \neq l$)

Př. Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}. \qquad \text{CHARACT. MATICE: } A-\lambda E_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 3 & -2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Řešení. Napíšeme charakteristickou rovnici

CH.R.

$$0 = \begin{vmatrix} -\lambda & +1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-2-\lambda) - (+3) = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda+3)(\lambda-1)$$

vyhýbáme si „roznásobení" pokračovat ve výpočtu det.

Tedy: kořeny charakteristické rovnice jsou

vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$; $\operatorname{Spec} A = \{1, -3\}$;

obě vlastní čísla mají algebraickou násobnost rovnu 1. Budeme hledat odpovídající vlastní vektory – nepřekvapí nás, že jich bude pro každé z vlastních čísel 1-parametrické množství, řešíme totiž homogenní soustavu rovnic.

$\boxed{\lambda_1 = 1}$: CH.M. $A - \lambda E_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2-1 \end{bmatrix}$, řešíme charakteristickou soustavu

CH.S. $-u_1 + u_2 = 0 \quad /\cdot(-3)$, dostaneme 2. rovnici;

$3u_1 - 3u_2 = 0$ – „nadbytečná" $\sim \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Z 1. rovnice: $\boxed{u_2 = u_1}$ – všechny vlastní vektory tvaru

$V_1(A) = \{(t, t);\ t \in \mathbb{R},\ \underline{\underline{t \neq 0}}\}$

vezmeme JEDEN TAKOVÝ vektor, např. $(1,1)$, ten bude všechny „generovat":

$V_1(A) = \{t \cdot \underbrace{(1,1)}_{};\ t \in \mathbb{R},\ \underline{\underline{t \neq 0}}\}$

$-(-3)$

$\boxed{\lambda_2 = -3}$: $A + 3E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ... CH.M. $\sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ V. BÁZE

$-2-(-3) = 3-2 = 1$

CH.S. $3u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -3u_1$ (např. $u_1 = 1$)

$3u_1 + u_2 = 0$ – stejná rov. jako první, nedá nic nového

$V_{-3}(A) = \{t \cdot \underbrace{(1,-3)}_{\to \text{ vektor báze}};\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\} =$

$= \{(t, -3t);\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\}$.

Dá se ukázat: pro čtvercové matice řádu n platí:

1. vlastní vektory odpovídající RŮZNÝM vlastním číslům jsou lineárně nezávislé. (DK-skripta)
2. jestliže pro každé vlastní číslo platí, že jeho

algebraická násobnost (jako kořene) = geometrická násobnost (jako dimenze vlastního podprostoru),

pak existuje právě n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice.

Je-li (reálná) matice A navíc SYMETRICKÁ!, $A^T = A$, pak

③ všechna vlastní čísla (této symetr. matice) jsou reálná! (hodí se u kuželoseček a kvadrik)

④ vlastní vektory (reálné symetrické!) matice vzhledem k různým vlastním číslům jsou kolmé = ortogonální. $\perp$

Př. Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}. \qquad \text{CHAR. MATICE: } \begin{bmatrix} -1-\lambda & 3 & 4 \\ -2 & 3-\lambda & 5 \\ 2 & -2 & -4-\lambda \end{bmatrix}.$$

CH. ROV.: $|A-\lambda E| = 0$, u nás:

$$0 = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 4 \\ -2 & 3-\lambda & 5 \\ 2 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 2 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} =$$

"odbydu si" VYTKNU z řádku $(1-\lambda)$

$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -\lambda-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

rozvoj Laplaceův podle 2. sloupce

nuly - nepíši

$$= (1-\lambda)\left(-0\cdot|\;| + 1\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\lambda-1 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} - 0\cdot|\;|\right) = (1-\lambda)\cdot(\cancel{-2}+2\lambda-\lambda+\lambda^2+2\lambda+\cancel{2}) =$$

NEROZNÁSOBUJI, POTŘEBUJI ROZLOŽIT! 3 KOŘENY

$$= (1-\lambda)\cdot(\underbrace{\lambda^2+3\lambda}_{\lambda \text{ VYTKNU}}) = \underbrace{\lambda}_{(\lambda-0)}\cdot\underbrace{(1-\lambda)}_{(-1)\cdot(\lambda-1)}\cdot(\lambda+3)$$

KOŘENOVÉ ČINITELE

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_3 = -3$

$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ POŘADÍ NAPŘ. PODLE VELIKOSTI

