SOUČINY VEKTORŮ:

SKALÁRNÍ S. — VEKTOROVÝ S. — SMÍŠENÝ S.

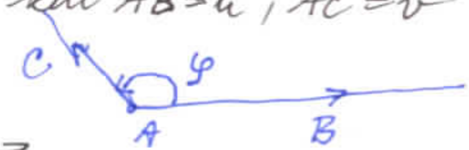
ve $V(E_3)$; v $\mathbb{R}^n$ ... další jsou, u MATIC — ve $V(E_3)$ — ve $V(E_3)$

Skalární součin dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ z $V(E_3)$ se de zavedeme jako

(*) $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\varphi$, jsou-li oba NENULOVÉ $\vec{u}\neq\vec{o}$, $\vec{v}\neq\vec{o}$

kde $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ jsou délky (= normy) vektorů,

φ je úhel vektorů: $\varphi = \sphericalangle(\vec{u},\vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel polopřímek AB, AC, kde $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{AC} = \vec{v}$



$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, jestliže $\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o}$.

Vlastnosti skalár. součinu: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

pro $\vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V(E_3)$ $\quad \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

$(\alpha\cdot\vec{u})\cdot\vec{v} = \alpha\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v})$, $\alpha\in\mathbb{R}$

! $\vec{u}\cdot\vec{u} \geq 0$

VYUŽITÍ:

- výpočet eukleidovské délky (nenulového) vektoru: $\|\vec{u}\| = \sqrt{\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{u}}_{\geq 0}}$

OZN. eukleidovská norma = délka vektoru: $\|\vec{u}\|$
ABSOL. HODN. čísla: $|k|$

$\vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{o}$ (nulový vekt.)

- vyšetřování KOLMOSTI vektorů: = ortogonality

jestliže $\vec{u}\neq\vec{o}$, $\vec{v}\neq\vec{o}$, platí: $\underbrace{\vec{u}\cdot\vec{v} = 0}_{\text{příznak KOLMOSTI vektorů}} \iff \varphi = \frac{\pi}{2}$ $(\varphi = 90°)$

$\vec{o}$ je kolmý ke VŠEM vektorům, i sám k sobě.

$\vec{o} \longrightarrow \vec{v}$

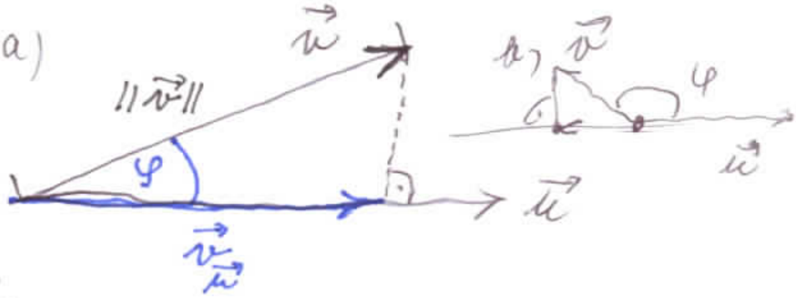
• výpočet úhlu nenulových vektorů (známe-li jejich délky a vzájemný skalární součin):

$$\cos\varphi = \frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|} \quad \text{pro } \varphi\in\langle 0,\pi\rangle .$$

Někdy je třeba najít (aplikace fyzikální, geometrické):

• KOLMÝ PRŮMĚT daného vektoru $\vec v$ do vektoru $\vec u$:

ZNAČÍME $\vec v_{\vec u}$



V obrázku je pravoúhlý trojúhelník, s přeponou $\|\vec v\|$, jedním úhlem φ, přilehlou odvěsnou $\|\vec v_{\vec u}\|$; je tedy

$$\|\vec v_{\vec u}\| = \|\vec v\|\cdot\cos\varphi = \|\vec v\|\cdot\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|}$$

