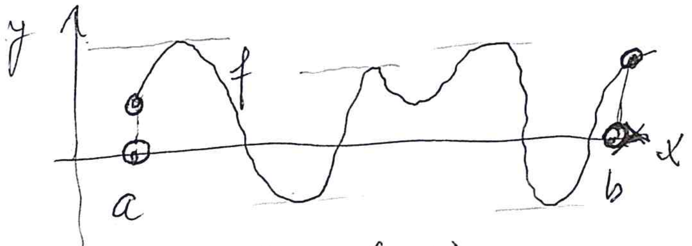
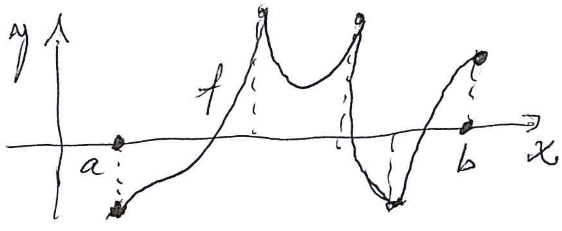
LOKÁLNÍ EXTRÉMY FUNKCE ⟨ MAX / MIN



D(f) = (a, b)



D(f) = ⟨a, b⟩

V řadě praktických úloh se snažíme zjistit extremální hodnoty funkcí, funkčních závislostí (aplikovaná matematika – optimalizační úlohy). Naučíme se vyhledat body, ve kterých by funkce měla dosahovat ⟨ vyšší / nižší ⟩ hodnoty než v bodech z okolí, ověřit, zda v tom bodě "lokální extrém" opravdu nastane, a SPOČÍTAT V NĚM FUNKČNÍ HODNOTU (na to se někdy zapomíná, ale to je právě to, co nás velmi zajímá, kolik ⟨ nejvíce / nejméně ⟩ můžeme naměřit jako funkční hodnotu, kam až graf ⟨ vystoupá / poklesne ⟩, ať už jde o ⟨ výrobu / finanční náklady / počet nakažených / ... ⟩, zpravidla v čase).

Zjistíme, že hodně informací poskytne první derivace funkce (pokud existuje), někdy užijeme také druhé derivace. Ze střední školy něco víme o funkcích ⟨ rostoucích / klesajících ⟩ na množině M, doplníme o nový pojem: kdy funkce ⟨ roste / klesá ⟩ v BODĚ.

Funkce f (v bodě) $x_0 \in D(f)$

ROSTE | **KLESÁ**

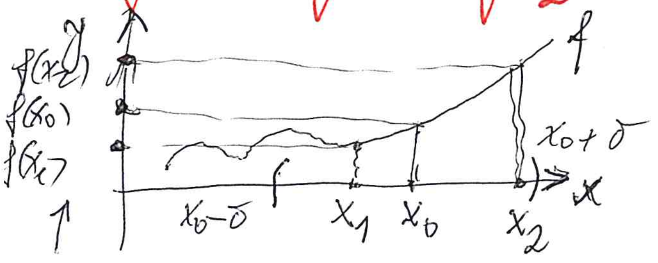
jestliže existuje okolí bodu $U(x_0) \subset D(f)$ takové, že

pro lib. $x_1, x_2 \in U(x_0)$ splňující

$$x_1 < x_0 < x_2$$

je

$$f(x_1) < f(x_0) < f(x_2).$$



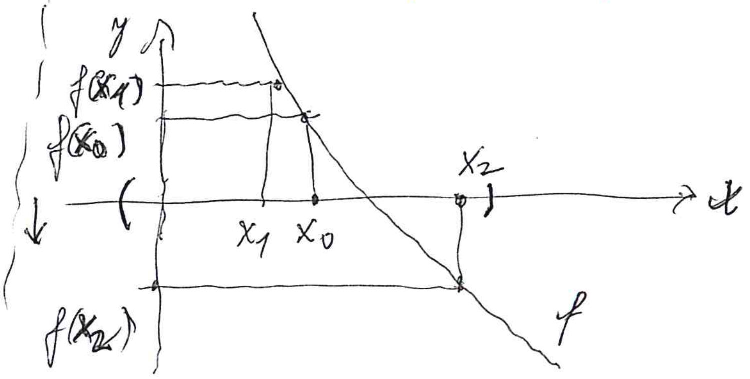
$x_1, x_2 \in U(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$

pro lib. $x_1, x_2 \in U(x_0)$ splň.

