Průběh funkce

Př. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$.

(1) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,\infty)$

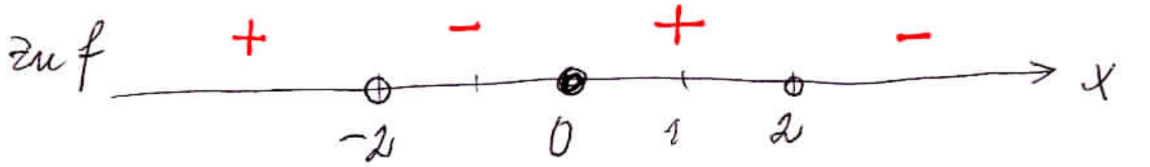
MÁM PODEZŘENÍ: asi budou asymptoty, budu počítat LIMITY v 2, −2.

$4-x^2=(4-x)(4+x)$, $4-x^2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 4}$, kořeny jmenovatele, oba jsou LICHÉ násob.

čitatel x^3 má jediný 3-násob. – LICHÝ – kořen $\boxed{x=0}$.

(2) určíme: zn $f(x)$ NULOVÉ BODY = KOŘENY – čitatele: 0, LICHÁ NÁSOBNOST; jmenovatele: −2, 2, LICHÉ NÁS.

V NICH: $\{-2,0,2\}$ a jedině v těchto bodech se bude měnit znaménko funkce! Graficky znázorníme:



spočítáme si ještě např. $f(1)=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{3}>0$

(tj. vybereme jeden vhodný bod a určíme v něm znaménko).

(3) Všimneme si, jestli má funkce speciální vlastnosti, naše f je LICHÁ! proč:

$$f(-x)=\frac{(-x)^3}{\underset{(-x)^2=x^2}{4-x^2}}=\frac{(-1)^3x^3}{4-x^2}=-\frac{x^3}{4-x^2}=-f(x).$$

(stačí určit polovinu grafu fce, zbytek je souměrný podle ~~osy~~ POČÁTKU).

(4) určíme lokální extrémy tak, že

- spočítáme 1. derivaci f'
- určíme její NULOVÉ BODY, to budou S.B. fce "stacionární body"
- zn f' mi řekne, kde f roste / klesá, jestli má lok. max / min

$$f'(x) = \frac{3x^2(4-x^2) - x^3\cdot(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{12x^2 - 3x^4 + 2x^4}{(4-x^2)^2} = \frac{x^2(12-x^2)}{(4-x^2)^2}$$ h.

(vytkneme v čit. x^2)

$D(f') = D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

kořeny čitatele: $x = 0$ … 2-násobný, neovlivní zn f'

rozložíme $x^2 - 12 = (x + 2\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$, čitatel má kořeny

$\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \underbrace{\sqrt{4}}_{2}\cdot\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, oba LICHÉ NÁSOBNOSTI, mění se v nich zn f'!

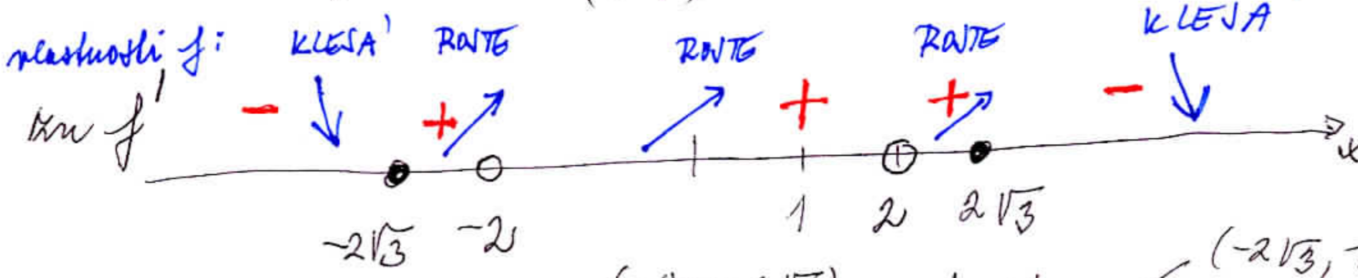
($\sqrt{3} \doteq 1{,}7$, $2\sqrt{3} \doteq 2{,}4$)

kořeny jmenovatele: $x = -2$, $x = 2$ NEPATŘÍ do $D(f')$!

