Př. Rovina $\rho \equiv ABC$ je dána body

$A=[2,1,0]$, $B=[1,1,1]$, $C=[-1,3,-2]$.

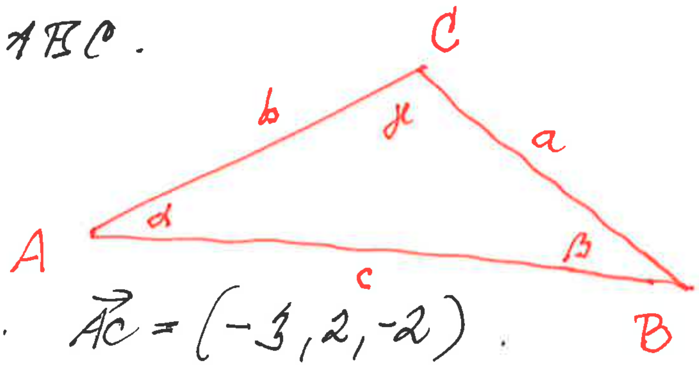
Určete

(a) obsah S_Δ trojúhelníku ΔABC.

(b) obecnou rovnici roviny, ve které trojúhelník leží.

(c) délky stran trojúhelníku ΔABC.

(d) úhly trojúhelníku.



Stanovíme vektory:

$\vec{AB}=(-1,0,1)$; $\vec{BC}=(-2,2,-3)$; $\vec{AC}=(-3,2,-2)$.

k (a): $S_\Delta = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|$; postačí nám tedy vektorový součin

$$\vec{w}=\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -3\end{vmatrix}=(0-2)\vec{i}-(3+2)\vec{j}+(-2)\vec{k}=$$

$$=-2\vec{i}-5\vec{j}-2\vec{k}=(-2,-5,-2).$$

Laplaceův rozvoj det podle 1. řádku

zkrácený souřad.

$$\|\vec{w}\|=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33},$$

$$\boxed{S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{33}.}$$

k (b): 1) Obecná rovnice roviny užitím vektorového součinu: normálový vektor roviny ρ je jistě KOLINEÁRNÍ s vektorem $\vec{w}=\vec{AB}\times\vec{AC}$, kde můžeme brát např. jeho (−1)-násobek $(-\vec{w})$:

$$\vec{n}=(a,b,c)=(2,5,2).$$

u x u y u z v rovnici ρ

Proto $\rho: 2x + 5y + 2z + d = 0$,

d určíme např. z podmínky

$B = [1,1,1] \in \rho$: $2+5+2+d=0$, odtud $d=-9$,

rovnice rov. ρ : $\boxed{2x + 5y + 2z - 9 = 0.}$

k (b), 2) možnost: užitím smíšeného součinu:
pro bod $X \in \rho$ musí být vektory $\vec{AX}, \vec{AB}, \vec{AC}$ komplanární,
proto SMÍŠENÝ SOUČIN musí být nulový:

$$0 = [\vec{AX}, \vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} x-2, & y-1, & z \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \dots = \dots =$$

počítáme (např. rozvoj podle 1. řádku)

$$= (x-2)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - (y-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2(x-2) - 5(y-1) - 2z, \quad \rho: -2x - 5y - 2z + 9 = 0.$$

(lišíme se násobkem $\cdot(-1)$.)

c) strana $a = \|\vec{BC}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{17}$,

–"– $b = \|\vec{AC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$,

–"– $c = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

d) úhly u vrcholů A, B, C označíme postupně α, β, γ.
Bude stačit najít jejich kosiny: nehledáme úhel (orientovaných) vektorů, ale úhly (různoběžných) přímek – vnitřní úhly v $\triangle$ mají velikosti v intervalu $\langle 0, \pi)$.

u skalár. souč. proto užijeme ABSOLUTNÍ HODNOTU!

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{AB}\cdot\vec{AC}|}{\|\vec{AB}\|\cdot\|\vec{AC}\|}$, $\vec{AB}\cdot\vec{AC} = (-1,0,1)\cdot(-3,2,-2) = (-1)\cdot(-3) + 0 + (-2) = \boxed{1}$

$\cos\alpha = \dfrac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}$; $\cos\beta = \dfrac{|\vec{AB}\cdot\vec{BC}|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{|2-3|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}} = \dfrac{|-1|}{\sqrt{2}\sqrt{17}}$

Tedy: $\cos\alpha = \cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}}$ $\quad(\alpha=\beta)$

$$\cos\gamma = \frac{|\vec{AC}\cdot\vec{BC}|}{\|\vec{AC}\|\cdot\|\vec{BC}\|} = \frac{16}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{17}} = \frac{16}{17}$$

