EUKLIDOVSKÝ PROSTOR E_3, JEHO VEKTOROVÉ ZAMĚŘENÍ $V(E_3)$

S trojrozměrným euklidovským prostorem jste se setkali na střední škole, stručně připomeneme, co budeme potřebovat.

E_3: jeho prvky jsou BODY,

- každému bodu $A \in E_3$ je jednoznačně přiřazena uspořádaná trojice reálných čísel (říkáme jim souřadnice bodu A), $A=[a_1,a_2,a_3]\in\mathbb{R}^3$,
  podobně $B=[b_1,b_2,b_3]\in\mathbb{R}^3$.
- dvojice bodů A, B je reál. číslo jako jejich euklidovská vzdálenost, ta se souřadnicemi bodů souvisí takto:

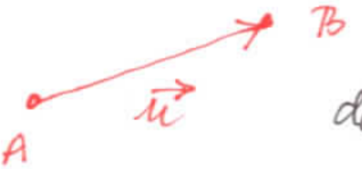
$$\underbrace{\rho(A,B)}_{\text{vzdálenost } A,B} = \underbrace{\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}}_{\text{v tom je "Pythagorova věta"}}$$

Zároveň máme možnost pracovat s vektory, ty se dají zavést např. přes "geometrický pojem". Každé uspořádané dvojici (A,B) bodů přiřadíme "orientovanou úsečku"

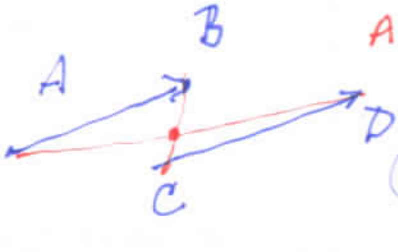
$\vec{u}=\vec{AB}$, říkáme jí umístěním vektoru

| je v tom historická fyzikální představa – SÍLA |

s počátečním bodem A a s koncovým bodem B



VEKTOR $\vec{u}$ je třída orientovaných úseček: volný vektor



Vázaných úseček, které mají stejnou velikost, směr (or.)
(A,B) a (C,D) patří do stejné třídy $\vec{u}$ $\Leftrightarrow$ úsečky (A,D) a (B,C) MAJÍ TÝŽ STŘED

Souhrn všech vektorů (= takových tříd) nazveme vektorovým zaměřením prostoru $\mathbb{E}_3$, značíme ho $V(\mathbb{E}_3)$.

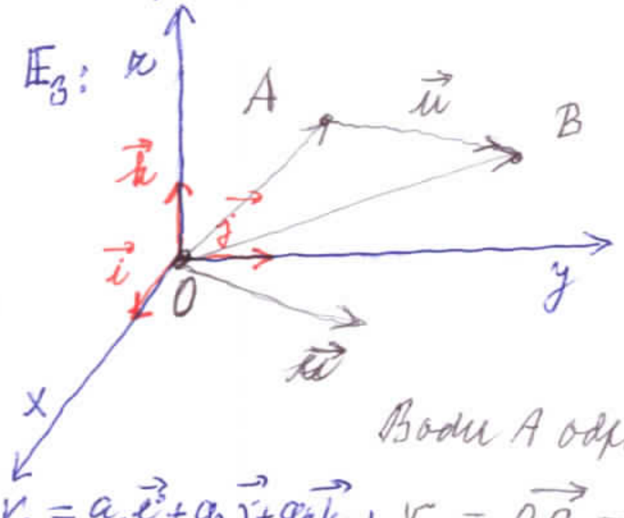
Pro lib. bod $A \in \mathbb{E}_3$ a lib. $\vec{u} \in V(\mathbb{E}_3)$ existuje JEDINÝ BOD $B \in \mathbb{E}_3$ tak, že $\vec{AB} = \vec{u}$.

souhrn vektorů

Kromě označení $\vec{u} = \vec{AB}$ se také užívá:

$$B = A + \vec{u}, \quad \text{nebo:} \quad \vec{u} = B - A$$

Proč? souvisí to se stanovením složek vektoru ze známých souřadnic počátečního a koncového bodu.



v $\mathbb{E}_3$ uvažuji POČÁTEK O, na osách x, y, z jednotkové vektory

$\vec{i} = e_1 = (1,0,0)$

$\vec{j} = e_2 = (0,1,0)$

$\vec{k} = e_3 = (0,0,1)$

prvky z $\mathbb{R}^3$, avšak v. jsou lin. nezávislé, každý další vektor je jejich lin. kombinací

Bodu A odpovídá "radius vektor"

$r_A = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $r_A = \vec{OA} = (a_1, a_2, a_3)$, složky vektoru,

pak bod má souřadnice $A = [a_1, a_2, a_3]$;

podobně pro bod B:

