MATICE INVERZNÍ K DANÉ ČTVERCOVÉ MATICI

Pro reálná čísla platí:

Zvolíme-li $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak k a existuje prvek tzv. inverzní, který splňuje:

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1;$$

přitom přiřazení $a \mapsto a^{-1}$ je jednoznačné, a platí $(a^{-1})^{-1} = a$. Lze toho využít např. při řešení rovnic: $ax = b$, $a^{-1}(ax) = a^{-1}b$, $1 \cdot x = a^{-1}b$, $\boxed{x = a^{-1}b}$.

Pokud by se nám něco takového podařilo ukázat pro (aspoň některé) matice, usnadnilo by nám to např. řešení MATICOVÝCH ROVNIC, které se také budeme zabývat.

DEF Jestliže A je ČTVERCOVÁ matice typu (n,n) a jestliže EXISTUJE matice Z taková, že

$$A \cdot Z = Z \cdot A = \underbrace{E}_{\text{jednotková matice typu } (n,n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

říkáme, že Z je **inverzní matice** k A. Budeme ji značit: $Z = A^{-1}$.

Použití: řešme maticovou rovnici $A \cdot X = B$.

$$A \cdot X = B, \quad \underbrace{A^{-1} \cdot (A \cdot X)}_{\text{zleva}} = \underbrace{A^{-1} \cdot B}_{\text{zleva!}}$$

pořadí!!

$$\underbrace{(A^{-1} \cdot A) \cdot X}_{\text{asociativita}} = A^{-1} B, \quad \underbrace{E \cdot X}_{X} = A^{-1}B, \quad \boxed{X = A^{-1}B}.$$

Kdy se nám podaří k matici najít inverzní? A bude jenom jediná, nebo jich může existovat víc? Odpověď na první otázku souvisí s hodností matice.

Řekneme, že čtvercová matice A typu (n,n) je REGULÁRNÍ MATICE, jestliže $h(A) = n$ (tj. má největší možnou hodnost, stejnou jako její řád).

Jestliže naopak $h(A) \neq n$, pak musí být

$h(A) < n$; $n - h(A)$ je tzv. DEFEKT.

Takové matice budeme říkat SINGULÁRNÍ MATICE.

Dá se ukázat:

$\boxed{\text{VĚTA}}$ K (n,n)-matici A existuje matice inverzní $\underbrace{\text{právě tehdy, když}}_{(\Longleftrightarrow)}$ A je REGULÁRNÍ.
(ukážeme s použitím determinantů)

$\boxed{\text{VĚTA}}$ Jestliže k A existuje matice inverzní, potom je jednoznačně určena.

To snadno dokážeme: předpokládejme, že B a C mají vlastnosti matice inverzní k A, tedy platí:

$$A \cdot B = E = B \cdot A,$$
$$A \cdot C = E = C \cdot A.$$

máme rovnosti:

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot C) \underset{\text{asoc.}}{=} (B \cdot A) \cdot C = E \cdot C = C, \quad \boxed{B = C}.$$

Vlastnosti inverzních matic.

(1) $E^{-1}=E$; matice jednotková je sama k sobě inverzní.

(2) $(A^{-1})^{-1}=A$; je-li A^{-1} inverzní maticí k A, pak k A^{-1} inverzní maticí je právě A.

(3) transponování matice a invertování matice jsou záměnné: $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

(4) je-li číslo $k\neq 0$, pak platí (za předpokladu, že A má transponovanou matici A^{-1} ← existuje):

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}.$$

(5) Invertování součinu matic:

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$$

v opačném pořadí!

Důkazy najdete ve skriptu.

Abychom mohli inverzní matici vyhledat tzv. Jordanovou metodou, potřebujeme si ujasnit, jak můžeme elementární úpravy na řádky (sloupce) dané matice vyjádřit jako vynásobení zadané matice zleva (zprava) regulární maticí vhodného tvaru. Vyjdeme z matice jednotkové v příslušném řádu a provedeme v ní jistou úpravu.

