VEKTORY

MATICE

SOUSTAVY LIN. ROVNIC

V další části přednášky se budeme zabývat systémy lineárních algebraických rovnic a pojmy, kterých se v té souvislosti používá (vektory, matice, determinanty). Budete potřebovat učební text

JIŘÍ NOVOTNÝ: Matematika I
základy lineární algebry, 2004, Brno,
nebo jeho elektronickou verzi.

Cílem bude ukázat algoritmické postupy, které umožní
— rozhodnout, zda soustava řešení nemá / má, případně (jak) mnoho;
— popsat všechna existující řešení, pokud ex., a to přehledným způsobem;

přitom postupy umožní řešení úlohy na počítači.

$\boxed{\text{Př.}_1}$ Určete všechna řešení soustavy (lineárních algebraických) rovnic:

1.r. $5x - 3y = 1$,

2.r. $3x + 2y = 12$.

Dosud jste používali metody:

(a) dosazovací: např. z 1. rovnice spočítám $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$, dosadím do 2. rovnice, najdu $x$, dopočítám $y$.

(b) vylučovací: např. vyloučíme $x$: beru 3× 1. rovnici, (−5)× 2. rovnici;

$$\left.\begin{aligned} 15x - 9y &= 3 \\ -15x - 10y &= -60 \end{aligned}\right\} \text{ sečtu}$$

$$0 - 19y = -57, \quad \boxed{y = 3}$$

$$(\text{z 2.r.}) \quad x = \frac{1}{3}(12 - 2y), \quad \boxed{x = 2}$$

ZA ŘEŠENÍ BUDEME BRÁT USPOŘÁDANOU DVOJICI = VEKTOR

$$\boxed{(x, y) = (2, 3)}$$

Řešení je určeno JEDNOZNAČNĚ, JE JEDINÉ.

Když bude mít soustava "moc" neznámých a "moc" rovnic, V2
potřebujeme postup "zmechanizovat"! Co s rovnicemi můžeme dělat (aniž by se změnila soustava řešení), budeme dělat se "schématy" koeficientů a neznámé nemusíme psát, jenom budeme dbát na POŘADÍ koef.

Co smím dělat s rovnicemi soustavy (popř. opakovaně):

(1) VYMĚNIT POŘADÍ ROVNIC

(2) NĚKTEROU ROVNICI NÁSOBÍM ČÍSLEM $k \neq 0$
nenulovým

(3) K NĚKTERÉ ROVNICI PŘIČTU k-násobek JINÉ ROVNICE DANÉ SOUSTAVY

Abychom zápisy zjednodušili, nebudeme popsané úkony dělat s rovnicemi, ale jen s jejich "skupinami koeficientů", které uspořádáme do schémat zvaných MATICE
(angl. matrix)

MÍSTO SOUSTAVY ROVNIC napíšeme TABULKU

$$5x - 3y = 1$$
$$3x + 2y = 12$$

ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY $\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 12 \end{array}\right]$

a kolem nakreslíme velké závorky — "ohrádku"; mluvíme o:

MATICE SOUSTAVY: SLOUPEC PRAVÝCH STRAN:

SLOUPCE MATICE

$$A = \begin{bmatrix} \downarrow 5 & \downarrow -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ŘÁDKY MATICE

1. index - řádkový
2. index - sloupcový

ŘEŠENÍ MOHU PSÁT JAKO SLOUPEC:

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

V3

Obecně můžeme uvažovat soustavu m rovnic pro n neznámých, označme neznámé pomocí INDEXŮ:

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

a rovnice píšeme jako

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2\\
\vdots \qquad\qquad &\quad \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}$$

kde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ jsou koeficienty v 1. rovnici u neznámých po řadě $x_1, \dots, x_n$, tedy 1. koeficient udává, že bereme 1. rovnici, 2. koeficient udává, u které neznámé stojí, $b_1$ je absolutní člen a umisťujeme ho na pravou stranu, atd.,

obecně $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (reálná čísla) pro $\begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix}$

$\underbrace{b_1, b_2, \dots, b_m}_{\text{reálná čísla}}$ jsou absol. členy - pravé strany,

VŠE SESTAVÍME DO TABULEK: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

vektor neznámých

vektor pravých stran

$$\left[\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{matrix} \end{array}\right] = A_r$$

ROZŠÍŘENÁ MATICE SOUSTAVY

$A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m}^{j=1,\dots,n}$ MATICE SOUSTAVY

Abychom s novými objekty - MATICEMI - mohli lépe zacházet, zavedeme pro ně určitou terminologii a definujeme pro ně užitečné operace.