$r_B = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $r_B = \vec{OB} = (b_1, b_2, b_3)$, $B = [b_1, b_2, b_3]$;

vektory umíme SČÍTAT, platí

$$\underbrace{\vec{OA}}_{\text{dosadíme}} + \vec{AB} = \underbrace{\vec{OB}}_{\text{dosadíme}}$$

/ přičtu "opačný" vektor k $\vec{OA}$

VYJDE: $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = r_B - r_A = \underbrace{(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)}_{\text{Symbolicky: "} B - A \text{"}}$

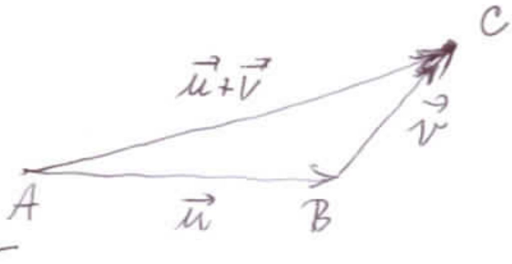
Pokud $B = A$: toto připouštíme, jak jsme zadali tzv.

NULOVÝ VEKTOR $\vec{o} = \vec{AA}$ (má zvláštní postavení vzhledem k sčítání vektorů)

Jaké úkony můžeme pro prvky z $V(E_3)$ dělat, jaké vlastnosti mají:

vektory můžeme $\boxed{\text{SČÍTAT}}$

• je-li $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{BC} = \vec{v}$, pak $\vec{u} + \vec{v} \overset{\text{"zavedu jako"}}{=} \vec{AC}$.



sčítání splňuje:

• nezáleží na pořadí,
$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

• je asociativní – mohu libovolně uzávorkovat:
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

• jestliže $\vec{u} = \vec{AB}$, potom výměna bodů A, B vede na vektor
$\underbrace{-\vec{u}}_{\text{vektor opačný k vektoru } \vec{u}} = \vec{BA}$ (změna orientace vektoru)

Dá se ukázat: • ke každému v. $\vec{u} \in V(E_3)$ existuje (jediný) opačný vektor $-\vec{u}$ tak, že $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$.

• pro nulový vektor platí: $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$ $(= \vec{o} + \vec{u})$

vektory mohu $\boxed{\text{NÁSOBIT SKALÁREM}}$ $k \in \mathbb{R}$ (číslem):

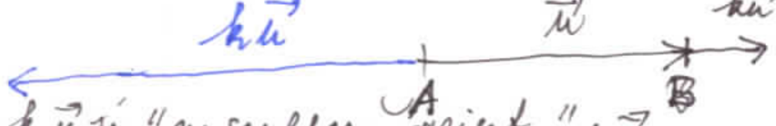
$0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$

číslo nula

$k \cdot \vec{o} = \vec{o}$

$k \in \mathbb{R}$

pokud bychom už VĚDĚLI, že velikost vektoru $\vec{u}$ $\overset{\parallel}{\vec{AB}}$ je $\|\vec{u}\|$ ← velikost vektoru = NORMA



$\boxed{k>0}$: $k\vec{u}$ je "rovnoběžný" a "souhlasně orientovaný" s $\vec{u}$,
$\|k\vec{u}\| = k \cdot \|\vec{u}\|$

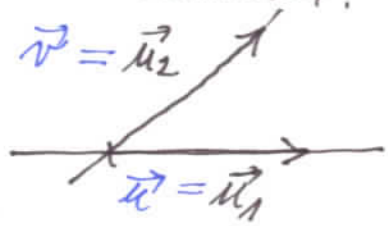
$\boxed{k<0}$: $k\vec{u}$ je "nesouhlasně orient." s $\vec{u}$,
$\|k\vec{u}\| = |k| \cdot \|\vec{u}\|$

Dá se ukázat:

- $(k.l)(\vec{u}) = k.(l.\vec{u})$ pro $k,l \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V(E_3)$
- $k.(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k+l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
- $1.\vec{u} = \vec{u}$

$k\vec{v} + l\vec{u} = \vec{o}$ platí JEN PRO $k = 0 = l$.

NEKOLINEÁRNÍ VEKTORY:



někdy se říká, že vektory jsou:
kolineární, jestliže existují jejich umístění, která leží na 1 přímce

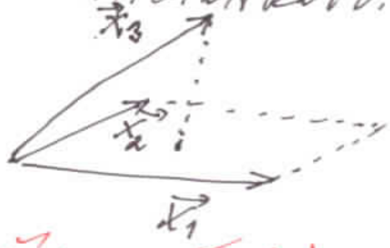
je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$: $\vec{u}, \vec{v}$ jsou kolineární $\iff$ existuje $l \in R$: $\vec{v} = l\vec{u}$.