; abychom mohli přejít k vektoru, který má právě vyjádřenou velikost a je kolineární s vektorem $\vec u$ (je mu úměrný), užijeme JEDNOTKOVÉHO VEKTORU $\vec u_0 = \underbrace{\frac{1}{\|\vec u\|}}_{\text{skalár}}\cdot\underbrace{\vec u}_{\text{vektor}}$ ($\|\vec u_0\| = 1$, jsou souhlasně orientované)

a můžeme psát:

$$\vec v_{\vec u} = \underbrace{\|\vec v\|\cdot\cos\varphi}_{\text{skalár}}\cdot\underbrace{\vec u_0}_{\text{vektor}} = \cancel{\|\vec v\|}\cdot\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\cancel{\|\vec v\|}}\cdot\boxed{\frac{\vec u}{\|\vec u\|}} = \underbrace{\frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|^2}}_{\text{skalár}}\cdot\vec u,$$

to je „zkratka", skalár by měl stát zvlášť, ale vidí se to.

Používáme

$$\boxed{\vec v_{\vec u} = \frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|^2}\cdot\vec u}$$

např.:

pohyb po dráze (např. po přímce $p = (A,\vec v)$)

TÁHNU SÁŇĚ, VOZÍK V KOLEJÍCH, ale jde „vedle"!

Tím se dostáváme k dalšímu:

- Práce A, kterou vykoná síla $\vec F$ stálého směru a velikosti po přímé dráze $\vec s$, je dána vztahem:

$$\boxed{A = \vec F \cdot \vec s}$$

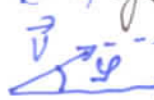
Def. Řekneme, že vektor $\vec e$ z $V(E_3)$ je JEDNOTKOVÝ, jestliže má jednotkovou velikost: $\|\vec e\| = 1$.

(nic to neříká o jeho souřadnicích, složkách).

Jak jsme viděli, z každého nenulového vektoru mohu získat jednotkový tím, že ho násobím převrácenou hodnotou jeho velikosti.

Vektorový součin dvou vektorů $\vec u, \vec v$ z $V(E_3)$ zavádíme jako VEKTOR, označovaný zpravidla $\vec u \times \vec v$, takový, že:

(a) jsou-li $\vec u, \vec v$ NEKOLINEÁRNÍ, je vektor $\vec u \times \vec v$



- kolmý současně k $\vec u$ i k $\vec v$,
- délka vektoru $\vec u \times \vec v$ splňuje — S - Plocha = obsah ROVNOBĚŽNÍKA NATAŽENÉHO NA VEKTORY $\vec u$ a $\vec v$

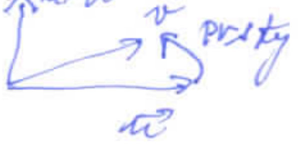
$\|\vec u \times \vec v\| = \|\vec u\| \cdot \|\vec v\| \cdot \sin\varphi$, kde

$\varphi = \measuredangle(\vec u, \vec v) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů

takové by mohly být DVA

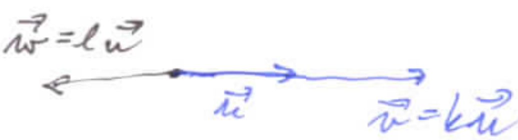
- $\vec u, \vec v, \vec u \times \vec v$ tvoří v prostoru "pozitivní trojici vektorů" ve smyslu "pravidla pravé ruky" – skripta

= kladnou



(b) když $\vec u = \vec o$ nebo $\vec v = \vec o$ nebo $\vec v = k\vec u$, $k \in R$:

$$\vec u \times \vec v = \vec o$$



NEVZNIKÁ ROVNOBĚŽNÍK

Vlastnosti vektorového součinu:

1. záměna pořadí změní znaménko:

$$\boxed{\vec{v}\times\vec{u} = -(\vec{u}\times\vec{v}).} \qquad \vec{w},\vec{u},\vec{v}\in V(E_3)$$

2. roznásobování skalárem:

$$k\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = (k\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k\vec{v}),\quad k\in\mathbb{R}$$