Jsou-li $m, n \in \mathbb{N}$ přirozená čísla, pak **maticí typu $(m, n)$** nazveme soustavu $m.n$ čísel $a_{ij}$ $j=1,\dots,n$ $i=1,\dots,m$ nebo **$m \times n$**

prvky matice

uspořádaných do tabulky s řádky v počtu $m$, se sloupci v počtu $n$, uzavřenou do dvojice velkých závorek:

$$\begin{array}{r} 1.\rightarrow \\ 2.\rightarrow \\ \\ m\text{-tý}\rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix} = A.$$

(matrix = šablona, "rastr"...)

řádek

$\uparrow$ 1. $\uparrow$ 2. ... $\uparrow$ n-tý sloupec matice A

Různé speciální typy matic máte podrobně popsány ve skriptu v kapitole MATICE, podívejte se tam.

## OPERACE S MATICEMI

Pro libovolnou matici $A=(a_{ij})$ typu $(m,n)$ zavádíme její NÁSOBEK ČÍSLEM $k \in \mathbb{R}$ jako novou matici $kA$, která vznikne z $A$ tím, že NA KAŽDÉ POZICI NÁSOBÍM PŮVODNÍ prvek koeficientem $k$;

$$kA = (k.a_{ij}).$$

$\boxed{\text{Př.}}$ Pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $kA = \begin{pmatrix} 2k, & 3k \\ 4k, & -k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$.

Pro volbu $k=2$, $2A = \begin{pmatrix} 4, & 6 \\ 8, & -2 \end{pmatrix}$.

Pro dvě matice STEJNÉHO TYPU $(m,n)$ zavedeme jejich SOUČET "po pozicích": v $i$-tém řádku a $j$-tém sloupci, na pozici $(i,j)$, bude stát součet těch prvků, které na této pozici stojí v první a ve druhé matici.

Př. Jestliže $A=\begin{pmatrix}1&3&4\\2&7&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\0&-6&1\end{pmatrix}$, pak součet $A+B=\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&1&0\end{pmatrix}$; všechny matice $A, B, A+B$ jsou typu $(2,3)$.

V každém typu existuje tzv. matice NULOVÁ $O$, všechny její prvky jsou rovny nule, $a_{ij}=0$ pro všechny dvojice indexů:

$$O=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

má zvláštní postavení vzhledem ke sčítání; jsou-li $A, O=\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$ typu $(m,n)$, potom

$$A+O=O+A=A,$$

tedy nulovou matici můžeme přičíst zleva nebo zprava k matici téhož typu $A$ a ta se NEZMĚNÍ.

Obecně můžeme proces sčítání matic zapsat takto: pro matice $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ typu $(m,n)$, jejich součtem je matice $C=(c_{ij})$ opět typu $(m,n)$, pro jejíž prvky platí

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \qquad i=1,\dots,m \quad j=1,\dots,n,$$

píšeme $C=A+B.$

Dá se ověřit, že $\underbrace{A+B=B+A}_{\text{komutativní}};\ A+\underbrace{(B+C)=(A+B)}_{\text{asociativní}}+C.$

platí zákon:

$\dots b_{ij}+a_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (podobně)

Jestliže sečteme matici A s maticí $(-1)\cdot A$, v libovolném pořadí, dostaneme nulovou matici:

MATICE OPAČNÁ k A

$$A+(-1)\cdot A = 0 \qquad \text{zápis: } (-1)\cdot A = -A = (-a_{ij})$$

(opravdu, na pozici $(i,j)$ bude $a_{ij} + (-1).a_{ij} = a_{ij} - a_{ij} = 0$)

Dále si všimneme vlastností:

$\underbrace{1\cdot A = A}$ , $k.(l.A) = (k.l)A$ pro $k,l \in \mathbb{R}$ reál. čísla