SUDÉ NÁSOB., nemění zn f'

Vybereme bod a vyčíslíme v něm derivaci: ("$f'(0) = 0$ se nehodí")

$$f'(1) = \frac{1\cdot(12-1)}{(4-1)^2} = \frac{11}{9} > 0$$



(tedy: f klesá v $(-\infty, -2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}, \infty)$; f roste v $(-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, 2\sqrt{3})$)

(pozor: pokud bychom ZAPOMNĚLI VYZNAČIT body ± 2, mohlo by se zdát, že $f' < 0$ na $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ a že f klesá na ↗ celém, ale to by byl CHYBNÝ ZÁVĚR).

Dostáváme: lokální extrémy nastanou v bodech

- $x_1 = -2\sqrt{3}$, f má OSTRÉ LOK. MIN., $f(-2\sqrt{3}) = \frac{(-2\sqrt{3})^3}{4-(2\sqrt{3})^2} = \dots = \boxed{3\sqrt{3}}$, $m = 3\sqrt{3}$
- $x_2 = 2\sqrt{3}$, f má OSTRÉ LOK. MAX., $f(2\sqrt{3}) = \frac{(2\sqrt{3})^3}{4-(2\sqrt{3})^2} = \dots = -3\sqrt{3} = M$

POZORUJEME: $m > M$!

(5) počítání $f''(x)$ a zapíšu intervaly $\begin{cases}\text{konvexnosti } \oplus \\ \text{konkávnosti } \ominus\end{cases}$, popř. body INFLEXNÍ. **3.**

ze zn $f'(x)$.

$$f''(x) = \frac{(24x-4x^3)\cdot\underline{(4-x^2)}^2-(12x^2-x^4)\cdot 2\cdot\underline{(4-x^2)}\cdot(-2x)}{((4-x^2)^2)^2} =$$

$(4-x^2)^4$ vytknu $(4-x^2)$, zkrátím

$$= \frac{4x(6-x^2)\cdot(4-x^2)+4x(12x^2-x^4)}{(4-x^2)^3} =$$

$$= \frac{4x\left[(24-10x^2+\cancel{x^4})+(12x^2-\cancel{x^4})\right]}{(4-x^2)^3} = \frac{4x(24+2x^2)}{(4-x^2)^3} =$$

$$= \frac{8x\,(\underbrace{x^2+12}_{D<0})}{(4-x^2)^3}$$; kořeny $\begin{cases}\text{čit.: } x=0 \text{ 1-násob.} \\ \text{jm.: } x=2,\ x=-2 \text{ 3-násob.}\end{cases}$

ZMĚNA zn f'' bude v bodech z $\underline{\{-2, 0, 2\}}$

$D(f'') = D(f') = D(f)$; $f''(1) = \dfrac{8(1+12)}{3^3} =$ spočítám: $\dfrac{8\cdot 13}{27} > 0$; $\dfrac{>0 \quad >0}{>0}$

VYCHÁZÍ: $\boxed{f''(1) > 0}$

$\dfrac{(+)\cdot(+)}{(+)}$ jen určím znaménko

zn f'': $(+)$ ⊖ -2 $(-)$ ● 0 $(+)$ 1 ⊕ 2 $(-)$

f je konvexní, konkávní, konvex., konkávní

Graf je NAD, POD, NAD, POD TEČNOU

$f''(x) = 0 \iff \boxed{x=0}$ ... to bude $\boxed{\text{inflexní bod}}$, jediný, $(f''(0)=0)$

skutečně, neboť $\begin{cases} f''(x) < 0 \text{ v } P^-(0), \\ f''(x) > 0 \text{ v } P^+(0)\end{cases}$

OVĚŘTE: (inflexní tečna: $y = 0$ ... osa x) naše funkce je zajímavá také tím, že graf MÁ ASYMPTOTY (dokonce obojího druhu).

(6) Zkusíme hledat napřed třeba asymptoty SE SMĚRNICÍ:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(4-x^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\cdot \overset{\to 1}{1}}{\cancel{x^3}\big(\underbrace{\tfrac{4}{x^2}}_{\to 0}-1\big)_{\to -1}} = -1$$

$a = -1$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{4-x^2} + x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3} + 4x - \cancel{x^3}}{4-x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot\overbrace{\left(\tfrac{4}{x}\right)}^{\to 0}}{\cancel{x^2}\underbrace{\left(\tfrac{4}{x^2}-1\right)}_{\to -1}} = 0$$

$b = 0$

STEJNÝ VÝSLEDEK DOSTANEME I PRO $x \to -\infty$ (SAMI)

TEDY: přímka o rovnici $\boxed{y = -x}$ je šikmou asymptotou grafu funkce f.