Vezmeme matici typu (n,n), označujeme E_n, tj. jednotkovou typu (n,n), a tu označme upravovanou maticí:

① Chceme-li VYMĚNIT i-tý a j-tý ŘÁDEK (SLOUPEC), bereme násobení ZLEVA (ZPRAVA) maticí

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} \quad & \quad & i & j & \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1\ 0 & & & & \\ 0\ 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1\ 0 \\ 0\ 0 & & & & 0\ 1 \\ 0\ 0 & & & & \end{bmatrix} \end{array}$$

jedničky už nejsou na diagonále, ale na pozicích (i,j) a (j,i)

Př. Počítejme součin matic:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{této matici (při násobení zleva) odpovídá VÝMĚNA 1. a 2. řádku}}\cdot\begin{bmatrix}-1&2&3\\1&0&4\\2&3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&4\\-1&2&3\\0&0&1\end{bmatrix};\quad \begin{bmatrix}-1&2&3\\1&0&4\\2&3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&3\\0&1&4\\3&2&2\end{bmatrix}$$

VÝMĚNA 1. a 2. SL.

② Chceme-li i-tý řádek (sloupec) NÁSOBIT číslem $k\ (\neq 0)$, násobíme zadanou matici ZLEVA (ZPRAVA) takto utvořenou maticí:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \quad & i & \quad \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1\ 0 \cdots & & 0 \\ 0\ 1 & & \\ & k & \\ 0 \cdots & & 1 \quad 0 \\ 0 \cdots & & \cdots 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Př. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\boxed{3}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&2\\\frac13&\frac23&\frac53\\-1&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\1&2&5\\-1&2&1\end{bmatrix}$;

$k=3$, ZLEVA

$$\begin{bmatrix}1&-1&2\\\frac13&\frac23&\frac53\\-1&2&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\\frac13&2&\frac53\\-1&6&1\end{bmatrix}.$$

③ k i-tému řádku (sloupci) přičtu lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců) s koeficienty $k_1, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n$:

násobíme zleva (zprava) maticí tvaru

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} & i\text{-tý sl.} & \end{array} \\
i\text{-tý ř.} & \begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & & & & \\
 & \cdots & & & & & \\
0 & \cdots & 1 & & & & \\
k_1 & \cdots & k_{i-1} & 1 & k_{i+1} & \cdots & k_n \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Př.
$$
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11}+a_{21}, & ka_{12}+a_{22}, & ka_{13}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
$$

zleva

vede k přičtení k-násobku 1. řádku ke 2. řádku

zprava – totéž pro sloupce

Co je pro nás podstatné: ELEMENTÁRNÍ ÚPRAVY lze realizovat jako násobení maticí.

Úloha: Zjistěte, zda matice $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ je inverzní k matici $A = \begin{bmatrix} 1/4, & 1/4 \\ 3/4, & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$.

Řešení: Spočítáme ~~součin~~ SOUČINY $A \cdot B$, $B \cdot A$ a ověříme, zda vznikne matice jednotková řádu 2, tj. $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

POSTUPUJEME TEDY PODLE DEFINICE.

I6

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}\frac14 & \frac14\\ \frac34 & -\frac14\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac14+\frac34 & \frac14-\frac14\\ \frac34-\frac34 & \frac34-(-\frac14)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=E,$$

podobně pro $B.A$ – SAMI. Ověřili jsme tedy, že dané matice jsou NAVZÁJEM INVERZNÍ.

Nyní ukážeme METODU, jak pro danou regulární matici najít matici k ní inverzní.

JORDANOVA METODA – princip:

napíšeme vedle sebe:

danou reg. matici (čtvercovou) | jednotkovou matici ve stejném řádu

ELEM. ÚPRAVA NA ŘÁDKY = NÁSOBENÍ ZLEVA VHODNOU MATICÍ

$$\begin{array}{c|c} A & E\\ A_1\cdot A & A_1\cdot E\\ \dots & \dots\\ \underbrace{A_p\dots A_2\cdot A_1\cdot A}_{\text{dá: } E} & A_p\dots A_2\cdot A_1\cdot E=\underbrace{A_p\dots A_2\cdot A_1}_{\text{toto bude } A^{-1}\text{, inverzní}}\end{array}$$

děláme elem. úpravy, až dostaneme JEDNOTKOVOU matici

UPRAVENÁ VERZE: $k.E$ → $k.A^{-1}$

Př. Jordanovou metodou určete matici inverzní k $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$.