$(1\cdot a_{ij}) = (a_{ij})$

$$\left.\begin{aligned} (k+l).A &= kA + lA \\ k.(A+B) &= kA + kB \end{aligned}\right\} \text{ distributivnost, neboli „roznásobit“}$$

Abychom si lépe zapamatovali proces násobení dvou matic, zmíníme se stručně o ARITMETICKÝCH VEKTORECH. Máte zkušenost s vektory o dvou složkách, s vektory o třech složkách (užívají se v geometrii a ve fyzice), s jejich sčítáním a násobením skalárem.

Př. Vektory $\vec{a}=(1,2)$ a $\vec{b}=(2,-1)$ patří do $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, mohu je např. sečíst, $\vec{a}+\vec{b}=(1+2,2-1)=(3,1)$, násobit skalárem, např. $\frac{1}{3}\cdot\vec{a} = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Mohu je vzájemně skalárně vynásobit, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 1.2 + 2.(-1) = 0$, $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Př. Vektory $\vec{a}=(2,1,5)$ a $\vec{b}=(-1,-3,1)$ patří do $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, vzájemný součet je $\vec{a}+\vec{b}=(2-1,1-3,5+1)=(1,-2,6)$, vzájemný skalární součin je $\vec{a}\cdot\vec{b}=2.(-1)+1.(-3)+5.1=-2-3+5=0$, vektory jsou tedy kolmé, $a\perp b$.

KOLMÉ

MOHU PŘIROZENĚ ZOBECNIT PRO LIBOVOLNÝ POČET SLOŽEK.

Za **n-členný aritmetický vektor** budu považovat každou uspořádanou n-tici reálných čísel, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, čísla $a_1, a_2, \dots, a_n$ nazvu **složky vektoru**.

Pro dva n-členné aritmet. vektory

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$$ zavedu součet "po složkách"

$$a + b = (a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n);$$

násobek skalárem $k \in \mathbb{R}$ zavedu jako

$$k . a = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n).$$

Speciální postavení má nulový vektor $o = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$:

$$a + 0 = 0 + a = a$$ pro lib. $a \in \mathbb{R}^n$.

K $a$ utvoříme opačný vektor $(-1).a$, značíme ho $-a$; platí $a + (-a) = 0$.

↔ mohu vyměnit pořadí

Pro dva n-členné vektory zavedu ještě SKALÁRNÍ SOUČIN jako číslo (= skalár) vzniklé ze složek tak, že vynásobím první, druhé, ..., n-té složky a vše sečtu:

$$a . b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_3 b_3 .$$

Př. $a = (1, 3, -1, 4, 2)$ a $b = (-1, 1, 2, -1, 2)$ jsou v $\mathbb{R}^5$, $n = 5$,

$$a . b = \underbrace{1.(-1)}_{-1} + \underbrace{3.1}_{3} + \underbrace{(-1).2}_{-2} + \underbrace{4.(-1)}_{-4} + \underbrace{2.2}_{4} = 0,$$ vektory budu považovat za kolmé, $a \perp b$.

Vrátíme se k maticím.

Násobení matic zavádíme jen v případě, že jejich typy splňují určitou PODMÍNKU. Je-li $A=(a_{ij})$ typu $(\underline{m},n)$ a matice $B=(b_{ij})$ je typu $(n,\underline{p})$,

**SOUČINEM** A a B (v tomto pořadí) rozumíme matici

$C = A \cdot B$, jejíž prvek na pozici $(i,j)$ je tvaru $c_{ij} = a_i \cdot b^j$ ; C je typu $(m,p)$.

i-tý řádkový vektor matice A

j-tý sloupcový vektor matice B

skalární součin dvou

ⓝ-členných vektorů

(proto jsme kladli na typy požadavky, aby tyto vektory byly "stejně dlouhé"); podrobně:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}.$$

POZOR, POŘADÍ MATIC HRAJE ROLI, i kdyby oba součiny existovaly! (komuta)

Př. MATICE (2,2) ... patří mezi ČTVERCOVÉ

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5.1+1.2, & 0+0 \\ 3.1+1.2, & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7, & 0 \\ 5, & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B.A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B \neq B.A ;$$

---

Pro $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a libovolnou $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $E.C = C.E = C$. OVĚŘTE SI

To platí pro čtvercové matice (n,n) podobně: násobit "jednotkovou" maticí $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ typu (n,n) můžu lib. (n,n)-matici "beze změny":

$$A \cdot E = E.A = A.$$

Pokud bych násobila čtvercové matice $(n,n)$ $A=(a_{ij})$ a $O=\begin{pmatrix}0 \cdots 0\\ 0 \cdots 0\end{pmatrix}$ (matice samých nul), co bych dostala?