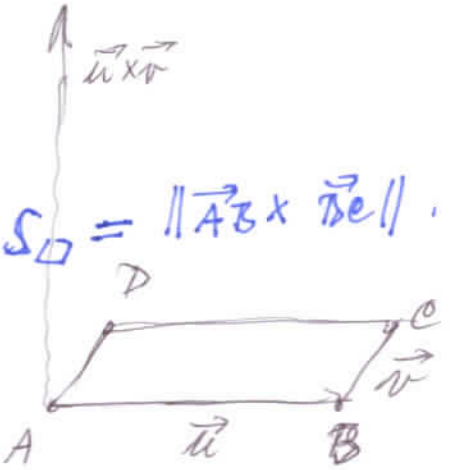
3. roznásobení součtu vektorů:

$$(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$$

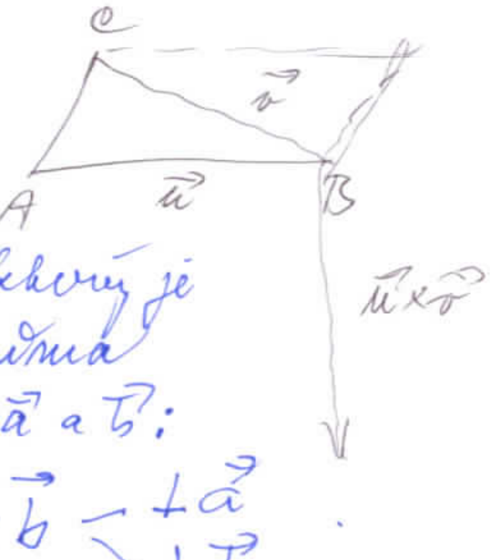
4. $\vec{w}\times(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{w}\times\vec{u} + \vec{w}\times\vec{v}$

UŽITÍ:

(1) Plošný obsah ROVNOBĚŽNÍKU $S_\square = \|\vec{AB}\times\vec{BC}\|$.



(2) Plošný obsah TROJÚHELNÍKU $S_\triangle = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{BC}\|$.
= OBSAH PLOCHY



(3) určení vektoru $\vec{c}$, který je SOUČASNĚ kolmý ke dvěma NENULOVÝM vektorům $\vec{a}$ a $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} \begin{cases}\perp\vec{a}\\ \perp\vec{b}\end{cases}$$

(4) Zjištění, zda dva NENULOVÉ vektory $\vec{u}\neq\vec{o}, \vec{v}\neq\vec{o}$ jsou kolineární; platí totiž:

$$\vec{u}\times\vec{v} = \vec{o} \Leftrightarrow (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi)$$

Vyjádří nám tedy objem jako (po hranicemi ||$\vec{b}\times\vec{c}$|| v čit. jmen.)

$$V = \vec{a} \cdot (\vec{b}\times\vec{c}),$$

ale jenom když je trojice $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ POZITIVNÍ. Pokud to NEVÍME, užijeme na pravé straně absolutní hodnotu | |.

(2) Zjištění, zda jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ KOMPLANÁRNÍ:
současně všechny ROVNOBĚŽNÉ s nějakou ROVINOU

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \Leftrightarrow$ dané vektory JSOU komplanární.

(3) Určení, zda trojice vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je – pozitivní podle pravidla pravé ruky / negativní – není pozitivní

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0 \Leftrightarrow$ POZITIVNÍ TROJICE

$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] < 0 \Leftrightarrow$ NEGATIVNÍ

VEKTORY A JEJICH SOUČINY V ORTONORMÁLNÍ BÁZI prostoru $V(E_3)$.

Pokud vyjádříme souřadnice vektorů vzhledem ke speciálnímu typu báze, nabudou vzorce pro výpočet
- skalárního,
- vektorového
- smíšeného

součinu poměrně JEDNODUCHÉHO tvaru.

Smíšený součin tří vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ z $V(E_3)$ se zavádí takto:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c});$$

na pořadí záleží: protože platí $\vec{c}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{c}$, je

$$[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = \vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b}) = -\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

„smíšené" dvou součinů v 1 vztahu

Dá se ukázat (skripta): výměnou sousedních vektorů se vždy změní znaménko.