$$x_1 < x_0 < x_2$$

je

$$f(x_1) > f(x_0) > f(x_2).$$



Tato vlastnost se dá poznat ze ZNAMÉNKA DERIVACE $f'(x_0)$:
(v b. x_0, pokud existuje)

Je-li $f'(x_0) > 0$, pak f v x_0 ROSTE.

Je-li $f'(x_0) < 0$, pak f v x_0 KLESÁ.

Dále se dá dokázat pro spojité funkce na uz. intervalu:

Je-li f SPOJITÁ na uzavř. int. $\langle a,b\rangle$ a ex. derivace f' na (a,b), $f'(x) > 0$ na (a,b), pak je f ROSTOUCÍ na (a,b).

Je-li f SPOJITÁ na $\langle a,b\rangle$, má derivaci f' na (a,b), $f'(x) < 0$ na (a,b), pak je f KLESAJÍCÍ na (a,b).

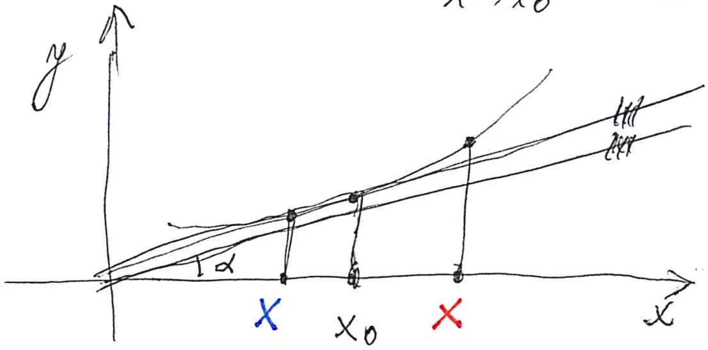
Tedy: URČÍME znaménko derivace, zn f',
zakreslíme je jako znaménko funkce,
ale vyznačíme ještě, zda fce f roste ↗ / klesá ↘

zn f': ↗ + ∘ ↘ − ∘ ↗ + . . .

Pro ty, které zajímá, jak se na to dá přijít: 2A.

dokazujeme: $\boxed{f'(x_0)>0 \Rightarrow f \text{ roste v } x_0.}$

podmínka znamená: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \underbrace{f'(x_0)}_{=k \,\dots\, \text{směrnice tečny},\ \operatorname{tg}\alpha} > 0$,



tedy na jistém $P(x_0)$ nastane některá ze 2 možností

$x-x_0>0$	$x-x_0<0$
a současně $f(x)-f(x_0)>0$,	a $f(x)-f(x_0)<0$
to znamená: když $x>x_0$, je $f(x)>f(x_0)$	když $x<x_0$, je $f(x)<f(x_0)$

dohromady: f ROSTE v x_0.

dokazujeme: $\left.\begin{array}{l} f \text{ spojitá na } \langle a,b\rangle \\ f'(x)>0 \text{ na } (a,b)\end{array}\right\} \Rightarrow f$ roste na $\langle a,b\rangle$:

$f'(x)>0$ na $(a,b) \Rightarrow \boxed{\text{pro } \overbrace{x_1<x_2}^{\text{libovolné body}}}$, $x_1,x_2\in\langle a,b\rangle$:

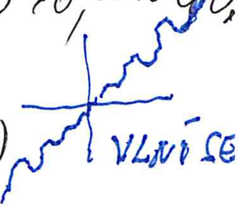
podle věty Lagrangeovy, najdu bod $c\in(x_1,x_2)$ tak, že

$$f(x_2)-f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0}\cdot\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} > 0 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1),$$

takže opravdu f roste na int. $\langle a,b\rangle$.