$(A.O = O.A = O$ – ověřte si$)$

Př. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A.B=$ SAMI

typ: $(2,\underline{3})$   $(\underline{3},3)$

součin $A.B$ mohu počítat, bude typu $(2,3)$

ale: součin $B.A$ NENÍ definován!

$(3,3)$   $(2,3)$

není stejné číslo!

Pro násobení matic (které se násobit DAJÍ) platí:

$$(A.B).C = A.(B.C) \qquad \text{asociativita}$$

$$k \in R, \quad k.(A.B) = (kA).B = A.(kB)$$

(mohu použít tak, že VYTÝKÁM z matice, např. se tak mohu zbavit zlomků)

$+, \cdot$ jsou vázány DISTRIBUTIVNÍMI ZÁKONY

$$(A+B).C = A.C + B.C$$

$$A.(B+C) = A.B + A.C$$

TRANSPONOVÁNÍ MATICE. Matici $A$ typu $(m,n)$ mohu "překlopit podle diagonály" a získat tak matici k ní transponovanou typu $(n,m)$: $A=(a_{ij})$, $A^T = (a_{ji})$.

na pozici $(i,j)$

DIAGONÁLA: $\{a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{..}\}$

V10

Př. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (1.ř.), $A^T=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (1.sl.)

typ: $(2,4)$ $\qquad$ $(4,2)$

při transponování vyměním řádky za sloupce a naopak; když to udělám dvakrát, dostanu matici PŮVODNÍ:

$(A^T)^T = A \qquad (A+B)^T = A^T + B^T, \quad (kA)^T = kA^T,$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ změna pořadí!!

---

Protože matice teď budeme potřebovat hlavně v roli

- matice soustavy lin. rovnic,
- rozšířená matice soustavy,

musíme mít možnost pracovat s řádky (sloupci) matice podobně jako bychom pracovali s rovnicemi, ale tak, aby se přitom NEZMĚNILA MNOŽINA ŘEŠENÍ DANÉ SOUSTAVY ROVNIC; dá se ověřit, že tuto vlastnost mají následující ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY MATICE $(A; A_r)$:

(1) prohození (= výměna) i-tého a j-tého řádku matice, podobně výměna i-tého a j-tého sloupce matice
(výměna řádků znamená výměnu rovnic,
výměna sloupců znamená "prohození neznámých")

(2) vynásobení i-tého řádku (i-tého sloupce) nenulovým (vedlejší) číslem $(k \neq 0)$
(= vynásobení celé rovnice číslem $k \neq 0$)

(3) přičtení k-násobku i-tého řádku (sloupce) k j-tému řádku (sloupci)

ÚPRAVAMI SE SNAŽÍME MATICI (soustavu) ZJEDNODUŠIT.

Zkusme ukázat na příkladě.

Př. Určete (všechna) řešení soustavy rovnic

$$x+y-2z=7,$$
$$x-y+z=0,$$
$$2x-y-2z=0,$$
$$2x\quad -z=7.$$

(GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA)

Napíšeme si rozšířenou matici soustavy a budeme postupně, pomocí pravidel (1), (2), (3), matici upravovat; vkládáme mezi matice znak ∼ ("značka elementární transformace z matice předchozí),

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 7 \\ 2 & -1 & -2 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \end{array}\right] \boxed{-1}\ \boxed{-2}\ \boxed{-2} \sim$$

vyměníme 1. a 2. řádek

uděláme 3 elem. transf.: 1. řádek násobíme (−1) a přičteme ke 2. řádku, 1. řádek násobím ·(−2) a přičtu napřed ke 2., pak ke 3. řádku

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim$$

zařídili jsme prvky 0, další rovnice už NEBUDOU obsahovat x.