$\text{Spec}\, A = \{1, 0, -3\}$

Pozn. U zkoušky by mohlo být zadáno: najděte všechna vlastní čísla matice a pro < největší / nejmenší vl. číslo určete vlastní vektor.
(stačí jeden konkrétní v daném směru)

Hledání vlastních vektorů příslušných k vlast. číslu:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ char. matice

Upravená matice dává soustavu:

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ldots\ 2u_1 = 3u_2 + 4u_3, \ \boxed{u_1 = \frac{7}{2} u_3} \\ \ldots\ -u_2 + u_3 = 0, \ \boxed{u_2 = u_3} \\ \end{matrix}$$

dosadíme

Frob. v.: $n = 3$, $h = 2$, $p = n - h = 3 - 2 = 1$ parametrů

volím $u_3 = t$ $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0 (!)$ pro vl. vekt.

dopočítání: $u_2 = t$,

$u_1 = \frac{7}{2} t$. (lepší bylo užít $u_3 = 2p$).

zlomek

speciální volba $u_3 = 2$, vyjde: $u_1 = 7$, $u_2 = 2$

jeden vlastní vektor je $\vec{x}_1 = (7, 2, 2)$ ← SAMI: zkouška

všechny vl. vektory příslušné vlast. číslu $\lambda_1 = \boxed{1}$:

$$V_{\boxed{1}}(A) = \{p \cdot (7, 2, 2);\ p \in \mathbb{R},\ p \neq 0\} =$$

$$= \{(7p, 2p, 2p);\ p \in \mathbb{R},\ p \neq 0\}.$$

(nejsou tu zlomky)

$\boxed{\lambda_2 = 0}$ char. matice $= A$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & +4 & +4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \ldots\ u_1 = 3u_2 + 4u_3 \\ \ldots\ u_2 = -u_3 \\ \end{matrix}$$

potom, napřed

dosadíme ⇒ $u_1 = u_3$

$p = n - h = 3 - 2 = 1$

volíme: $u_3 = t$

dopočítání: $u_1 = t$, $u_2 = -t$

$$V_0(A) = \{(t, -t, t);\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\} =$$

$$= \{t(1, -1, 1);\ t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$$

$u_3 = 1$

$u_1 = 1$, $u_2 = -1$

$\vec{x}_2 = (1, -1, 1)$ jeden vl. vektor k $\lambda_2 = 0$.

ZK. – SAMI

$\boxed{\lambda_3 = -3}$ char. matice

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -2 & 6 & 5 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{\boxed{-1}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} /\cdot\frac{1}{5} \\ /\cdot\frac{1}{4} \\ \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\boxed{-1}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

výměna řádků

hledaný vlastn. vektor (u_1, u_2, u_3) tedy řeší soustavu rov.

$$2u_1 - 2u_2 - u_3 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}(2u_2 + u_3)$$ chci SUDÉ

$$u_2 + u_3 = 0 \Rightarrow u_2 = -u_3$$

volíme:	$u_3 = -2t$	$u_3 = -2$
dopočítáme:	$u_2 = -(-2t) = 2t$	$u_2 = -(-2) = 2$
	$u_1 = \frac{1}{2}(4t - 2t) = t$	$u_1 = \frac{1}{2}(4-2) = 1$
		$\vec{x}_3 = (1, 2, -2)$

$$V_{-3}(A) = \{(t, 2t, -2t);\ t \in \mathbb{R}, t \neq 0\} =$$
$$= \{t \cdot (1, 2, -2);\ t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}.$$

Podívejte se na dva příklady a), b) vyřešené ve skriptu
V. Tryhuk, O. Dlouhý: MATEMATIKA I, modul GA01-M01,
Vybrané části a aplikace vektorového počtu (vzadu).

Poučný je zejména příklad b) pro matici $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$.

Vyjde jeden kořen dvojnásobný,
spektrum matice A je $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Pro $\boxed{\lambda_1 = 0}$: $\vec{x}_1 = (1, 1, -1)$, $V_0(A) = \{t \cdot (1, 1, -1);\ t \in \mathbb{R}, t \neq 0\}$,

pro $\lambda_{2,3} = 1$ vyjde 2-dimenzionální podprostor vlast. vektorů

$$V_1(A) = \{(3s + 2u, u, 2s);\ u, s \in \mathbb{R},\ (u, s) \neq (0, 0)\} =$$
$$= \{s(3, 0, 2) + u(2, 1, 0)\}$$

pro vl. číslo $\lambda_{2,3} = 1$: $\left\{\begin{matrix}\text{algebraická} \\ \text{geometrická}\end{matrix}\right.$ násob. je 2.