$\boxed{\text{Př.}}$ NOSTRAŠUJÍCÍ!! Dá se najít funkce, která roste v b. $x_0=0$, ale NENÍ ROSTOUCÍ v ŽÁDNÉM okolí $(-\delta,\delta)$, $\delta>0$, bodu 0.

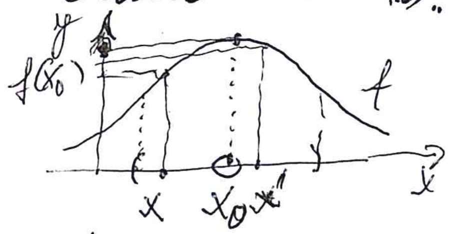
NAPŘ: $f(x) = \begin{cases} x+2x^2\sin\frac{1}{x} & \text{pro } x=0, \\ 0 & \text{pro } x=0 \end{cases}$ (dodefinujeme)



máme funkci f a bod $x_0 \in D(f)$.

f má v x_0 OSTRÉ LOKÁLNÍ MAXIMUM, jestliže existuje okolí $P(x_0, \delta) \subset D(f)$ takové, že pro všechna $x \in P(x_0)$:

$$\boxed{f(x) < f(x_0)}$$

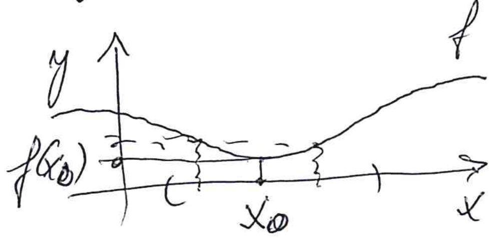


Podobně:

f má v x_0 OSTRÉ LOKÁLNÍ MINIMUM, jestliže ex.

$P(x_0, \delta) \subset D(f)$: pro $x \in P(x_0)$,

$$\boxed{f(x_0) < f(x)}$$



$f(x) \le f(x_0)$ lokální max.

$f(x_0) \le f(x)$ lokální min

Důležité je určit CELOU DVOJICI $[x_0, f(x_0)]$ na obrázku grafu funkce, tedy nejen bod x_0, ve kterém k extrému dojde, ale také funkční hodnotu – kam až funkce < VYSTOUPÁ / KLESÁ !

Dá se dokázat („nutná podmínka existence"):

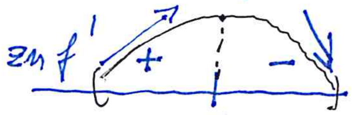
⊙ Má-li f v x_0 lokální extrém, pak nastane některý z případů:
- $f'(x_0)$ NEEXISTUJE
- $f'(x_0) = 0$ … x_0 je bod STACIONÁRNÍ

Najdeme tedy body „podezřelé z extrému" a ty dále prověříme – jestli opravdu extrém nastává.
K tomu můžeme využít další tvrzení.

Funkce by mohla nabývat své < největší / nejmenší > hodnoty také v krajních bodech intervalů z def. oboru, to tedy NEBUDEME UVAŽOVAT.

⊙ Je-li f SPOJITÁ ve (vl.) bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li prstencové okolí $P(x_0,\delta)$ takové, že fce f

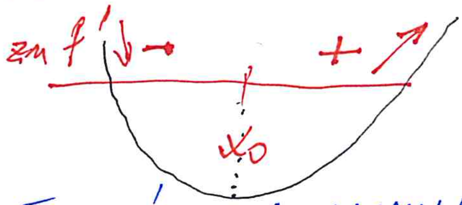
je rostoucí v $P^-(x_0)$ a je klesající v $P^+(x_0)$,



potom má f v x_0

OSTRÉ LOKÁL. MAXIMUM.

je klesající v $P^-(x_0)$ a je rostoucí v $P^+(x_0)$



OSTRÉ LOKÁLNÍ MINIMUM.