2. ř. odečtu od 4. ř.,

A: VYMĚNÍM 2. a 3. řádek

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \boxed{-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] /\cdot\frac{1}{5} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

jedna rovnice byla zbytečná, vedla na 0=0.

Pro matici MÁME STUPŇOVITÝ TVAR, každá rovnice začne až o 1 neznámou dále než ta předchozí.

odsud se vrátíme k rovnicím

"ODSPODU" řešíme

NYNÍ MÁME ROVNICE:

$$x-y+z=0$$
$$y-4z=6$$
$$z=-1$$

$$x=y-z=3$$
$$y=6-4=2 \Leftarrow$$
$$\boxed{z=-1} \Leftarrow$$

JEDNOZNAČNĚ URČENÝ VEKTOR ŘEŠENÍ: $(\underset{x}{3},\underset{y}{2},\underset{z}{-1})$ -

abychom mohli snadno rozhodnout o < existence řešení
počtu řešení a jejich podobě,

potřebujeme některé nové pojmy.

Máme-li n-členné aritmetické vektory v počtu k,

$$a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n,$$

a reálná čísla ve stejném počtu (použijeme je jako koeficienty)

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R},$$

můžeme utvořit NOVÝ VEKTOR

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k;$$

budeme mu říkat LINEÁRNÍ KOMBINACE vektorů $a_1, a_2, \dots, a_k$ s koeficienty pořadě $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$.

Řekneme, že vektory $a_1, a_2, \dots, a_k$ jsou $\underbrace{\text{LINEÁRNĚ NEZÁVISLÉ}}_{\text{LNZ}}$, jestliže jediná skupina koeficientů, pro kterou je jejich lineární kombinace rovna NULOVÉMU VEKTORU $\mathbf{0} = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n\text{-krát}}$, je skupina samých nul, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$:

je-li $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k = \mathbf{0} \underset{\text{pak}}{\Longrightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0.$

naopak, pokud jsme schopni najít skupinu koeficientů, přitom NE VŠECHNY rovny nule, tak, aby kombinace složila nulový vektor, budeme jim říkat LZ, LINEÁRNĚ ZÁVISLÉ.

V13

Př. Vektory $e_1=(1,0,0)$ v $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně NEZÁVISLÉ.
$e_2=(0,1,0)$
$e_3=(0,0,1)$

Skutečně, pokud by platila rovnost (vektorová rovnice)

$$\underbrace{\lambda_1 e_1}_{} + \underbrace{\lambda_2 e_2}_{} + \underbrace{\lambda_3 e_3}_{} = 0,$$

dostali bychom: $(\lambda_1,0,0)+(0,\lambda_2,0)+(0,0,\lambda_3)=(0,0,0)$,

po úpravě : $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(0,0,0)$;

dva vektory jsou si rovny právě tehdy, když se rovnají jejich odpovídající složky:

1. složky : $\lambda_1=0$,
2. složky: $\lambda_2=0$,
3. složky: $\lambda_3=0$.

$\Rightarrow$ LNZ.

Př. Vektory $a=(3,1,2)$ v $\mathbb{R}^3$ jsou lineárně ZÁVISLÉ.
$b=(0,1,-1)$ Ověříme to. Hledejme $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$
$c=(3,2,1)$ tak, aby platilo:

$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0 \quad \text{(vektorová rov.)},$$

rozepíšeme do složek:

$$(3\alpha,\alpha,2\alpha)+(0,\beta,-\beta)+(3\gamma,2\gamma,\gamma)=(0,0,0),$$

dostaneme soustavu

$$\left.\begin{array}{lr}(1.\ \text{složky}) & 3\alpha \qquad +3\gamma=0\\ (2.\ \text{sl.}) & \alpha+\beta+2\gamma=0\\ (3.\ \text{sl.}) & 2\alpha-\beta+\gamma=0\end{array}\right\}$$

VŠECHNA ŘEŠENÍ JSOU TVARU $(t,t,-t)$, $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}3&0&3&0\\1&1&2&0\\2&-1&1&0\end{array}\right)\cdot\frac{1}{3} \sim \boxed{-2}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&2\\2&-1&1\end{bmatrix}\boxed{-1} \sim \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&-1&-1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{array}{l}\cdots\ \alpha+\gamma=0,\ \alpha=-\gamma\\ \cdots\ \beta+\gamma=0,\ \beta=-\gamma\\ \end{array}$$

ZVOLME NAPŘ. $\gamma=-1$, pak $\alpha=\beta=1$, $a+b-c=0$, LZ.