závorky zde VYNECHÁME

$$\begin{array}{c|c} B & E\\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{matrix}1 & 1\\ 0 & -4\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{matrix}\ \ /\cdot 4\\ \hline \begin{matrix}4 & 4\\ 0 & -4\end{matrix} & \begin{matrix}4 & 0\\ -3 & 1\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{matrix} & \begin{matrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{matrix}\end{array}$$

(první krok: -3)

příčka

potom: $\cdot(-1)$

nenásobíme, mohu nechat VYTKNUTÉ!

lépe se s tím pracuje

$4.E$, $4.B^{-1}$; $B^{-1}=\frac14\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

Měli bychom provést ZKOUŠKU, jestli jsme počítali správně :

Zk. $B\cdot B^{-1} = \begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}1&1\\3&-1\end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} = E,$

násobek vytkneme před součin matic

podobně také $B^{-1}\cdot B = E$ – SAMI.

Ukázkový příklad pro matici typu (3,3) je zpracován ve skriptu, zkuste ho spočítat SAMI!.

Pozn. Neověřovali jsme si předem, zda je naše matice regulární a jestli tedy k ní inverzní bude existovat. To by se ukázalo v průběhu postupu – pro singulární matici se nám nepodaří dostat se k nalevo jednotkové matici elem. úpravami a zjistíme „pozdě", že inverzní neexistuje (a určíme buď hodnost, nebo determinant).

Př. Zkuste najít inverzní matici k ~~matici~~ matici

$$C = \begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&2&2\end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 & & C & & & E & \\
\boxed{-2}\ \boxed{-1} & 1&1&1 & 1&0&0\\
 & 2&1&1 & 0&1&0\\
 & 3&2&2 & 0&0&1\\
\hline
 & 1&1&1 & 1&0&0\\
\boxed{-1} & 1&0&0 & -1&1&0\\
 & 1&0&0 & -2&0&1\\
\hline
 & 0&1&1 & 2&-1&0\\
 & 1&0&0 & -1&1&0\\
 & 0&0&0 & -1&-1&1
\end{array}$$

elem. úpravy NEMĚNÍ HODNOST MATICE

VZNIKLA MATICE $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$, která má hodnost 2, není regulární, nemá k sobě inverzní

→ dala by se upravit na stupňovitou: $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

SAMI: URČIT det C (=0)

DALŠÍ UŽITÍ DETERMINANTŮ.

Jestliže A je matice typu (m, n),
p je číslo přirozené, které splňuje $p \leqq m$, $p \leqq n$,
vyberme některé řádky matice A v POČTU p,
vyberme některé sloupce matice A v POČTU p,
z prvků v těchto řádcích a sloupcích
sestavíme MATICI – bude čtvercová řádu p (typu (p,p))
a budeme jí říkat
submatice řádu p matice A;
můžeme jí přiřadit determinant = subdeterminant, také MINOR, řádu p matice A.

Př. V matici $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ vyberme 2. a 3. řádek, 2. a 3. sloupec $\}$ $p=2$,

této volbě odpovídá submatice 2. řádu $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, jí odpovídá MINOR $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 9 = -5$.

Platí: (Pomocná věta)
Jestliže v matici A jsou všechny subdeterminanty řádu p NULOVÉ, jsou rovny nule také všechny subdeterminanty řádu VYŠŠÍHO než p.

(Důkaz je vynechán ve skriptu, užívá Laplaceova rozvoje det podle řádku (sloupce)).

POJEM HODNOST MATICE POMOCÍ DET.:

VĚTA A matice typu (m,n):

A má hodnost h $\Longleftrightarrow$ existuje aspoň 1 její subdeterminant řádu h NENULOVÝ a všechny její subdeterminanty řádu $h+1$ (pokud existují) jsou ROVNY NULE.

Pro praktické stanovení hodnosti je lepší postup, který jsme ukázali dříve – úprava na stupňovitý tvar. Výpočet determinantů bývá úmorný.