($\vec{u} = \vec{o}$ je kolineární s KAŽDÝM vektorem)

$\to$ ex. $k, l \in \mathbb{R}$, $(k,l) \neq (0,0)$: $k\vec{v} + l\vec{u} = \vec{o}$

komplanární, jestliže existuje jejich umístění rovnoběžná s 1 rovinou

NEKOMPLANÁRNÍ V.:



nedají se umístit do roviny

REÁLNÝ LINEÁRNÍ PROSTOR
= VEKTOROVÝ

Vektorové zaměření $V(E_3)$ je důležitý příklad, „MODEL", tzv. vektorového (= lineárního) prostoru: bude to obecnější struktura, jeho prvkům budeme často říkat VEKTORY, ale mohou být obecnější povahy (třeba matice daného typu), musí na nich být dané opět sčítání s vlastnostmi, které jsme zmínili u $V(E_3)$, a také násobení skalárem (z $\mathbb{R}$), opět splňující jisté vlastnosti.

(Reálný) lineární prostor je množina $W = \{u, v, w, x, y, z, \ldots\}$
= vektorový

prvky nazveme VEKTORY

nějakých prvků spolu se zadanými operacemi

(1) sčítání + na množině W, tj. pro $u, v \in W$, pak $u + v \in W$

(2) násobení prvků z W reálným číslem (skalárem) ZLEVA, tj. je-li $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in W$, pak $\alpha u \in W$,

které splňují následující POŽADAVKY (= AXIOMY, z řečtiny: axióma):

8 POŽADAVKŮ

pro „+" operaci 4

- $x + y = y + x$ $(x, y, z \in W)$
- $(x + y) + z = x + (y + z)$
- existuje „nulový prvek" $o \in W$ takový, že $x + o = x$ pro všechna $x \in W$
- ke každému $x \in W$ existuje $-x \in W$ takové, že platí $x + (-x) = o$.

opačný k x

4 pro násobení skalárem:

- $1 . x = x$ $(x, y \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
- $\alpha(\beta x) = (\alpha \beta) x$
- $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$
- $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$

Př. $V(E_3)$, vektorové zaměření prostoru E_3, spolu se zavedeným sčítáním a skalárním násobením, má všechny uvedené vlastnosti a je tedy „modelem" lineárního prostoru.

Př. ČTVERCOVÉ MATICE řádu 2 (nebo obecně n, $n \in \mathbb{N}$) spolu se sčítáním matic a násobením matice skalárem (zleva) tvoří lineární prostor:

nulový prvek je matice $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

k matici $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ existuje opačná matice $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$

tak, že platí $A + (-A) = O$,

všechny další vlastnosti se dají prověřit (SAMI).

Př. aritmetické vektorové prostory

$\mathbb{R}^2$, spolu se sčítáním po složkách a skalárním násobkem

$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ $\quad \alpha.(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)$

je lineární (= vektorový) prostor,

stejně tak $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ pro $n \in \mathbb{N}$

SAMI: $+$, α.

abychom mohli zavést pojem DIMENZE lin. prostoru, potřebujeme zavést:

Definice. Řekneme, že vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$ z W tvoří BÁZI lineárního prostoru W, jestliže

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou LNZ (lineárně nezávislé)
- pro KAŽDÝ $x \in W$ existuje skupina čísel $c_1, c_2, \dots, c_n$ – koeficientů lineární kombinace – tak, že $x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$.

Připomeňme: $x_1, \dots, x_n$ jsou LNZ, když platí ekvivalence:

$$\underbrace{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n}_{\text{lin. kombinace}} = \underset{\text{ve formulaci}}{o} \iff \underbrace{c_1 = \dots = c_n = 0}_{\text{SAMÉ NULOVÉ KOEFIC.}}$$

Z lineární nezávislosti prvků báze lze dokázat, že přiřazení

$$x \in W \longleftrightarrow (c_1, \dots, c_n) \quad \text{dané vztahem } x = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i$$

je (při dané bázi $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$, i s pořadím) vzájemně jednoznačné, proto x je skupinou čísel jednoznačně určen; budeme říkat:

> $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ jsou **souřadnice** vektoru $x \in W$ vzhledem k bázi $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$; $x = (c_1, \dots, c_n)$. ZÁPIS

Dá se ukázat, že má-li prostor W bázi o n prvcích, pak KAŽDÁ jeho báze bude mít n prvků a můžeme tedy zavést:

Dimenze lineárního prostoru W je počet prvků n jeho (libovolné) báze. (pokud ovšem ve W existuje báze s konečným počtem prvků; existují lineární prostory, ve kterých jsou jen „nekonečné" báze, např. lin. prostor všech polynomů všech stupňů, bází tvoří např. $\langle \underbrace{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots}_{\text{„monomy"}} \rangle$).

Př. Dimenze $\mathbb{R}^2$ je 2: báze $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

Př. Dimenze vektorového zaměření $V(E_3)$ je 3.

Př. SAMI: $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Př. Dimenze lin. prostoru reálných čtverc. matic řádu 2 má dimenzi 4, protože jeho bází je např. skupina matic

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{pro } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}:$$

$$A = aB_1 + bB_2 + cB_3 + dB_4.$$