(úhly bychom mohli najít...)

$$\vec{AC}\cdot\vec{BC} = (-3,2,-2)\cdot(-2,2,-3) = \underbrace{(-3)\cdot(-2)}_{6} + \underbrace{2\cdot 2}_{4} + \underbrace{(-2)\cdot(-3)}_{6} = \boxed{16}$$

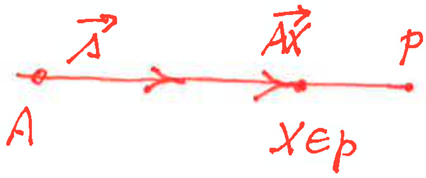
$\boxed{\text{PŘÍMKA}}$ v E_3.

uvažujme $p = [A; \vec{s}]$ ... to je zápis přímky určené v prostoru bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a směrovým vektorem $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$.

Obecný bod $X = [x, y, z]$:

$X \in p \iff \vec{AX}, \vec{s}$ jsou vektory kolineární, (lin. závislé)

právě tehdy



tedy platí:

$$\vec{AX} = t\cdot\vec{s} \quad \text{pro nějaké } t\in\mathbb{R}$$

vektor $\vec{AX}$ je násobkem směrového vekt.

vektorovou rovnici mohu ROZEPSAT DO SLOŽEK:

dostáváme tzv. parametrické rovnice přímky p:

$$p: \begin{cases} x = x_A + t\,s_1 \\ y = y_A + t\,s_2 \\ z = z_A + t\,s_3 \end{cases}, \quad t\in\mathbb{R}.$$

Souř. b. A $\qquad \vec{s}$

vypočtu-li parametr t z každé rovnice, mám KANONICKÉ ROV. př. p

$$p: \frac{x - x_A}{s_1} = \frac{y - y_A}{s_2} = \frac{z - z_A}{s_3} \; (= t)$$

Přímka v prostoru často vzniká jako průsečnice dvou (nenormalitních) rovin

$$p: \begin{cases} \rho: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ \sigma: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{n}^{\rho} = (a_1, b_1, c_1) = \vec{n}_1$

$\vec{n}^{\sigma} = (a_2, b_2, c_2) = \vec{n}_2$

$p = \rho \cap \sigma$

body přímky vznikají jako (společné) řešení soustavy 2 lin. rovnic – hledáme v parametrickém tvaru;

a to buďto "algebraicky" – určíme obecné řešení soustavy rovnic tak, jak jsme to trénovali,

nebo "geometričtěji" – najdu jedno řešení soustavy – to budou souřadnice BODU, ozn. ho A, pak ještě potřebuji směrový vektor $\vec{s}$: protože $\vec{n}^{\rho} \times \vec{n}^{\sigma}$ je kolmý k $\vec{n}^{\rho}$ i k $\vec{n}^{\sigma}$, jsou $\vec{s}$, $\vec{n}^{\rho} \times \vec{n}^{\sigma}$ kolineární, $\vec{s}$ je nalezen.

Př. Určete parametrické rovnice přímky

$$p: \begin{cases} -3x - y + 2z \boxed{+4} = 0, \\ 2x - 3y + z \boxed{-5} = 0. \end{cases}$$

$\vec{n}_1 = (-3, -1, 2)$

(změna znam.)

$\vec{n}_2 = (2, -3, 1)$

① Gaussova eliminační metoda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \end{array}\right)^{\boxed{2}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & 7 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \dots x = -4y + 3z - 1 \\ \dots 7z = 7 + 11y \end{array}$$

$\Downarrow$

$z = \frac{1}{7}(7 + 11y)$

nechceme zlomky, můžeme volit: $y = 7t;\ t \in \mathbb{R}$ volíme

dopočítáme: $z = 11t + 1$, $x = -28t + 33t + 3 - 1$, $x = 5t + 2$

$$\boxed{p: x = \underbrace{2}_{x_A} + 5t,\ y = 7t,\ z = \underbrace{1}_{z_A} + 11t;\ t \in \mathbb{R}.}$$

$y_A = 0$

$A = [2, 0, 1]$, $\vec{s} = (5, 7, 11)$.

