DETERMINANTY

Pro soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je poměrně snadné ukázat, kdy je jednoznačně řešitelná a jak vektor řešení souvisí s koeficienty v rovnicích. Víme již, že ~~soustavu~~ můžeme zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \quad \Big|\cdot a_{22} \quad \Big|\cdot(-a_{21}) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \quad \Big|\cdot(-a_{12}) \quad \Big|\cdot a_{11} \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Postupujme vylučovací metodou, napřed vyloučíme x_2:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

Podobně můžeme vyloučit x_1:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\,x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}.$$

Na to, abychom mohli spočítat x_1 nebo x_2, potřebujeme, aby u nich byl nenulový koeficient.

Jestliže $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, má daná soustava jediné řešení tvaru ↓, které symbolicky zapíšeme jako:

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

CRAMEROVY VZORCE PRO $n=2$

2×2 - matici soustavy přiřadíme reálné číslo - její DETERMINANT 2. řádu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \longmapsto \det A = |A| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}_{\text{„SCHÉMA"}} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Pokud je determinant soustavy **NENULOVÝ**, souvisí jediné řešení soustavy s jejími koeficienty tak, že k matici soustavy napřed spočteme determinant (ověříme $|A|\neq 0$), ten bude stát ve jmenovateli zlomků, pak utvoříme pomocné matice

$$A_1=\begin{bmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{bmatrix}, \qquad A_2=\begin{bmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{bmatrix},$$

1. sloupec jsme v matici A nahradili sloupcem pravých stran

2. sloupec jsme v matici A nahradili sloupcem pravých stran

najdeme jejich determinanty a ty použijeme jako ČITATELE zlomků:

$$\boxed{x_1=\frac{|A_1|}{|A|}, \qquad x_2=\frac{|A_1|}{|A|}.}$$

CRAMEROVO PRAVIDLO pro $n=2$.

Př. Užitím Cramerova pravidla řešte soustavu rovnic

$$6x_1+x_2=4,$$
$$3x_1-2x_2=-3.$$

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 1\\ 3 & -2\end{bmatrix}, \quad |A|=\begin{vmatrix} 6 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=6(-2)-1\cdot 3,$$

$$|A|=-15\neq 0 \ (\Rightarrow 1 \text{ řeš. bude})$$

$$A_1=\begin{bmatrix} 4 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}; \quad |A_1|=\begin{vmatrix} 4 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}=4\cdot(-2)-(-3)\cdot 1=-8+3=-5;$$

$$A_2=\begin{bmatrix} 6 & 4\\ 3 & -3\end{bmatrix}; \quad |A_2|=\begin{vmatrix} 6 & 4\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-18-12=-30;$$

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=\frac{-5}{-15}=\frac{1}{3}; \quad x_2=\frac{|A_2|}{|A|}=\frac{-30}{-15}=2; \text{ řešení: } \boxed{\left(\tfrac{1}{3}, 2\right)}.$$

(Řešení: $x_1=1/3$, $x_2=2$.)

Podobně by bylo možno studovat soustavu tří lineárních algebraických rovnic pro tři neznámé, dostali bychom k pravidlu, jak sestavit k 3×3-matici její determinant a jak najít (jediné) řešení soustavy za předpokladu, že determinant bude NENULOVÝ. Případně postup rozšířit pro libovolné n. Determinant matice typu (n,n) je možné zavést i jinak, pomocí permutací. Zde budeme postupovat jinak, úsporněji, s využitím tzv. LAPLACEOVA ROZVOJE determinantu podle daného ŘÁDKU.

Uvažujme matici $A=(a_{ij})$ typu (n,n) a její determinant $|A|=|a_{ij}|$ (myslíme si, že už je nějak zaveden). Zvolme prvek a_{ij} na pozici (i,j) v A. Nyní VYNECHÁME v původní matici celý i-tý řádek a j-tý sloupec, máme matici typu $(n-1,n-1)$, vyjádříme její determinant a označíme ho A_{ij}; vytvoříme tzv. ALGEBRAICKÝ DOPLNĚK prvku a_{ij} jako výraz

$$(\bar{A}_{ij}=)\; D_{ij}=(-1)^{i+j} A_{ij}$$

SUBDETERMINANT nebo MINOR

ozn. ve skriptu

to už je číslo, determinant

(-1) umocněno na součet řádkového a sloupcového indexu prvku a_{ij}

Dá se ukázat, že platí:

$\boxed{\text{Věta}}$ (Laplaceova) Determinant $\det A=|A|$ je roven součtu součinů prvků libovolného pevného řádku s odpovídajícími algebraickými doplňky.