Př. Hledejme lokální extrémy funkce

$$f(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

(1) Definiční obor: funkce je složená, kvůli odmocnině potřebujeme $0 \le 1-x^2$, tedy $x^2 \le 1$; $|x| \le 1$; $x \in \langle -1, 1\rangle$. Kvůli funkci $\arcsin x$, která je definovaná na $\langle -1,1\rangle$, potřebujeme $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1$; $0 \le 1-x^2 \le 1$, to splňují všechna $x \in \langle -1,1\rangle$, nemáme další omezení a můžeme psát

$$D(f) = \langle -1, 1\rangle.$$

(2) Určeme derivaci a její def. obor. Je:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

$x \neq \pm 1$ $\quad$ $x \neq 0$ $\quad$ $x \neq 0$

Pomocné:

$$\left((1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot 2x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1-(1-x^2) = x^2.$$

VZTAH ROZDĚLME NA DVĚ ČÁSTI:

víme, že na $(-1,0)$, $|x| = -x$

na $(0,1)$, $|x| = x$.

(Pozn. Derivaci VŽDY počítáme na OTEVŘENÉM intervalu, abychom nemuseli zjišťovat jednostranné limity (derivaci zprava v -1, derivaci zleva v 1).

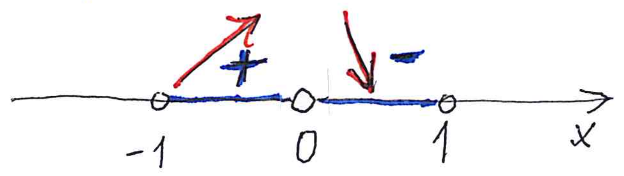
Vychází: $D(f') = (-1,0) \cup (0,1)$

pro $x \in (-1,0)$ je $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

pro $x \in (0,1)$ je $f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

pro derivaci máme:

zn f':



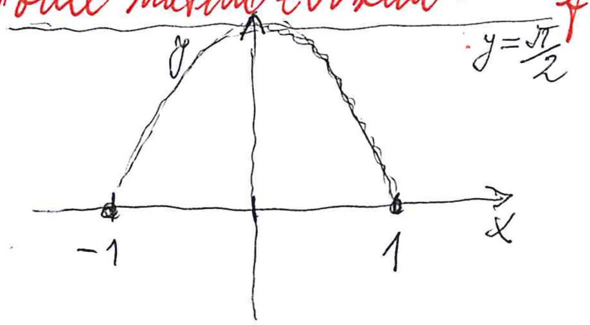
pro funkci f jsme zjistili:

f je definovaná (SPOJITÁ! – OVĚŘIT SI ⊙) v $x_0 = 0$,

f je rostoucí na $P^-(0)$,

f je klesající na $P^+(0)$.

Podle našeho tvrzení: f má v b. 0 ostré lokální MAXIMUM



a je $f(0) = \arcsin\sqrt{1-0}$
$= \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

$\left(\dfrac{\pi}{2} \doteq 1{,}57\right)$

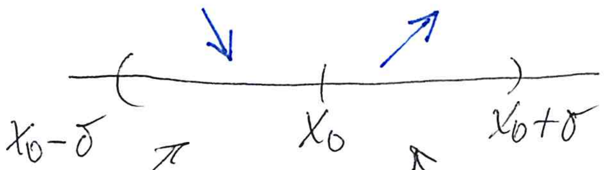
(⊙ vnitřní fce: $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1-x^2} = 1 = u_0$,
$x_0 = 0$

vnější fce: arcsin je funkce definovaná v $U^-(1)$, platí
$\lim\limits_{u\to 1} \arcsin u = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, tedy pro složenou
funkci platí $\lim\limits_{x\to 0} \arcsin\sqrt{1-x^2} = \arcsin 1 = \pi/2$).