VYUŽITÍ: (smíšený součin NENULOVÝCH vektorů)

① Výpočet objemu rovnoběžnostěnu sestrojeného „natahovaného" nad vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ z $V(E_3)$:

$$V = \left|\, [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] \,\right|.$$

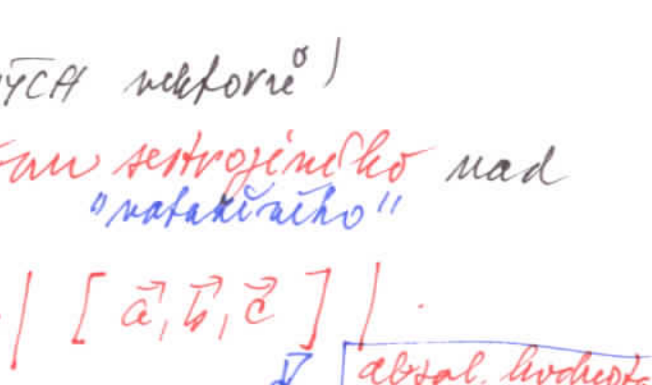
absol. hodnota – aby vyšlo KLADNÉ číslo

(rovnoběžnostěn: stěny jsou rovnoběžníky, vždy dvě v rovnoběžných rovinách, úhly obecně NEJSOU PRAVÉ.

Proč? – vysvětlení:

uvažujme pro jednoduchost pozitivní = kladnou trojici vektorů

v pořadí: $\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}$ - obr. (skripta)



Objem $V = S_{\square}\cdot v$

„podstava" – plošný obsah rovnoběžníka

neznámá hodnota

výška – v

Víme: $S_{\square} = \|\vec{b}\times\vec{c}\|$.

plošný obsah: $S_{\square} = \|\vec{b}\times\vec{c}\|$

Výška v bude průmět (kolmý) délky vektoru $\vec{a}$ do vektoru $\vec{b}\times\vec{c}$, což jsme (někdy ozn. P) odvodili u skalárního součinu:

skalární s.

$$v = \|\vec{a}_{\vec{b}\times\vec{c}}\| = \|\vec{a}\|\cos\underbrace{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}_{\text{úhel vektorů}} = \frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{\|\vec{b}\times\vec{c}\|}.$$

Ortonormální báze ve $V(E_3)$ je uspořádaná skupina

$\perp$ $\quad \|\vec e_i\| = 1$

$$B = \langle \vec e_1, \vec e_2, \vec e_3 \rangle$$

vektorů, které jsou

1) PO DVOU KOLMÉ: $\quad i, j \in \{1,2,3\}$

$$\underbrace{\vec e_i \cdot \vec e_j = 0}_{} \text{ pro } i \neq j$$

příznak toho, že $\vec e_i \perp \vec e_j$

„ortogonalita"

2) každý z nich je jednotkový (ve smyslu velikosti):

$$\|\vec e_i\| = 1, \quad i = 1,2,3.$$

jsou „normované" na jednotkovou délku

Je-li $\|\vec e_i\| = 1$, tj. $\sqrt{\vec e_i \cdot \vec e_i} = 1$, je také $\|\vec e_i\|^2 = \boxed{\vec e_i \cdot \vec e_i = 1.}$

ověřme, že máme PRÁVO je považovat za BÁZI:

(a) JSOU LNZ? (nezávislé)

kdybychom položili

$\boxed{*}$ $\lambda_1 \vec e_1 + \lambda_2 \vec e_2 + \lambda_3 \vec e_3 = \vec 0$,

($\lambda_i \in \mathbb{R}$) pak s užitím skalár. násobení dostaneme, že koeficienty $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Např. pro λ_2 bychom učinili: celou rovnici $\boxed{*}$ násobíme $\quad / \cdot \vec e_2$

a máme:

$$\lambda_1 \underbrace{\vec e_1 \cdot \vec e_2}_{=0} + \lambda_2 \underbrace{\vec e_2 \cdot \vec e_2}_{=1} + \lambda_3 \underbrace{\vec e_3 \cdot \vec e_2}_{=0} = \underbrace{\vec 0 \cdot \vec e_2}_{=0} \Rightarrow \text{odtud } \boxed{\lambda_2 = 0}.$$

(ve skriptu je výpočet λ_1)

Podobně pro λ_3, tím je nezávislost prokázána.