(2) Užitím vektorového součinu normálových vektorů rovin,

$\vec{n_1} = (-3, -1, 2)$, $\vec{n_2} = (2, -3, 1)$

$$\vec{n_1} \times \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = +5\vec{i} - (-7)\vec{j} + 11\vec{k} = 5\vec{i} + 7\vec{j} + 11\vec{k} =$$

$-1+6$

$$= \underbrace{(5, 7, 11)}_{\neq \vec{0}} = \vec{s}$$

beru za směr. v.

najdeme 1 bod tím, že zvolíme jednu jeho souřadnici, tu dosadíme a vyřešíme vzniklou soustavu pro 2 neznámé. Zvolme $\boxed{z_A = 1}$:

$$\begin{cases} -3x_A - y_A + 6 = 0, & /\cdot 2 \\ 2x_A - 3y_A - 4 = 0; & /\cdot 3 \end{cases}$$ (vyloučíme x_A)

$$\left.\begin{aligned} -2y_A + 12 &= 0 \\ -9y_A - 12 &= 0 \end{aligned}\right\} +$$

$-11y_A = 0$, $\boxed{y_A = 0}$, dosazení do 2. rovnice:

$2x_A = 4$, $\boxed{x_A = 2}$

$A = [2, 0, 1]$

Dostaneme STEJNOU parametrizaci přímky p; někdy vyjde (dokonce) formálně odlišná parametrizace a je nutno ji přepočítat, abychom se přesvědčili, že je to stejná přímka.

POLOHOVÉ ÚLOHY

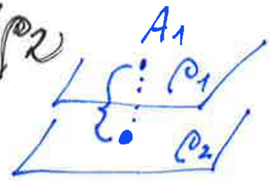
Pro dvě ROVINY:

$\rho_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, normál. vektor $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, bod $A_1 \in \rho_1$,

$\rho_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, normál. vektor $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$, bod $A_2 \in \rho_2$,

MOŽNOSTI:

$\left.\begin{matrix}\vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ kolineární} \\ \vec{n}_2 = k\vec{n}_1\end{matrix}\right\} \ldots \rho_1 \parallel \rho_2$



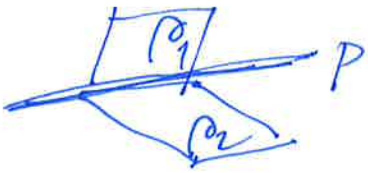
$A_1 \in \rho_2 \ldots \rho_1 \equiv \rho_2$ TOTOŽNÉ

$\underbrace{A_1 \notin \rho_2 \ldots \rho_1 \not\equiv \rho_2}$

vzdálenost ρ_1 a ρ_2 = vzdálenost A_1 od ρ_2

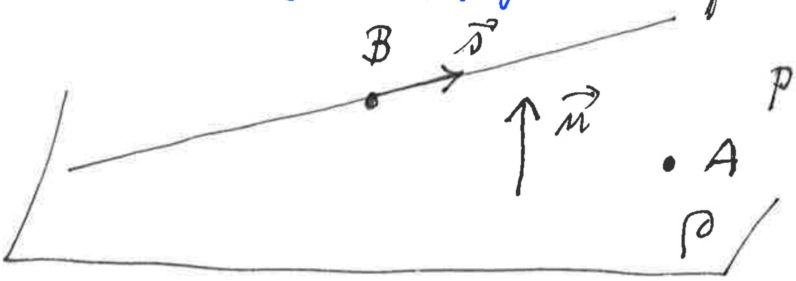
$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ NEJSOU kolineární:

ρ_1, ρ_2 RŮZNOBĚŽNÉ rov.



mají společnou právě 1 přímku p

PŘÍMKA a ROVINA:



$p = [B; \vec{s}]$, $\rho = [A; \vec{n}]$ $\vec{n} \perp \rho$

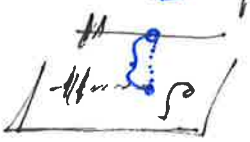
MOŽNOSTI:

$\vec{s} \perp \vec{n} \ldots p \parallel \rho$

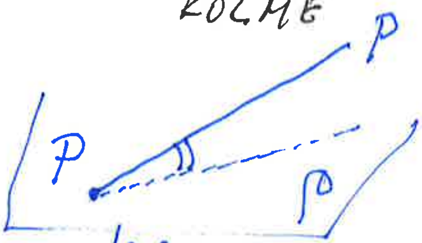
$B \in \rho \ldots p \subset \rho$

$B \notin \rho$

$\boxed{\text{vzdál. } B \text{ od } \rho = \text{vzdálenost } p \text{ od } \rho}$



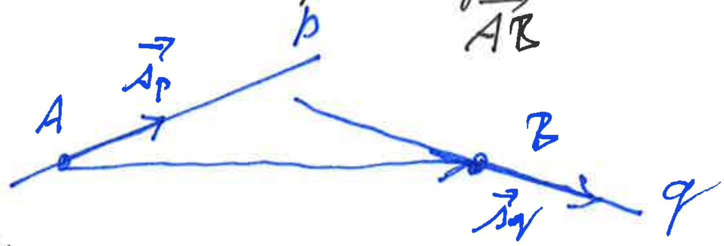
$\vec{s}, \vec{n}$ NEJSOU KOLMÉ



$P = p \cap \rho$; úhel p a ρ.

