KONVEXNÍ A KONKÁVNÍ FUNKCE, INFLEXE

Uvažujme funkci $f(x)$, která má derivaci $f'(x_0)$ v b. x_0. Jestliže existuje prstencové okolí $P(x_0, \delta)$ takové, že pro všechny body $x \in P(x_0, \delta)$ z tohoto okolí je

$$\underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0)}_{\text{bod (body) na tečně jsou POD bodem grafu}} < f(x)$$

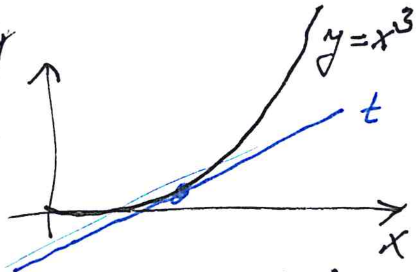
graf funkce f leží v $P(x_0, \delta)$ NAD tečnou grafu v b. $[x_0, f(x_0)]$, řekneme, že f je RYZE KONVEXNÍ

$$\underbrace{f(x)}_{\text{bod grafu}} < \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\text{je POD tečnou}}$$

graf funkce leží v $P(x_0, \delta)$ POD tečnou grafu v $[x_0, f(x_0)]$, f je RYZE KONKÁVNÍ

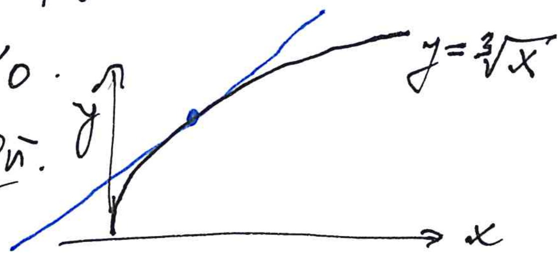
v bodě x_0.

Př.



na int. $(0, \infty)$ (v lib. $x \in (0, \infty)$) je fce $f(x) = x^3$ ryze konvexní. Co o x^3 můžeme říci na $(-\infty, 0)$?

Př.



na int. $(0, \infty)$ (v lib. bodě x $(0, \infty)$) je fce $\sqrt[3]{x}$ ryze konkávní. Jak se $\sqrt[3]{x}$ chová na $(-\infty, 0)$?

konvexní: $\leqq$ konkávní: $\leqq$

Řekneme si, to je sice hezké, ale když graf zatím NEZNÁM, co mám asi tak dělat... Potřebujeme prostě nějaký početní postup, a k tomu nám dopomůže následující úvaha a tzv. věta Lagrangeova (najděte si ji).

Podobně:

má-li funkce f ve (vlast.) bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ 2. derivaci

$$f''(x_0) < 0,$$

pak je f v b. x_0 RYZE KONKÁVNÍ.

Zavádíme i na intervalu:

jestliže na intervalu $J \subseteq D(f)$ existuje $f''(x)$ a platí

$f''(x) > 0$ na J .... f je ryze konvexní na J

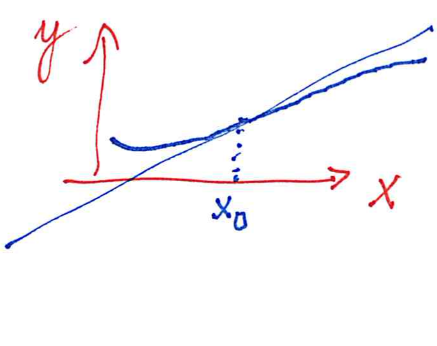
$f''(x) < 0$ na J ... f je ryze konkávní na int. J

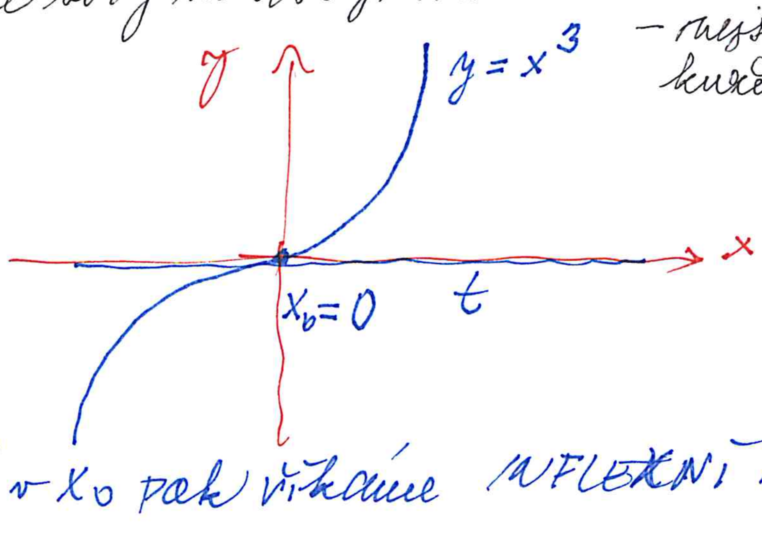
Může se stát, že křivka "graf funkce" přechází z jedné poloroviny určené tečnou v b. x_0 do poloroviny opačné, graf přechází z poloviny pod tečnou do poloviny nad tečnou (nebo: nad ... pod),

pak bod x_0, ve kterém k tomu dojde, nazýváme

INFLEXNÍ BOD grafu.