(b) vektor (lib.) $\vec x$ ve $V(E_3)$ pomocí nich mohu zapsat jako lineární kombinaci $\quad \vec x = x_1 \vec e_1 + x_2 \vec e_2 + x_3 \vec e_3$.

$\vec x = (x_1, x_2, x_3)_B$, $\quad x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

souřadnice vektoru vzhledem k bázi B

Ortonormálních bází je nekonečně mnoho (vezmu jednu pevnou a podrobím ji OTÁČENÍ prostoru) (souřadnice vektoru ve dvou různých bázích dopadnou různě).

Skalární součin v ortonormální bázi:

Protože

$$\begin{array}{lll} \vec{e_1}\cdot\vec{e_1}=1 & \vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=0 & \vec{e_1}\cdot\vec{e_3}=0 \\ \vec{e_2}\cdot\vec{e_1}=0 & \vec{e_2}\cdot\vec{e_2}=1 & \vec{e_2}\cdot\vec{e_3}=0 \\ \vec{e_3}\cdot\vec{e_1}=0 & \vec{e_3}\cdot\vec{e_2}=0 & \vec{e_3}\cdot\vec{e_3}=0 \end{array}$$

(pro vektory ortonormální báze $\mathcal{B}$), z vlastností skalárního součinu dostáváme známou formulku

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

POZN. UŽILI JSME V $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

pro vektory $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$,

$\vec{b} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}$ (uvažované vzhledem k bázi $\mathcal{B}$).

Ověříme: $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3})\cdot(b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3}) =$

$= \boxed{a_1b_1}\underbrace{(\vec{e_1}\cdot\vec{e_1})}_{1} + a_1b_2\underbrace{(\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})}_{=0} + a_1b_3\underbrace{(\vec{e_1}\cdot\vec{e_3})}_{=0} +$

$+ \dots$ (SAMI, SKRIPTA)

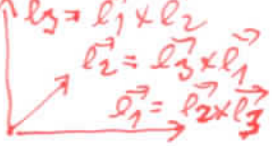
Vektorový součin v ortonormální bázi:

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e_1} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e_2} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e_3} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

pro lepší zapamatování – uspořádáme výpočet do tvaru DETERMINANTU v 1. řádku jsou formálně umístěny VEKTORY ortonorm. báze

Proč: (skripta)



$\vec{a}\times\vec{b} = a_1b_1\,\vec{e_1}\times\vec{e_1} + a_1b_2\,\vec{e_1}\times\vec{e_2} + a_1b_3\,\vec{e_1}\times\vec{e_3} + \dots = \dots$,

UŽIJI:

$$\begin{array}{lll} \vec{e_1}\times\vec{e_1}=0 & \boxed{\vec{e_1}\times\vec{e_2}=\vec{e_3}} & \vec{e_1}\times\vec{e_3}=-\vec{e_2} \\ \vec{e_2}\times\vec{e_1}=-\vec{e_3} & \vec{e_2}\times\vec{e_2}=0 & \boxed{\vec{e_2}\times\vec{e_3}=\vec{e_1}} \\ \boxed{\vec{e_3}\times\vec{e_1}=\vec{e_2}} & \vec{e_3}\times\vec{e_2}=-\vec{e_1} & \vec{e_3}\times\vec{e_3}=0 \end{array}$$

Smíšený součin v ortonormální bázi:

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$ – determinant ze souřadnic vektorů