DVĚ PŘÍMKY:

$p = [A; \vec{s}_p]$, $q = [B; \vec{s}_q]$

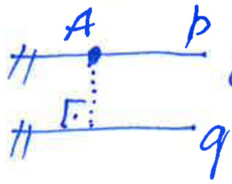


MOŽNOSTI:

$\vec{s}_p, \vec{s}_q$ směrové vektory JSOU KOLINEÁRNÍ

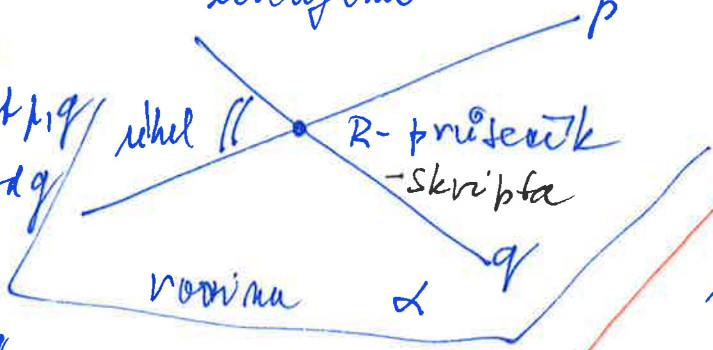
ROVNOBĚŽNÉ, $p \parallel q$

- $A \in q$: $p \equiv q$ totožné
- $A \notin q$ různé
  uvedme: vzdálenost p, q = vzdálenost A od q

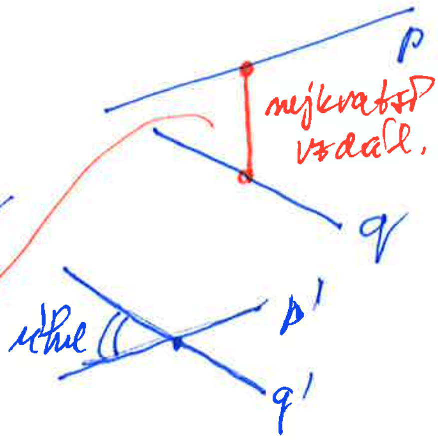


$\vec{s}_p, \vec{s}_q$ NEJSOU KOLINEÁRNÍ

- $[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \vec{AB}] = 0$
  RŮZNOBĚŽNÉ
  určujeme:



- $[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \vec{AB}] \neq 0$
  MIMOBĚŽNÉ



Nejkratší vzdálenost MIMOBĚŽEK:

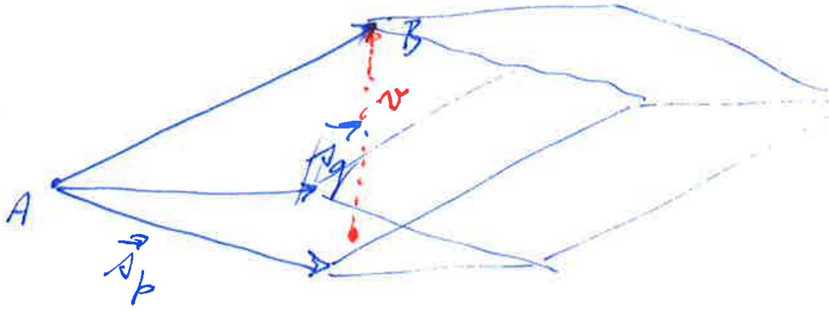
"natáhnu" na vektory rovnoběžnostěn ... $\vec{s}_p, \vec{s}_q, \vec{AB}$,

↓

v něm uvedme VÝŠKU

$$v = \frac{|[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \vec{AB}]|}{\|\vec{s}_p \times \vec{s}_q\|} \quad \dots \quad \frac{\text{Objem tělesa}}{\text{obsah podstavy}}$$

Hledání vzdáleností patří mezi úlohy METRICKÉ, kterým se budeme v dalším věnovat.