Laplaceovu větu tedy můžeme zapsat takto:

$$|A| = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \dots + a_{in} D_{in},$$

vezmeme prvky i-tého řádku

(často se bere $i=1$)

rozepsáno:

$$|A| = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} A_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot (-1)^{i+n} A_{in}$$

Obdobná věta platí také pro SLOUPCE.

Pozn. Pro $n=2$, máme-li užít Laplaceova rozvoje, musíme vědět, jak bude vypadat (subdeterminant neboli minor) o 1 řádku a 1 sloupci. Dodefinujme tedy:

jestliže matice $B=(b)$ je typu $(1,1)$, pak za její determinant bereme

$$\boxed{\det B = |B| = b.}$$

Např. pro matici $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ máme $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 15+2 = 17$ podle toho, jak jsme to zavedli původně; podle Laplaceova rozvoje podle 2. řádku dostaneme

$$|A| = \underbrace{(-1)}_{a_{21}} \cdot (-1)^{(2+1)} \cdot 2 + \underbrace{5}_{a_{22}} \cdot (-1)^{2+2} \cdot 3 = (-1)\cdot(-1)\cdot 2 + 15 = 17,$$

k a_{21} patří $A_{21} = |2| = 2$, k a_{22} patří $A_{22} = |3| = 3$

stejný výsledek. Zkusme ještě L. rozvoj podle 1. sloupce:

$$|A| = 3 \cdot (-1)^{1+1} \cdot 5 - (-1)^{2+1} \cdot 2 = 15 + 2 = 17.$$

Opět nejsme ve sporu se starší definicí.

Pro $n > 2$ dostáváme v Laplaceově větě prostředek, jak determinant čtvercové matice typu (n,n) spočítat postupně pomocí determinantů řádu nižšího. Ukažme.

Př. Určete determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} + \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+1}}_{=0} + \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+}}_{=0}$$

L. rozvoj podle 1. řádku

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 2 - 3 = \boxed{-1.}$$

Abychom vypočetli obtížnější příklady, musíme znát určitá pravidla pro počítání s determinanty, která nám umožní situaci zjednodušit. Právě jsme viděli, že je výhodné mít v řádku (popř. ve sloupci) co nejvíce nulových prvků. Dá se ukázat:

1. Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) k-násobek jiného řádku (sloupce).

2. Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k danému řádku (sloupci) lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců).

3. Vyměníme-li v determinantu mezi sebou dva různé řádky, změní se **znaménko** determinantu.

4. $|A^T| = |A|$ ... determinant se tedy nezmění, vyměníme-li sloupce za řádky (v daném pořadí).

DALŠÍ VLASTNOSTI VE SKRIPTU.

Př. Určeme $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $\boxed{-3}$ $\boxed{2}$

Zkusíme vhodné násobky 1. řádku přičítat k dalším řádkům tak, aby v 1. sloupci vznikly pod prvkem 1 nulové prvky:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & -4 \\ 0 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} + \underbrace{0\cdot(-1)^{2+1}\cdot|\ldots|}_{\text{bude}=0} + \underbrace{0\cdot(-1)^{3+1}\cdot|\ldots|}_{\text{bude}=0}$$

L.r. 1. sloupec

$+1$ (-1) $+1$

Všimneme si: v Laplaceově rozvoji dle ř./sl. se znaménka PRAVIDELNĚ střídají

Tedy $|A| = 7\cdot 5 - 3\cdot 4 = 35 - 12 = \boxed{23}$.

Př. Vypočteme:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 10 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -1 & 19 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 19 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & -17 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$\boxed{-3}$ $\boxed{-2}$

L.r. 1. sl.

prvky ve 2. sloupci jsou násobky č. 2, VYTKNEME 2 z celého sloupce PŘED determinant (které pravidlo ze skript jsme použili ?)

máme nachystáno na užití Laplaceova rozvoje podle 1. sloupce, stačí počítat 1 determinant matice (3,3), zbytek – 0

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & -17 \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & -17 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$1\cdot(-1)^{1+1}$ $\boxed{3}$

$$= (-2)\cdot 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}_{-4+5} = \boxed{-2}.$$

Vztahy podobné těm, které jsme odvodili pro řešení soustavy 2 rovnic o dvou neznámých, se dají odvodit obecně pro soustavu n rovnic (lin. alg.) pro n neznámých.