Proč? (skripta): $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \vec{a} \circ (\vec{b}\times\vec{c})$ označme např. $\vec{d}$,

víme už: $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{d} = \underbrace{(b_2c_3 - b_3c_2)}_{d_1}\vec{e_1} + \underbrace{(b_3c_1 - b_1c_3)}_{d_2}\vec{e_2} +$

d_1 + subdeterminant 2. řádu $\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$, d_2 – (subdet. 2. ř.), $d_2 = -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$

$+ \underbrace{(b_1c_2 - b_2c_1)}_{d_3}\vec{e_3} = d_1\vec{e_1} + d_2\vec{e_2} + d_3\vec{e_3}$,

d_3 + subdeterminant $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$

skalárně vynásobíme:

$\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{d} = a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3$, vyjde vlastně

dosadím subdeterminanty se znaménky $(+ \ - \ +)$ – algebr. doplňky

Laplaceův rozvoj výše napsaného determinantu PODLE 1. řádku.

Aplikace

Př. Určete vektor $\vec{c}$ tak, aby kolmý současně k vektorům

$\vec{a} = \vec{e_1} - 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{b} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}$.

POZOR: takových v. je nekonečně mnoho, Pokud daní DÉLKU: 2

Řešme: jeden takový vektor je $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \overbrace{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}^{2-1}\vec{e_1} - \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}^{(-1-2)}\vec{e_2} + \overbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}^{1-(-4)}\vec{e_3} =$ $\vec{c}$, $-\vec{c}$

$= \vec{e_1} + 3\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$ $\quad \boxed{\vec{c} = (1,3,5)_{\mathcal{B}}}$

(ve skriptu je tisková chyba)

CV Rozmyslete si: jakou velikost („délku") má vámi nalezený vektor $\vec{c}$?
Jaká bude odpověď na pozměněnou otázku: jak budou vypadat vektory, které jsou kolmé k $\vec{a}$ i k $\vec{b}$ a mají velikost $\sqrt{35}$?

Př. Určete OBJEM V rovnoběžnostěnu, který je sestrojen nad vektory
$$\vec{a} = \vec{e_1} - 3\vec{e_3},$$
$$\vec{b} = \vec{e_1},$$
$$\vec{c} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}.$$

Je $V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$,

max $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 1 \end{vmatrix} = \underbrace{1 \cdot (-1)^5}_{(-1)} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{(0-(-3))} = \underline{\underline{-3}}$,

Lapl. rozvoj

tedy objem $V = |-3| = \underline{\underline{3}}$.

absolutní hodnota zde tyto určuje!

Skupina $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ je negativní (není pozitivní).

K označení.

Jestliže najdeme v E_3, zvolíme pevný bod O jako počátek, vybereme PEVNOU ortonormální bázi ve $V(E_3)$, dostaneme kartézský souřadnicový systém $\langle O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle$ s osami

někdy se značí $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$

(René Descartes, Cartesius-) zakladatel analytické geometrie

souřadnic x ... přímka $(O; \vec{e_1})$

y ... $(O; \vec{e_2})$

z ... $(O; \vec{e_3})$

Libovolnému bodu A odpovídá Polohový vektor bodu A (= vázaný vektor)

$$\vec{v}_A = \vec{OA} = \underbrace{x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j} + z_A\,\vec{k}}$$

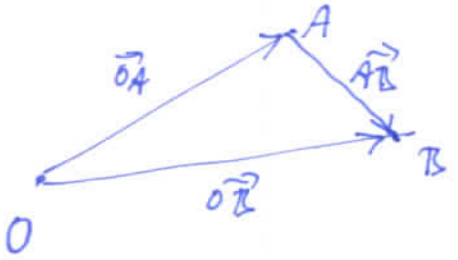
zapisujeme to: $A=[x_A, y_A, z_A]$ souřadnice bodu A zkráceně: (x_A, y_A, z_A)

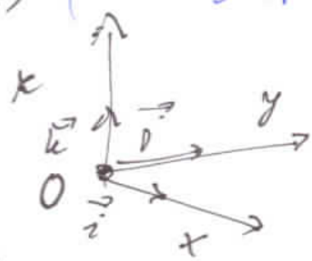
Je-li podobně

$B=[x_B, y_B, z_B]$, je body A a B určen VEKTOR

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (x_B - x_A)\,\vec{i} + (y_B - y_A)\,\vec{j} + (z_B - z_A)\,\vec{k} =$$

$$= (x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A) \quad \left(= \text{"}B - A\text{"}\right)$$





Řadu vlastností geometrických útvarů můžeme odvodit s použitím SOUŘADNIC.