METRICKÉ ÚLOHY

Vzdálenost bodu od roviny:

Postup známý ze SŠ:

bodem M vedeme kolmici k k rovině ρ, určíme průsečík $P = k \cap \rho$, vzdálenost M od ρ = = vzdál. bodů M, P = velikost úsečky MP.

nevýhoda: musíme škaredě vypočítat parametr bodu P:

Př. $M = [3,-2,-1]$, $\rho: 2x-6y-3z+8=0$, ? $d(M,\rho)$?

kolmice $k = [M; \vec{n}]$, kde $\vec{n} = (2,-6,-3)$, $k: (\underbrace{3+2t}_{x}, \underbrace{-2-6t}_{y}, \underbrace{-1-3t}_{z})$

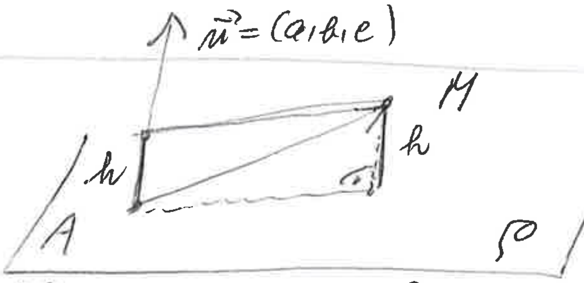
P: $2(3+2t)-6(-2-6t)-3(-1-3t)+8=0$,

$6+4t+12+36t+3+9t+8=0$,

$49t=-29$, $t=-\frac{29}{49}$,

$P = [\ldots$ nepěkný výraz $]$

Nová možnost postupu:



volím $A \in \rho$ bod

vzdálenost
$d(M,\rho) = h$ = délka průmětu vektoru $\vec{AM}$ do vektoru $\vec{n}$ (pomocného)

$$h = \|\vec{AM}_{\vec{n}}\| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{AM}|}{\|\vec{n}\|}$$

Př. Stejné zadání jako nahoře: volím bod $R=[-1,1,0] \in \rho$,

počítám: $\vec{RM} = (3-(-1), -2-1, -1-0) = (4,-3,-1)$

$\vec{n} = (2,-6,-3)$, $\|\vec{n}\| = \sqrt{4+36+9} = \sqrt{49} = 7$,

$\vec{RM} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 4 + (-6) \cdot (-3) + (-3)(-1) = 8+18+3 = 29$,

$d(M,\rho) = \boxed{h} = \frac{|29|}{7} = \boxed{\frac{29}{7}}$ $(\doteq 4{,}14)$.

M2)

Př.: určete vzdálenost bodu M od $\rho \equiv ABC$;

$M=[3,-2,-1]$ (jako předtím), rovina je dána body:

$A[5,1,4]$, $B[-1,-2,6]$, $C[2,3,-2]$. $\vec{AB}=(-6,-3,2)$, $\vec{AC}=(-3,2,-6)$

Jedna možnost - najdu $\vec{AB}\times\vec{AC}=\dots=(14,-42,-21)=7\cdot(2,-6,-3)$,

beru normál. vektor $\vec{n}=\frac{1}{7}(\vec{AB}\times\vec{AC})=(2,-6,-3)$,

najdu obec. rovnici roviny ρ: $2x-6y-3z+d=0$,

dopočítám d, např. z $B\in\rho$ ....

$\rho: 2x-6y-3z+8=0$,

postupuji jako minule.

NEBO: vzpomenu si na OBJEM rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{AB},\vec{AC},\vec{AM}$, $V=\underbrace{\text{podstava}}_{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}\cdot\underbrace{\text{výška}}_{h\text{ - hledám}}$

$|[\vec{AM},\vec{AB},\vec{AC}]|$ abs. hodnota smíšeného součinu

$V=|\text{det. ze souřadnic}|$; $\vec{AM}=(-2,-3,-5)$

$$[\vec{AM},\vec{AB},\vec{AC}]=\begin{vmatrix}-6&-3&2\\-3&2&-6\\-2&-3&-5\end{vmatrix}\underset{\text{úpravy}}{=}\dots=203=7\cdot 29$$

(nebo: $V=|\vec{AM}\cdot(\vec{AB}\times\vec{AC})|=\dots$ SAMI)

$\vec{AB}\times\vec{AC}=(14,-42,-21)=7\cdot(2,-6,-3)$,

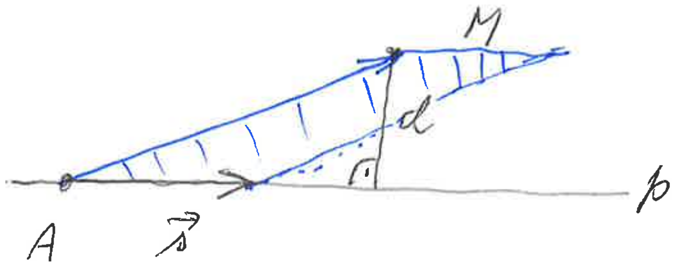
$S_{\square}=\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|=\sqrt{49(2^2+(-6)^2+(-3)^2)}=7\cdot 7$

výška $h=\frac{V}{S_{\square}}=\frac{|[\vec{AM},\vec{AB},\vec{AC}]|}{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}=\frac{\cancel{7}\cdot 29}{\cancel{7}\cdot 7}=\boxed{\frac{29}{7}}$.