TVAR PRVKŮ INVERZNÍ MATICE POMOCÍ DET.:

Jestliže A je čtvercová mtce řádu n, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$,

můžeme ke každému jejímu prvku a_{ij} stanovit odpovídající algebraický doplněk $\bar{A}_{ij}$ (zavedený u det A) a sestavit z nich tzv. ADJUNGOVANOU MATICI k A:

$$\text{adj}\, A = (\bar{A}_{ji}) = (\bar{A}_{ij})^T$$

$\boxed{\bar{A}_{ij} = D_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}}$

na pozici (i,j) v ní stojí algebraický doplněk $\bar{A}_{ji}$ prvku a_{ji}, „položené indexy".

Platí:

VĚTA. A čtvercová řádu n, $|A| \neq 0$, potom inverzní A^{-1} k A je matice

$$A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{|A|}}_{\text{číslo}} \cdot \underbrace{\text{adj}\, A}_{\text{matice adjungovaná}}.$$

Důkaz – skripta.

Opět lze říci, že metoda někdy je značně komplikovaná, pro matice vyššího řádu bychom museli počítat mnoho determinantů, abychom mohli zapsat tvar A^{-1}!

Někdy je dobré vědět následující:

Pro čtvercové matice A, B řádu n:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

(důkaz je formálně složitější).

$$|k \cdot A| = k^n \cdot |A| \quad \text{pro } k \in \mathbb{R};$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$ det inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu původní matice

(proč: $A^{-1} \cdot A = E$; $|A^{-1} \cdot A| = |A^{-1}| \cdot |A|$ (1. vlastnost)

$\| \quad |E| = 1 \longrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Pomocí této vlastnosti se dá dokázat, co jsme už uváděli:

k A čtvercové existuje A^{-1} $\Longleftrightarrow$ A je $\underbrace{\text{regulární}}_{|A| \neq 0}$,

skripta.

K ŘEŠENÍ HOMOGENNÍCH SOUSTAV.

O soustavě m lin. alg. rovnic pro n neznámých řekneme, že je homogenní, má-li tvar $A \cdot X = O$, tedy je-li sloupec pravých stran nulový, neboli každá rovnice má pravou stranu rovnou nule.

Př. Soustava rovnic

$$x + 2y + z - u = 0,$$
$$2x + 3y - z + 2u = 0,$$
$$4x + 7y + z \quad = 0$$

je homogenní, lze ji řešit < Gaussovou eliminací / Jordanovou metodou, řešení zkuste najít a zkontrolovat výsledek podle skripta; bude záviset na 2 parametrech (Frob. věta)

Obecně platí:

homogenní soustava je VŽDY ŘEŠITELNÁ, protože

$$h(A_r) = h(A).$$

v rozšířené matici soustavy přibyl oproti matici A soustavy JEN nulový sloupec pravých stran, tím hodnost nezměníš.

Pro $A \cdot X = 0$:

je-li $h(A) = n$, existuje jediné řešení $X = (0, 0, \dots, 0)$ zvané triviální nebo nulové řeš.

$h(A) < n$, soustava má nekonečně mnoho řešení, která jsou závislá na $p = n - h(A)$ vedlejších parametrech.

Pokud $m = n$:

$\boxed{\text{VĚTA}}$ Homogenní soustava (n rov., n nezn.) $A \cdot X = 0$ má NETRIVIÁLNÍ řešení právě tehdy, když $\boxed{|A| = 0.}$

Ve skriptech si přečtěte: obecné řešení soustavy
fundamentální systém řešení

Př: najděte obecné řešení soustavy

$$x+2y-2u-5v=0,$$
$$3x-4y-6u+5v=0,$$
$$2x-y-4y\qquad=0.$$

Soustava je homogenní, proto $h(A)=h(A_r)$ a řešení existuje.

Sled úprav (při eliminaci) matici A soustavy, NEPÍŠEME nulový sloupec pravých stran.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1&2&-2&-5\\3&-4&-6&5\\2&-1&-4&0\end{bmatrix}}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2&-5\\0&-10&0&20\\0&-5&0&10\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ /\cdot\frac{-1}{10}\\ /\cdot\frac{-1}{5}\end{matrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2&-5\\0&1&0&-2\\0&1&0&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&-2&-5\\0&1&0&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$h=2$, $n=4$, $\Rightarrow |A|=0$.