Ještě prověříme limity zleva / zprava v bodech -2, 2, abychom ověřili, zda v nich můžeme čekat ASYMPTOTY BEZ SMĚRNICE, tedy SVISLÉ:

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3}{\underbrace{4-\underbrace{x^2}_{<4}}_{>0}} = \left[\frac{(-2)^3}{0+}\right] = (-8)\cdot\infty = -\infty,$$

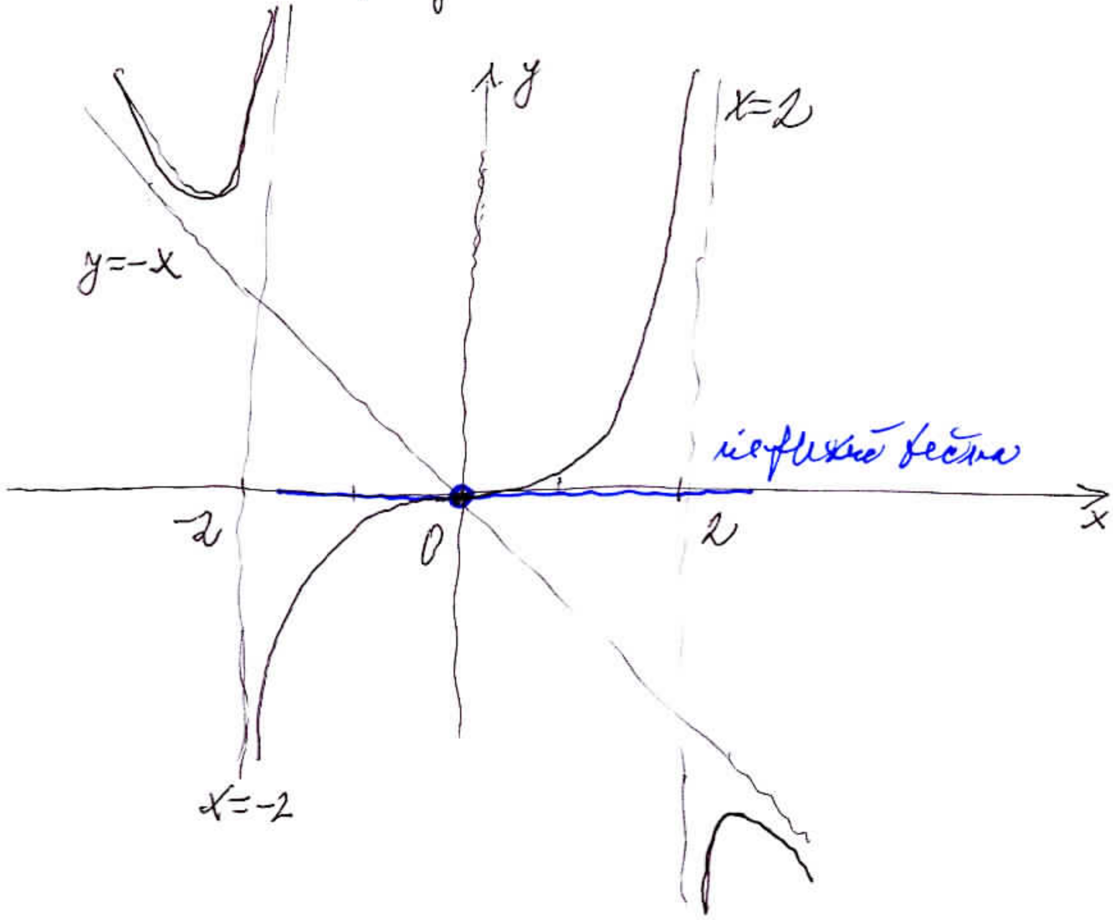
přímka o rovnici $\boxed{x = -2}$ JE ASYMPTOTA SVISLÁ

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3}{\underbrace{4-\underbrace{x^2}_{>4}}_{<0}} = \left[\frac{-8}{0-}\right] = (-8)\cdot(-\infty) = \infty,$$ podobně:

přímka o rovnici $\boxed{x = 2}$ je SVISLÁ AS.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3}{4-\underbrace{x^2}_{>4}} = \left[\frac{2^3}{0-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{4-x^2} = \left[\frac{8}{0+}\right] = \infty$$

Zkuste si sestrojit graf:



Podobný příklad je vyřešen ve skriptech, liší se znaménkem funkce. Jaký je vztah obou grafů?