(Předchozí postup byl NEJJEDNODUŠŠÍ)

Odpověď: vzdálenost $d(M;\rho)$ bodu M od rov. ρ je $\frac{29}{7}$.

Vzdálenost bodu od přímky



Úl. máme určit vzdálenost bodu M od přímky $p = [A; \vec{s}]$ (v prostoru). Užijeme vektorového součinu k výpočtu plochy rovnoběžníku: určují směr. vektor $\vec{s}$, pomocný v. $\vec{AM}$,

určí ▱, jeho plocha $S_{▱} = \begin{cases} \|\vec{s}\| \cdot d \\ \|\vec{s} \times \vec{AM}\| \end{cases}$, podstava · výška

HLEDÁM

z druhého vyjádření spočítáme výšku $d = d(M;p)$:

$$\boxed{d = \frac{\|\vec{s} \times \vec{AM}\|}{\|\vec{s}\|}.}$$

Př. Určete vzdálenost bodu M od přímky p, kde $M = [1,-1,3]$,

$$p: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases} ; \; t \in \mathbb{R}. \qquad \vec{s} = (-3, 2, -2)$$

$A = [2,-1,2] \in p$

$\vec{AM} = (-1, 0, 1)$

Je $\|\vec{s}\| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$,

$$\vec{s} \times \vec{AM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k} = (2, 5, 2),$$

$$\|\vec{s} \times \vec{AM}\| = \sqrt{4+25+4} = \sqrt{33},$$

$$d(M;p) = d = \frac{\|\vec{s} \times \vec{AM}\|}{\|\vec{s}\|} = \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{17}}.$$

Př. Určete vzdálenost bodu od roviny:

$$M=[7,8,5]\ ;\ \rho=[A;\vec{n}],\ A=[1,1,1],\ \vec{n}=(1,2,-3).$$

Pomocný vektor $\vec{AM}=(6,7,4)$, $\vec{AM}\cdot\vec{n}=6+14-12=8$,

$$\|\vec{n}\|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{7},$$

$$d(M;\rho)=d=\frac{|\vec{AM}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\frac{8}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}.$$

Př. Ověřte, že přímky p a q jsou ROVNOBĚŽNÉ a určete jejich VZDÁLENOST h, jestliže:

$p: x=1+t,\ y=1-t,\ z=2t;\ t\in\mathbb{R}$; určíme $A=[1,1,0]\in p$.

$q\equiv[B;\vec{s}_q]$, $B=[-1,2,0]$, $\vec{s}_q=(2,-2,4)$.

Protože směrový vektor př. p je $\vec{s}_p=(1,-1,2)$, je vektor

$$\vec{s}_q=2\cdot(1,-1,2)=2\vec{s}_p,$$ $\vec{s}_q$ je

kolineární s $\vec{s}_p$ a $p\parallel q$.

Zkusíme, zda přímky jsou různé nebo ne. "Testujeme" např. bod $B\in q$, zda leží na p (hledáme, zda ex. parametr t).

souřadnice bodu B
$$\left\{\begin{aligned} -1&=1+t\\ 2&=1-t\\ 0&=2t \end{aligned}\right\}$$
souřadnice na parametrizované přímce p

Pokud by takové $t\in\mathbb{R}$ existovalo, podle poslední rovnice by muselo být $t=0$, po dosazení vidíme, že tam rovnost NEPLATÍ:

$$-1\neq 1$$
$$2\neq 1$$

Předchozí rovnice jsou v rozporu

ZÁVĚR: $B\notin p$, tedy p,q jsou rovnoběžné různé.

M3B

určeme vzdálenost h přímek p, q jako vzdálenost bodu B od přímky p:

$$h = \frac{\|\vec{s}_p \times \vec{AB}\|}{\|\vec{s}_p\|}.$$

máme $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (-1,2,0)-(1,1,0) = (-2,1,0)$,

$\|\vec{s}_p\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$,

$$\vec{s}_p \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} = (-2,-4,-1),$$

$\|\vec{s}_p \times \vec{AB}\| = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$,

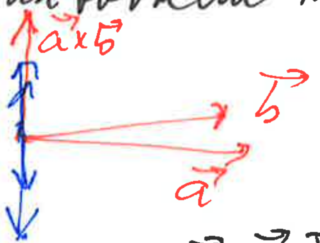
$(21 = 3\cdot 7)$

vzdálenost p, q je $h = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$.