počet parametrů $p=4-2=2$

Druhá z upravených rovnic vidíme, že

$$y=2v,$$

z první rovnice máme

$$x=-2y+2u+5v,\quad x=-4v+2u+5v,$$

dosadíme

$$x=2u+v,$$

všechna řešení jsou vektory z množiny

(*) $\boxed{\{(2u+v,\,2v,\,u,\,v):\ u,v\in\mathbb{R}\}}.$

Popíšeme toto řešení jako OBECNÉ ŘEŠENÍ s užitím FUNDAMENTÁLNÍHO SYSTÉMU:

(2) dopočítáme k nim zbylé neznámé | (1) Provedeme volby pro u, v tak, aby získaná řešení byla všechna lineárně nezávislá

DOPOČÍTÁME:

x	y
2	0
1	2

VOLÍME:

u	v
1	0
0	1

MÁME LIN. NEZÁV. VEKTORY:

FUNDAMENT. SYST. $\left\{\begin{array}{l}X_1=(2,0,1,0)\\ X_2=(1,2,0,1)\end{array}\right.$

OBECNÉ ŘEŠENÍ: $\boxed{X=uX_1+vX_2 \text{ pro lib. } u,v\in\mathbb{R}}$

PROVĚŘTE, ŽE VYJDOU PRÁVĚ TY VEKTORY, KTERÉ MÁME V (*).

Dá se ukázat:

ne rovnic,
n neznámých

$\boxed{V.}$ Obecné řešení NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY rovnic $A.X=B$

aspoň 1 z rovnic má pravou stranu nenulovou

je možno hledat ve tvaru:

$$X = X_0 + X_{HOM}$$

jedno pevně určené řešení dané nehomogenní soustavy

obecné řešení "přidružené" homogenní soustavy $A.X=0$

Vzpomeňte si na to, až budete ve 3. semestru řešit soustavy lin. diferenciálních rovnic – to bude mít podobnou strukturu.

$\boxed{Př.}$ Užitím inverzní matice k matici soustavy řešte soustavu: $5x-3y=1,\ 3x+2y=12.$

$A.\underbrace{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\12\end{bmatrix}}_{B}$; $\boxed{X=A^{-1}.B}$

$A:\ \begin{bmatrix}5 & -3\\3 & 2\end{bmatrix}$

	A	E	
	5 −3	1 0	
(−5)./	3 2	0 1	
$\boxed{3}$	5 −3	1 0	
↳	−15 −10	0 −5	
	5 −3	1 0	
	0 −19	3 −5	
dál	5 −3	1 0	
	0 $\boxed{1}$	$\frac{-3}{19}$ $\frac{5}{19}$	/.(+3)
	5 0	$\frac{10}{19}$ $\frac{15}{19}$	/.$\frac{1}{5}$
	0 1	$\frac{-3}{19}$ $\frac{5}{19}$	
E	1 0 / 0 1	$\frac{1}{19}.\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & 5\end{pmatrix}=A^{-1}$	

to nevypadá hezky, ale NEVZDÁVÁM to

PROČ PŘIJDOU "nepříjemná" čísla? $\det A=\underbrace{\begin{vmatrix}5 & -3\\3 & 2\end{vmatrix}}_{5.2-(-9)}=\underline{\underline{19}}.$

A^{-1} by se dalo hledat pomocí adj A a det A.

ZK.:

Je: $\begin{pmatrix}5 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & 5\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}10+9 & 15-15\\6-6 & 9+10\end{pmatrix}}_{19.E}$

TEDY:

$\underbrace{\begin{pmatrix}5 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}}_{A}.\underbrace{\frac{1}{19}.\begin{pmatrix}2 & 3\\-3 & 5\end{pmatrix}}_{A^{-1}}=E.$

SOUSTAVA MÁ JEDINÉ ŘEŠ.

Řešení hledáme ve tvaru (sloupcové) matice

$$X = A^{-1} \cdot B,$$

dosadíme: $$X = \frac{1}{19} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \end{bmatrix} = \frac{1}{19} \cdot \begin{bmatrix} \overbrace{2+36}^{38=2.19} \\ \underbrace{-3+60}_{57=3.19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad \boxed{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \end{aligned}}$$

(matice řešení má tvar sloupce, transponováním jí dáme charakter řádku, (2, 3)).

Pozn. $|A| = 19 \neq 0$, matice soustavy je regulární, příslušná homogenní soustava by měla pouze triviální (= nulové) řešení (0, 0).