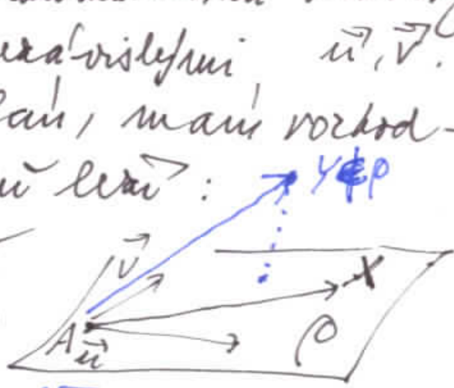
ROVINA A PŘÍMKA v E_3.

$\boxed{\text{ROVINA}}$

Uvažujme $\rho = [A; \vec{u}, \vec{v}]$ ... to je rovina daná bodem A a dvěma nekolineárními vektory $\vec{u}, \vec{v}$.
= nezávislými

Jak poznáme, že $X \in \rho$ ... nějaký bod X je dán, máme rozhodnout, zda v rovině leží:

$X \in \rho \iff \vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ jsou komplanární (= lin. závislé)



1. cesta: $\boxed{[\vec{AX}, \vec{u}, \vec{v}] = 0}$ podmínka KOMPLANÁRNOSTI

levá strana:
$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (x - x_A)\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - (y - y_A)\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} +$$
$$+ (z - z_A)\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Dopočítání levé strany nás dovede k rovnici tvaru

$$ax + by + cz + d = 0,$$

což je obecná rovnice roviny ρ.

2. cesta: komplanárnost mohu vyjádřit také tak, že vektor $\vec{AX}$ se dá vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, např. jako

$$\vec{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}, \text{ kde } \underbrace{t, s}_{\text{"parametry" bodu } X} \in \mathbb{R}$$

tuto vektorovou rovnici mohu rozepsat do složek jako

$$\begin{aligned} x &= \underbrace{x_A}_{} + t\,u_1 + s\,v_1, \\ y &= y_A + t\,u_2 + s\,v_2, \\ z &= z_A + t\,u_3 + s\,v_3 \end{aligned}$$

$\to \vec{u}$ $\to \vec{v}$

souřadnice bodu A

... dostanu tzv. PARAMETRICKÉ ROVNICE pro ρ

normálový vektor $\vec{n}_\rho = (n_1, n_2, n_3)$ roviny ρ je vektor k rovině ρ kolmý. Víme, že tuto vlastnost má např. vektor $\vec{u} \times \vec{v}$; každý jiný normálový vektor musí být jeho NÁSOBKEM:

$$\vec{n} = k \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{R}, k \neq 0$$

(mohu brát $k = 1$)

3. cesta: $X \in \rho \iff \vec{n}$ a $\vec{AX}$ jsou KOLMÉ vektory:

$$0 = \vec{n} \cdot \vec{AX} = (n_1, n_2, n_3) \cdot (x - x_A, y - y_A, z - z_A) =$$

mohu užít vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ PŘÍMO!

$$\| \qquad = n_1 x + n_2 y + n_3 z + (-n_1 x_A - n_2 y_A - n_3 z_A)$$

$$k \cdot (ax + by + cz + d)$$

Porovnáme: $k(a, b, c) = (\underbrace{n_1, n_2, n_3}_{\vec{u} \times \vec{v}})$ kolineární

$$\boxed{\vec{n} = k \cdot (a, b, c)}$$