$(6 = 3\cdot 2)$

Př. Určete vektor $\vec{c}$, který je současně kolmý k daným vektorům $\vec{a}=(1,-2,1)$, $\vec{b}=(2,1,-1)$ a má délku $2\sqrt{35}$.

Řeš.: vektory kolmé k vektorům $\vec{a}$ a $\vec{b}$ současně jsou kolineární s vektorovým součinem $\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b}$; musí tedy být $\vec{c}$ nějakým násobkem vektoru $\vec{u}$ (ale může jich být víc:



; zadaná podmínka omezuje výběr).

$$\vec{u} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Tedy $\vec{u} = (1,3,5)$, $\vec{c} = \ell(1,3,5)$,

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$,

$\|\vec{c}\| = \sqrt{\ell^2 \cdot 35} = |\ell| \cdot \sqrt{35} \overset{\text{má být rovno}}{=} 2 \cdot \sqrt{35}$, odtud $|\ell| = 2$, $\ell = \langle {2 \atop -2}$

2 řešení úl.: $\vec{c}_1 = (2,6,10)$, $\vec{c}_2 = (-2,-6,-10)$.

Př. Najděte společný bod R přímek p a q daných parametricky, pokud existuje:

$$p:\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-2t \\ z = 3t \end{cases};\ t\in\mathbb{R} \qquad q:\begin{cases} x = 2-s \\ y = s \\ z = -1+s \end{cases};\ s\in\mathbb{R}$$

Zjistěte, jestli existuje bod $R=[x_R, y_R, z_R]$ tak, aby mu příslušel nějaký parametr t na přímce p a současně nějaký parametr s na přímce q; muselo by platit:

$$x_R = 1+t = 2-s, \quad\Rightarrow\quad t+s=1 \ (-1)$$
$$y_R = 2-2t = s, \qquad 2t+s=2$$
$$\boxed{z_R = 3t = -1+s.}$$

sečtu: $\boxed{t=1}$ by vyhovovalo 1. a 2. rovnici, pak ověřím: $\boxed{s=0}$

Prozkoumám 3. rovnici:

$$L = 3t \underset{\text{dos.}}{=} 3, \qquad P = -1+0 = -1$$
$$L \neq P$$

SPOLEČNÝ BOD TEDY NEEXISTUJE; přičemž $p \nparallel q$ (SAMI)

Vzájemnou polohu máme nyní možnost prověřit pomocí vektorového a smíšeného součinu:

$\vec{s}_p = (1,-2,3)$, $\quad \vec{s}_q = (-1,1,1)$, $\quad A=[1,2,3]$,

$B=[2,0,-1]$, $\overrightarrow{AB} = (1,-2,-4)$

$$\vec{s}_p \times \vec{s}_q = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-5,-4,-1) = -(5,4,1) \neq \vec{0},$$

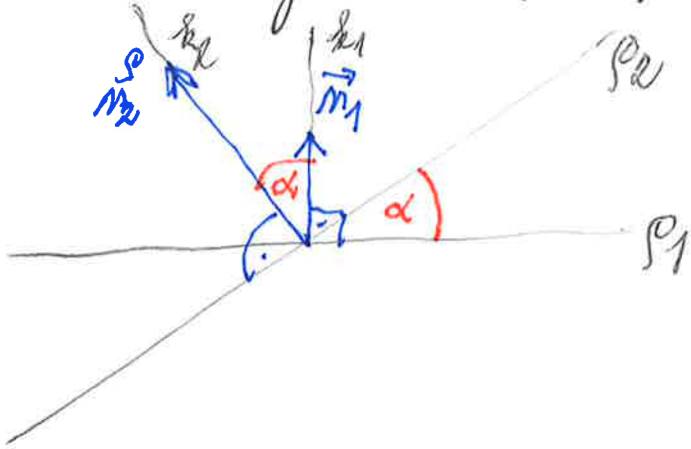
vektory nejsou kolineární, $p \nparallel q$, mohly by tedy být $\left\{\begin{array}{l}\text{různoběžné}\\ \text{mimoběžné}\end{array}\right.$

$$[\vec{s}_p, \vec{s}_q, \overrightarrow{AB}] = \overrightarrow{AB} \cdot \underbrace{(-5,-4,-1)}_{\vec{s}_p\times\vec{s}_q} = (1,-2,-4) \underbrace{\cdot}_{\text{skalární}} (-5,-4,-1) = \underbrace{-5+8+4}_{12-5=7} \neq 0,$$

p a q jsou MIMOBĚŽNÉ, můžeme najít jejich $\left\{\begin{array}{l}\text{úhel}\\ \text{nejkratší vzdálenost.}\end{array}\right.$ (SAMI)

Úhel dvou rovin.