Pro matici $A=(a_{ij})$ typu $(m,n)$ zavedeme její **HODNOST** $h=h(A)$ jako přirozené číslo, $h\in\mathbb{N}$, které udává maximální počet řádkových vektorů matice A.
Pro hodnost platí: hodnost NULOVÉ matice je 0, jinak

$$0\le h\le \underbrace{\min(m,n)}_{\text{to menší z čísel } m,n}.$$

Př. Pro $A=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&-1\end{pmatrix}$ typu $(2,3)$, $h(A)=2$.
Její řádky jsou LNZ – ověřte si.

Někdy se nám může hodit vědět, že:

**Věta** Vektory $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}^n$ ($n$-členné) jsou LZ (lin. závislé) právě tehdy, když některý z nich se dá vyjádřit jako lineární kombinace ostatních.
(důkaz – skripta)

V předchozím příkladě snadno vidíme, že žádný z vektorů se nedá získat z toho druhého jako jeho "lineární kombinace", v tomto případě násobek (nulové složky by se musely "přenášet" do druhého vektoru při násobení prvkem $\lambda$).

Dále se může hodit tvrzení:

**Věta.** Když je mezi danými vektory $a_1,\dots,a_k$ některý vektor (aspoň 1) nulový, $o$, pak jsou to vektory LZ.
(důkaz – skripta)

**Věta.** Elementární úpravy matice nemění její hodnost.
(důkaz - skripta)

**Věta.** Je-li $A$ matice a $A^T$ matice k ní transponovaná, platí pro hodnosti: $h(A) = h(A^T)$.

(stačí tedy matici upravovat řádkovými úpravami, abychom ji dostali na "schodovitý tvar" a určili $h$).

**Př.** O maticích jako je $h(C)=3$ $h(E)=3$ $h(D)=2$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$h(B)=2$

říkáme, že mají schodovitý nebo stupňovitý tvar; přesnou definici najdete ve skriptech; znamená to, že každý řádkový vektor má svůj první nenulový prvek "víc napravo" než předchozí.

Dá se ukázat:

- Každou matici je možné pomocí (konečného počtu) elementárních úprav převést na schodovitou matici (stejného typu).
- Hodnost schodovité matice je rovna počtu řádků, ve kterých je aspoň jeden NENULOVÝ prvek.

nebudeme to dokazovat, alespoň si ověřte, že to "funguje" na příkladech nahoře.

Ukažme užití pojmu hodnost matice pro soustavy lin. rovnic. Pomocí násobení matic můžeme psát soustavu ve zkráceném tvaru jako $A.X = B$. → vektor, sloupec pravých stran

matice soust. vektor řešení (sloupec)

## EXISTENCE, POČET A METODY ŘEŠENÍ SOUSTAV V16

**Věta** (zvaná Frobeniova, zkratka F.V., někdy také Kroneckerova - Capelliova věta)

(O EXISTENCI ŘEŠENÍ)

(a) Soustava lineárních algebraických rovnic pro n neznámých

$$A.X=B$$

má řešení právě tehdy, když $h(A) = h(A_r) = h$.
(tj. aspoň 1)

Čteme: matice soustavy a rozšířená matice soustavy mají STEJNOU hodnost, označme ji h.

množství
(O "POČTU" ŘEŠENÍ)

(b) Jestliže $h = n$, má soustava PRÁVĚ JEDNO řešení.

(hodnost je rovna počtu neznámých).

Jestliže $h < n$, má soustava NEKONEČNĚ MNOHO řešení, které je závislé na $p = n - h$ parametrech.