Dále bychom rádi uměli stanovit inflexní body POČETNĚ. Takové body neexistují na křivkách 2. stupně – nejsou na kuželosečkách.





PŘÍSLUŠNÉ TEČNĚ v x_0 pak říkáme INFLEXNÍ TEČNA.

Tvrdíme:

Věta. Jestliže má funkce f v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ kladnou druhou derivaci, $f''(x_0)>0$, pak je f v b. x_0

$\Downarrow$

RYZE KONVEXNÍ.

Vysvětlení se opírá o větu Lagrangeovu (zopakujte si ji) a o to, že díky $f''(x_0)>0$ je funkce 1. deriv. $f(x)$ v x_0 rostoucí funkcí. Máme ukázat, že za našeho předpokladu platí $f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0) > 0$, což můžeme psát jako:

(pro $x \in P(x_0)$) $\quad f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) > 0.$ ← MÁME DOKÁZAT

Derivace f' je jistě definována na nějakém okolí $U(x_0)$, je tedy funkce f spojitá na tomto okolí (a má derivaci). Vezmeme $x \in U(x_0)$ a rozdělíme úvahy na dvě možnosti:

(a) $x < x_0$; zúžení $f/\langle x, x_0\rangle$ splňuje předpoklady V. Lagrangeovy, tedy EXISTUJE $c \in (x, x_0) \subset U(x_0)$ tak, že

$$\underbrace{f(x_0)}_{f(b)} - \underbrace{f(x)}_{f(a)} = f'(c)(x_0 - x) \quad / \cdot (-1),$$

platí $f(x) - f(x_0) - f'(c)(x - x_0) > 0$.

(b) $x_0 < x$; zúžení $f/\langle x_0, x\rangle$ splňuje předpoklady V. Lagr., existuje bod $c \in (x_0, x)$ (vnitřní int.) takový, že

$$f(x) - f(x_0) - f'(c)(x - x_0) > 0.$$

SPOJÍME OBOJÍ: v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$ platí

$(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$

NAHRADÍM

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = f'(c)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) =$$
$$= \big(f'(c) - f'(x_0)\big)(x - x_0) > 0$$

VYTKNU

dostanu k tomu, že f' roste v b. x_0, zase uvážím možnosti $x < c < x_0$, $x_0 < c < x$ – zkuste si, proč platí!

Dá se ukázat:

- (vyšetřujeme body, o nichž by mohla být inflexe)

  Je-li x_0 inflexní bod fce f a existuje-li v něm druhá derivace $f''(x_0)$, pak musí být $f''(x_0)=0$.

– v úloze najdeme body, pro něž je 2. derivace nulová, pak u každého prověříme, zda je inflexní; to poznáme některým z následujících způsobů:

- Jestliže $f''(x_0)=0$ a $f'''(x_0)\neq 0$, potom je x_0 inflexní bod funkce f.

Počítat 3. derivaci nemusí být u některých funkcí příjemné. Máme další možnost:

- Jestliže má funkce f na nějakém okolí $U(x_0,\delta)$ b. x_0 spojitou 1. derivaci f' a víme, že

buďto	nebo naopak:
$f''(x)<0$ pro $x\in P^-(x_0,\delta)$	$f''(x)>0$ pro $x\in P^-(x_0,\delta)$
a $f''(x)>0$ pro $x\in P^+(x_0,\delta)$	a $f''(x)<0$ pro $x\in P^+(x_0,\delta)$,

potom je x_0 inflexní bod.

Př. Grafem funkce $f(x)=x^3$ je křivka 3. stupně s inflexním bodem v počátku a inflexní tečnou $y=0$, protože:

$f(x)=x^3$, pro $x_0=0$: $f(0)=0$

$f'(x)=3x^2$ $\quad f'(0)=0$

$f''(x)=6x$, $\quad \boxed{f''(0)=0}$

$f'''(x)=6$ $\quad \boxed{f'''(0)=6\neq 0}$

$t: y-0=f'(0)(x-0)$, tečna má rov. $\boxed{y=0}$.