K počítání limit funkcí.

L'HOSPITAL

Při počítání limit funkcí se někdy osvědčí úpravy a triky, jak jsme je nacvičovali už při počítání limit posloupností. Někdy však úpravy nepomohou. Ukážeme ještě další prostředek, který "zabírá" např. na důležité limity uvedené níže (ale také NENÍ VŠEMOCNÝ):

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$, jsou to vše neurčité výrazy typu $\left[\frac{0}{0}\right]$; pokud funkci v čitateli značíme $f(x)$ a funkci ve jmenovateli značíme $g(x)$, vidíme, co je těmto situacím společné:

(*)
$$f(x_0) = 0 = g(x_0) \quad (\text{zde } x_0 = 0),$$
existuje $f'(x_0)$, existuje $g'(x_0) \neq 0$.

derivace nenulová, tedy může být ve jmenovateli zlomku

Při splnění těchto podmínek (*) se nám podaří odvodit:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-0}{x-x_0}}{\frac{g(x)-0}{x-x_0}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} =$$

to modré jsme přidali tak, aby se neporušila ROVNOST

$0 = f(x_0)$ v čit., $0 = g(x_0)$ ve jmen.

$$= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

limita podílu je podíl limit, pokud je definován

Při platnosti podm. (*), LIM PODÍLU FCÍ JE PODÍL JEJICH DERIVACÍ v ~~tom~~ bodě, kde limitu počítáme.

Přímo k tomuto výsledku můžeme nyní spočítat:

[Př.] Ukažte, že platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Protože $\underbrace{x_0=0}$, $\underbrace{\sin 0=0}$, výraz, který limitujeme, je

$g(x)=x$, $g(0)=0$ $f(x)_{x=0} = \sin x$

JMENOV. ČITATEL

neurčitý výraz tvaru $\left[\frac{0}{0}\right]$; předpoklady podmínky (*)

jsou splněny všechny:

$f(x_0)=\sin 0=0$, $g(x_0)=0$,

$f'(x)=(\sin x)'=\cos x$, proto $f'(x_0)=\cos 0=1$, existuje,

$g'(x)=(x)'=1$, proto $g'(x_0)=\underbrace{1}_{\text{"}1(0)\text{"}}\neq 0$, existuje NENULOVÁ!

Smíme tedy psát: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{(\sin x)'(0)}{(x')(0)} = \frac{1}{1} = \boxed{1}.$

[Př.] Určete $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

Prověřme všechny předpoklady požadované v (*):

$e^0=1$

$f(x)=e^x-1$, $f'(x)=e^x$; $f(0)=e^0-1=1-1=0$; ex. $f'(0)=1$

$g(x)=x$, $g'(x)=1$; $g(0)=0$; ex. $g'(0)=1\neq 0$.

Je tedy podle dokázaného:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

[CV] Podobně si ověřte, že platí: $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1.$

Obecněji se dá dokázat následující:

čti: "Lopital" (z francouzštiny)

Věta zvaná někdy L'HOSPITALOVO PRAVIDLO, LP

$f'(x) \in \mathbb{R},\ g'(x) \in \mathbb{R},\ x \in P(x_0)$

~~Jestliže~~ nechť funkce f a g mají KONEČNÉ DERIVACE v (nějakém) prstencovém okolí $P(x_0)$, kde $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

$x_0 \in \mathbb{R}$ $x_0 = \pm\infty$

Nechť platí některá z následujících podmínek:

buďto

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x\to x_0} g(x)}$$

nebo

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty.}$$

Jestliže EXISTUJE limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, limita podílu derivací funkcí v x_0

potom existuje také limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

limita podílu daných funkcí v x_0

a platí ROVNOST:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{LP}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Pokud je bod x_0 vlastní, $x_0 \in \mathbb{R}$, dá se věta dokázat také pro JEDNOSTRANNÉ limity.

Často se na typ $\left[\frac{0}{0}\right]$ nebo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ dají převést také případy limit typu $\infty - \infty$ nebo $0 . \infty$, pomocí algebraických úprav.

někdy musíme tuto větu (LP) užít opakovaně:

Př. Určete $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^3}$.

(pomocné úvahy)

pro $x \to \infty$, $2^x \to \infty$, $x^3 \to \infty$ } máme neurčitý výraz $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, nejde přímo, ověřme předpoklady LP, druhá možnost:

$|g(x)| = |x^3| \to \infty$ pro $x \to \infty$

derivace čit.: $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$, existuje vlastní (konečná) v $P(\infty)$,

derivace jmen.: $(x^3)' = 3x^2$, ex. konečná v $P(\infty)$. UŽIJI LP

Dostaneme: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x \cdot \ln 2}{3x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

ještě nejsme hotovi, ověřme znova:

$|3x^2| \to \infty$ pro $x \to \infty$,

$(2^x \cdot \ln 2)' = 2^x \cdot \underbrace{\ln^2 2}_{(\ln 2)^2}$ existuje konečná v $P(\infty)$

$(3x^2)' = 6x$ — " — v $P(\infty)$

$\overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{2^x \cdot \ln^2 2}{6x}}_{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]} \overset{LP}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overset{\to\infty}{2^x} \cdot \overset{\to \text{konst.}>0}{\ln^3 2}}{\underset{\to 6,\ \text{konst.}>0}{6}} = \infty.$

ověřme předpoklady

Odpověď: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x}{x^3} = \infty$.

ZKUSTE SAMI SPOČÍTAT LIMITY UVEDENÉ VE SKRIPTU

všimněme si: může vyjít konečné číslo včetně č. 0, někdy ∞, nedá se dopředu odhadnout.

Jsou situace, kdy nám naopak LP nic nezjednoduší, jsou prosté limity, na které „NEZABERE", i když jsou splněny předpoklady pro jeho použití.

„ODSTRAŠUJÍCÍ" PŘÍKLADY:

Př. $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{LP}{\underset{\text{pokus}}{=}} \lim_{x\to 0+} \frac{2e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ NENÍ JEDNODUŠŠÍ, NEŽ ZADANÁ LIMITA

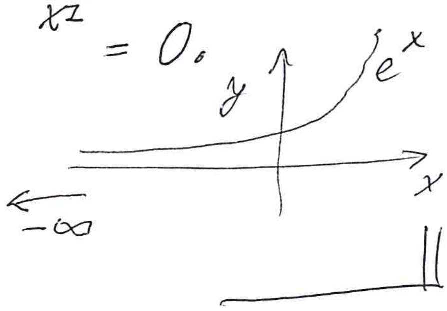
čitatel: $\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-x^{-2}\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\left(2x^{-3}\right)$

jmenovatel: $x' = 1$

pro $x \to 0^+$, $-\frac{1}{x^2} \to -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$.

$\frac{1}{x^2} \to \infty$

$\left[\frac{1}{0+}\right]$



Př. $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

TO JE PŮVODNÍ LIMITA

$\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \left((x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2}_{\text{dá } 1}x\left(\sqrt{x^2-1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

.... (SAMI)

$\boxed{\text{Př.}}$ nechť $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5\sin x}{3x+4\cos x} =$

Nemohu užít LP, přesto umím limitu určit, úpravou

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+5\frac{\sin x}{x}}{3+4\frac{\cos x}{x}} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

$\frac{\sin x}{x} \to 0$, $\frac{\cos x}{x} \to 0$

vytknu x v čit. ve jm.

$(2x+5\sin x)' = 2+5\cos x$ derivace NEMÁ LIMITU

$(3x+4\cos x)' = 3-4\sin x$ nemá limitu, tedy ani podíl derivací NEMÁ LIM., nelze užít LP.