(Za parametry můžeme volit vhodných $n-h$ neznámých; každý parametr bude libovolně probíhat množinu R reálných čísel; buďto parametrizujeme přímo vybranými neznámými, tj. necháme jejich názvy, nebo si za názvy parametrů vybereme jiná písmenka, např. t, s, r, ....).

(Důkaz věty se dá najít ve skriptech).

Př. Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y - 3z + 2u &= 1 \\ x + 3y - 7z &= -1 \\ 2x - y + 7u &= 5 \\ 2x + 3y - 8z + 3u &= 1 \end{aligned}$$

POČET NEZNÁMÝCH: $\boxed{n = 4}$

Gaussovou eliminační metodou a pomocí Frobeniovy věty zdůvodněte výsledek.

Řešení: rozšířenou matici soustavy (a současně s ní i matici soustavy) upravujeme pomocí elementárních úprav na schodovitý tvar, z něj určíme hodnosti obou matic:

$$\boxed{-2}\cdot\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -7 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 7 & 5 \\ 2 & 3 & -8 & 3 & 1 \end{array}\right)\cdot(-1) \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 6 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right]\boxed{-2}\cdot\boxed{3} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] \sim$$

značí: užili jsme elem. úpravy

POZOR NA ZNAMÉNKA!

VYMĚNÍM 4. a 3. řádek – proveďte si, a pak vyměníme 3. a 2. řádek, čímž dostaneme NULOVÉ řádky na „konci" matice

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A

$A_r$

(porovnejte s postupem ve skriptech, kde jsou rovnice zadány v jiném pořadí)

Máme: $h(A_r) = 2$, $h(A) = 2$, jsou tedy stejné a píšeme $\boxed{h=2}$.

Je tedy $h = 2 < 4 = n$, $p = n - h = 4 - 2 = 2$, $\boxed{p=2}$

podle F.V. má soustava nekonečně mnoho řešení závislé na 2 parametrech. Z nenulových řádků matice máme rovnice

$x + y - 3z + 2u = 1$ (1. rov. zadání) $\Rightarrow x = -y + 3z + 2u + 1$; $x = z - 3u + 2$

$y - 2z - u = -1 \Rightarrow y = 2z + u - 1$; $z, u \in \mathbb{R}$ jsou parametry

uděláme DOHODU, že neznámé „na začátku rovnic" SPOČÍTÁME pomocí ostatních

Co jsme udělali:

zapsali jsme rovnice, které nám dají nenulové řádky upravené schodovité matice, řešíme je postupně OD KONCE, první neznámou, která jde s nenulovým koeficientem, POČÍTÁM pomocí ostatních neznámých, ty považuji za parametry přímo, nebo zavedu parametry S JINÝM NÁZVEM. postupuji "nahoru", již spočtené neznámé dosazuji a počítám další.

Všechna řešení dané soustavy mohu zapsat jako množinu vektorů tvaru:

$$\{(\underbrace{z-3u+2}_{\text{to je } x}, \underbrace{2z+u-1}_{\text{to je } y}, z, u);\ z\in\mathbb{R}, u\in\mathbb{R}\}.$$

Někdy je vhodné si vybrat jiná písmena jako parametry, např. položme $z=t,\ u=s$

a všechna řešení popíšeme jako

$$\boxed{\{(t-3s+2, 2t+s-1, t, s);\ t\in\mathbb{R}, s\in\mathbb{R}\}}$$

(Odpověď u zkoušky nějak ZVÝRAZNĚTE.)

Př. Řešte soustavu

$$\begin{aligned} x + y + 5z &= -7 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + 3y + z &= 5 \\ 2x + 3y - 3z &= 14. \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -3 & 14 \end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\text{SAMI}}{\sim \ldots \sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -7 \\ 0 & -1 & -9 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right];\ \underbrace{h(A)=3=h(A_r)}_{\text{je řešitelná}},\ h=3,\ n=3,\ p=0.$$

BUDE JEDNO ŘEŠENÍ, napíši rovnice, řeším od poslední, ta dá $z=-2$, dosadím do předchozí, $y=2$, dosadím do 1. rov.

ŘEŠENÍM JE : $(\underset{x}{1}, \underset{y}{2}, \underset{z}{-2})$.