Věta "Cramerovo pravidlo"

Je-li dána soustava $A \cdot X = B$, kde matice soustavy A je čtvercová typu (n,n) s NENULOVÝM DETERMINANTEM, $|A| \neq 0$, pak má soustava rovnic právě JEDNO řešení

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \text{ kde}$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

v $|A_i|$ je i-tým sloupcem právě sloupec pravých stran, ostatní prvky jsou stejné jako v $|A|$.

(Důkaz se dá najít ve skriptu; napřed je ale třeba vědět, co je to matice inverzní k dané matici a jak se dají vyjádřit její prvky – ukážeme v další lekci).

Cramerovo pravidlo je tedy určeno především pro soustavy, pro které platí $m = n = h$, $p = n - h = 0$ (i když se dá využít i jindy). Při velkém počtu neznámých je velké riziko, že se spleteme při výpočtu některého determinantu. Tedy při ručním počítání, když determinanty za nás nespočítá např. počítačový program, se hodí Cramerovo pravidlo např. v situaci, kdy máme spočítat POUZE JEDNU NEZNÁMOU a ty další nás nezajímají.

Příklad na užití Cramerova pravidla při $n=3$ si prostudujte ve skriptu.

Př. Určete neznámou y, víte-li, že je splněna následující soustava rovnic:

$$x + 2y + 3z = 5,$$
$$x + 3y + 4z = 6,$$
$$2x - y - z = 1.$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nejprve určeme $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \boxed{-1} \\ \boxed{-2} \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -7 \end{vmatrix} = -7-(-5)$

Lapl. rozvoj, 1. sl.

$|A| = -2 \neq 0$, můžeme užít Cramerovo pravidlo

Předtím: $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \boxed{-2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -9 & -7 \end{vmatrix} = -7-(-9) = \underline{2}$

1. sl.

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1 \qquad \boxed{y = -1}.$$

JORDANOVA METODA

Ukažme si ještě jednu metodu, která se může hodit při hledání řešení soustavy rovnic, ale také v příští lekci při hledání tzv. inverzní matice. Předpokládejme, že jsme začali soustavu řešit Gaussovou eliminační metodou a pomocí elementárních úprav jsme rozšířenou matici soustavy převedli na tvar stupňovitý, např.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \boxed{4}\ \boxed{8} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \boxed{-1} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right], \text{ tj. } \iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

VEKTOR ŘEŠENÍ

Pokračujeme v úpravách tak, abychom vlevo dostali JEDNOTKOVOU MATICI

Ve skriptu je ukázáno, jak je možno Jordanovu metodu modifikovat i pro případ, že $h < n$ a řešení závisí na $p = n-h$ parametrech. Ukažme princip na „krátké" soustavě

$$x + y - 3u + 2v = 1,$$
$$y - 2u - v = -1;$$

Věta Frobeniova: $n = 4$, $h = 2$; parametry: $p = 4-2 = 2$ BUDOU DVA

za parametry zvolme přímo u, v (tedy ty neznámé, kterými NEZAČÍNÁ žádná rovnice ve „stupňovitě" upravené soustavě); v rovnicích nejprve převedeme na pravou stranu členy s u a s v:

$$x + y = 1 + 3u - 2v,$$
$$y = -1 + 2u + v;$$

můžeme pracovat přímo s rovnicemi,

nebo s maticemi:

$$\begin{array}{cc|ccc} x & y & b & u & v \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

opíšeme

potřebuji matici jednotkovou! (Jordanova metoda)

„E_2"

, matici odpovídá upravená a VYŘEŠENÁ soustava:

$$x = u - 3v + 2,$$
$$y = 2u + v - 1,$$ kde $u, v \in \mathbb{R}$,

množina řešení jsou tedy nekonečný tvaru:

$$\{(u - 3v + 2,\ 2u + v - 1,\ u,\ v);\ u, v \in \mathbb{R}\}.$$