⊙ Jestliže $f'(x_0) = 0$ (tj. bod x_0 je stacionární bod, $\boxed{\text{S.B.}}$)
a existuje $f''(x_0) \neq 0$ (2. deriv. nenulová), pak má
f v x_0 OSTRÝ LOKÁL. EXTRÉM:

pro $f''(x_0) > 0$, O.L. MINIMUM (m)   pro $f''(x_0) < 0$: O.L. MAXIMUM (M)

PROČ: $f'(x_0) \overset{(=0)}{}$ existuje $\Rightarrow$ f je spojitá v x_0; jestliže
$f''(x_0)>0 \Rightarrow f'$ roste v bodě $x_0 \Rightarrow$ ex. okolí $\mathcal{P}(x_0,\delta)$ $(\delta>0)$ tak, že



pro $x\in \mathcal{P}^-(x_0)$,
$$\underbrace{f'(x)<f'(x_0)\overset{\text{VÍME}}{=}0}_{(f'(x)<0)}$$
$\Downarrow$
f klesá v $\mathcal{P}^-(x_0)$

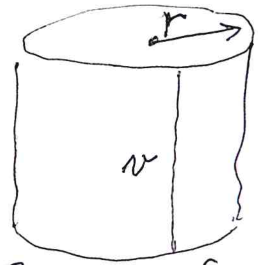
pro $x\in \mathcal{P}^+(x_0)$,
$$\underbrace{0\overset{\text{VÍME}}{=}f'(x_0)<f'(x)}_{(f'(x)>0)}$$
$\Downarrow$
f roste v $\mathcal{P}^+(x_0)$

f má o.l. min m v x_0.

Podobně při $f''(x_0)<0$.

Užijeme v aplikacích:

Př. máme najít rotační válec takový, aby měl zadaný objem V a přitom MINIMÁLNÍ POVRCH S. předp. $V>0$.
Hledáme tedy – poloměr válce r,
– výšku válce v.



Víme: $V=\pi r^2 v$; V je dáno, zkusme vyjádřit výšku: $v=\dfrac{V}{\pi r^2}$. Povrch S můžeme vyjádřit takto:
$$S=\underbrace{2\pi r^2}_{\text{2x plocha kruhové podstavy}}+\underbrace{2\pi r v}_{\text{plášť válce}}\overset{\text{DOSADÍM}}{=}2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{V}{\pi r^2},$$
$$S=S(r)=2\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$
Hledáme r tak, aby funkce $S(r)$ nabývala minimální hodnoty.

Derivujeme (podle r):

$$S'(r) = (2\pi r^2)' + \underbrace{\left(\frac{2V}{r}\right)'}_{(2Vr^{-1})'} = \underbrace{4\pi r}_{\text{vytkneme}} + (-1)2V\underbrace{r^{-2}}_{\text{vytknu}} = \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right).$$

Hledám S.B., v němž (v nich) má platit $S'(r) = 0$, tedy

$$?r \ldots \quad \frac{4\pi}{r^2}\left(r^3 - \frac{V}{2\pi}\right) = 0 \iff r^3 - \frac{V}{2\pi} = 0$$

$(r > 0)$ poloměr; $\frac{V}{2\pi}$ konstanta

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} > 0}$$

$r_1 > 0$

Znovu derivujeme:

$$S''(r) = (4\pi r)' - 2V(r^{-2})' = 4\pi + 4Vr^{-3}, \text{ dosadím:}$$

$$S''(r_1) = 4\pi + 4V \cdot \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^3} = 4\pi + 8\pi = 12\pi > 0$$

$\left(\text{stačilo uvážit: } r_1 > 0,\ V > 0, \text{ tedy } S''(r_1) = 4\pi + \frac{4V}{r_1^3} > 0\right)$. Odpověď:

Funkce $S(r)$ má v bodě $\boxed{r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}}$ ostré lokální minimum, pro tuto hodnotu r_1 je povrch válce S minimální, výška je dána vztahem

$$v_1 = \frac{V}{\pi r_1^2} = \frac{V}{\pi \cdot \sqrt[3]{\frac{V^2}{4\pi^2}}} = \sqrt[3]{\frac{V^3}{V^2} \cdot \frac{4\pi^2}{\pi^3} \cdot \underbrace{\frac{2}{2}}_{\cdot 1 \text{ přidám}}}$$

$$\left(V = \sqrt[3]{V^3}\right) \qquad = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi} \cdot 2^3},$$

$$\boxed{v_1 = 2r_1.}$$