Stanovit úhel (odchylku) dvou rovin ρ_1 a ρ_2: hledáme úhel α, $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, který se ukáže „v rovině kolmé k jejich průsečnici", pokud se roviny protínají; analyticky ho lze najít pomocí normálových vektorů takto (je to úhel kolmic k_1, k_2 k rovinám ρ_1, ρ_2):



$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

absol. hodnota skalár. s.

součin velikostí

Př. Určete úhel rovin $\rho_1: \; y = 0$ $\quad \vec{n}_1 = (0,1,0)$

$\rho_2: \; 2x - 3y - z - 1 = 0$ $\quad \vec{n}_2 = (2,-3,-1)$

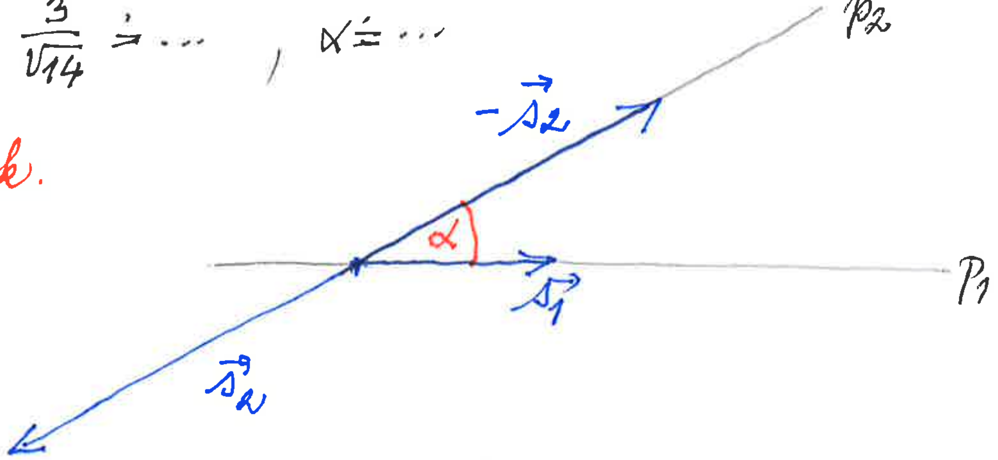
Je $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 - 3 + 0 = -3$, $\|\vec{n}_1\| = 1$, $\|\vec{n}_2\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$,

$$\cos\alpha = \frac{|-3|}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \doteq \dots, \quad \alpha \doteq \dots$$

Úhel dvou přímek.

Opět vybíráme úhel mezi 0 a $\frac{\pi}{2}$:

$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$;

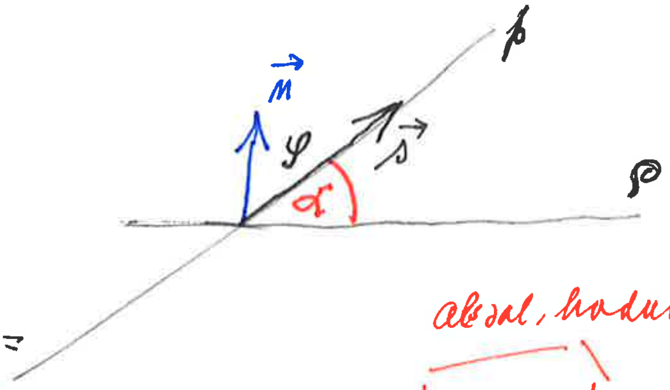


užijeme směrových vektorů: $\cos\alpha = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\| \cdot \|\vec{s}_2\|}$.

Úhel přímky a roviny

Vybíráme úhel v mezích 0 a $\frac{\pi}{2}$: $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Užijeme směrového vektoru $\vec{s}$ přímky a normálového vektoru roviny, abychom spočítali funkci úhlu φ doplňkového, $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



Z vlastností skalárního součinu je

$$\vec{n}\cdot\vec{s} = \|\vec{n}\|\cdot\|\vec{s}\|\cdot\cos\varphi =$$

$$= \|\vec{n}\|\cdot\|\vec{s}\|\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) =$$

$$= \|\vec{n}\|\cdot\|\vec{s}\|\cdot\sin\alpha, \quad \text{odtud:} \quad \sin\alpha = \frac{\overbrace{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}^{\text{absol. hodnota}}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{s}\|}.$$

$(\alpha \in \langle 0, \pi/2 \rangle)$

(Pokud budete porovnávat se skripty, občas v nich odhalíte nějaké grafické chyby a nedopatření).