CÍL: PRŮBĚH FUNKCE

Toho, co jsme se naučili z diferenciálního počtu (LIMITOVÁNÍ, DERIVOVÁNÍ) užijeme k vyšetřování průběhu funkce a sestrojení grafu funkce. Bude nás zajímat:

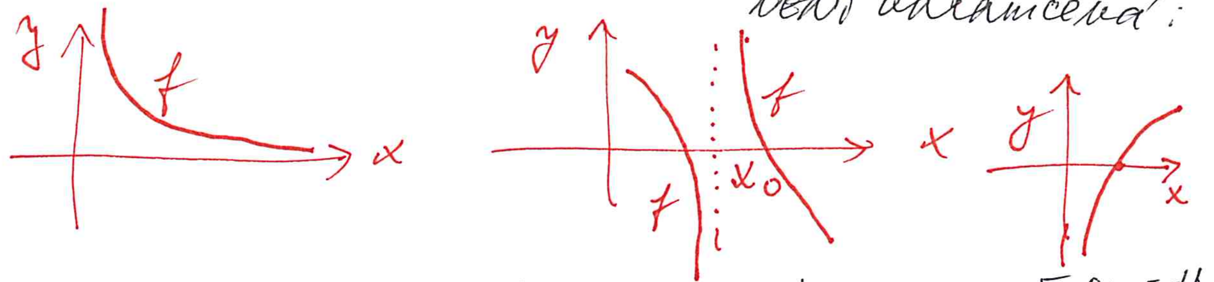
- definiční obor $D(f)$ funkce f, (sudá / lichá / periodická / nic z toho), průsečíky grafu fce s osami x, y, znaménko fce f funkce
- najdeme 1. derivaci f', $D(f')$, zn $f'(x)$, intervaly MONOTONIE (tj. kde rostoucí / klesající), lokální extrémy a FUNKČNÍ HODNOTY v extremálních bodech (f)
- najdeme 2. derivaci f'', $D(f'')$, zn $f''(x)$, intervaly KONVEXNOSTI / KONKÁVNOSTI, INFLEXNÍ BODY a funkční hodnoty v inflexních bodech
- Když je definiční obor $D(f)$ složen ze otevřených intervalů, pak v KRAJNÍCH BODECH intervalů (a v $\pm\infty$) určíme JEDNOSTRANNÉ LIMITY, najdeme ASYMPTOTY grafu fce.
- načrtneme graf fce (přibližně).

K průběhu funkce. ASYMPTOTY.

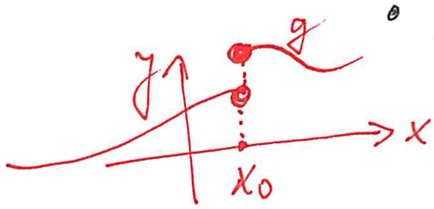
Naším cílem je naučit se
- vyjádřit průběh funkce
- nakreslit (aspoň zhruba) graf funkce,

k tomu bude užitečné umět:

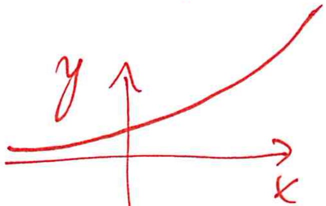
- NAJÍT "PROBLÉMOVÉ" BODY a zjistit co nejvíce o chování dané funkce v prstencovém okolí takového bodu – např. takovými jsou body, ve kterých
  - funkce NENÍ definovaná, ale je definovaná alespoň v levém / pravém prstencovém okolí a na okolí NENÍ ohraničená:



  - je definovaná, ale není spojitá:



  - nevlastní body $-\infty, \infty$; jak se v nich funkce chová!



Budeme hledat, jestli existují nějaké přímky, ke kterým se graf dané funkce "neomezeně blíží", tzv. asymptoty grafu funkce. Budeme rozlišovat:

asymptoty svislé = "bez směrnice"	šikmé asymptoty "se směrnicí"	popř. VODOROVNÉ AS
o rovnici $x = a$ $(x = x_0)$	o rovnici $y = ax+b$ $(y = kx+q)$	$y = b$ (tedy $a=0$), spec. případ šikmé as.

SVISLÉ ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE

DEF. Přímku o rovnici $x=a$ („SVISLOU"), kde $a \in \mathbb{R}$, nazveme SVISLOU ASYMPTOTOU grafu funkce f v bodě a (v bodě grafu $[a, f(a)]$), jestliže existuje aspoň jedna ze limit

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

a tato limita je NEVLASTNÍ, tedy ∞ nebo $-\infty$.

Př. Zjistěte, zda funkce $f: \ y = \dfrac{x}{2-x}$ má svislou asymptotu.

Řešení: $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, tedy bod $2 \notin D(f)$, nepatří do def. oboru ($a=2$). Zkusíme určit limity

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty \, ;$$ v $P^+(2)$ fce není ohraničená

[pro $x \in P^+(2)$, $x > 2$, tedy $2 - x < 0$, $\dfrac{x}{2-x} \to \dfrac{2}{0^-}$ pro $x \to 2^+$]

TO BY VLASTNĚ STAČILO, abychom už mohli tvrdit, že

PŘÍMKA O ROVNICI $\boxed{x=2}$ je svislou asymptotou naší funkce $\dfrac{x}{2-x}$. Pro „pořádek" spočítejme i druhou limitu, abychom viděli, co se děje v levém prstencovém okolí bodu 2:

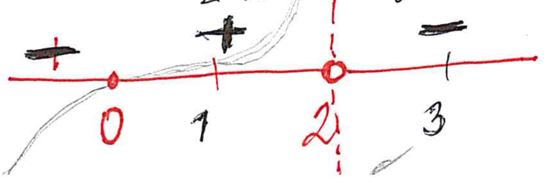
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{2-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = \infty \, ;$$

Př. ověřeno: $\boxed{x=2}$ je svislá as.

[pro $x \in P^-(2)$, $x < 2$, $2 - x > 0$, $\dfrac{x}{2-x} \to \dfrac{2}{0^+}$ pro $x \to 2^-$]

$f(1) = \dfrac{1}{2-1} = 1 > 0$ | zn f:

$x=0$ kořen LICHÉ NÁSOBNOSTI čit.



$x=2$: kořen LICHÉ násob. jm.

VODOROVNÉ ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE

DEF. Přímku o rovnici $\boxed{y=b}$ (směrnice $a=0$), $b\in\mathbb{R}$, nazveme vodorovnou asymptotou grafu funkce v NEVLASTNÍM BODĚ $\boxed{\infty}$ / $-\infty$, jestliže existuje limita

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} f(x)=b}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=b.}$$

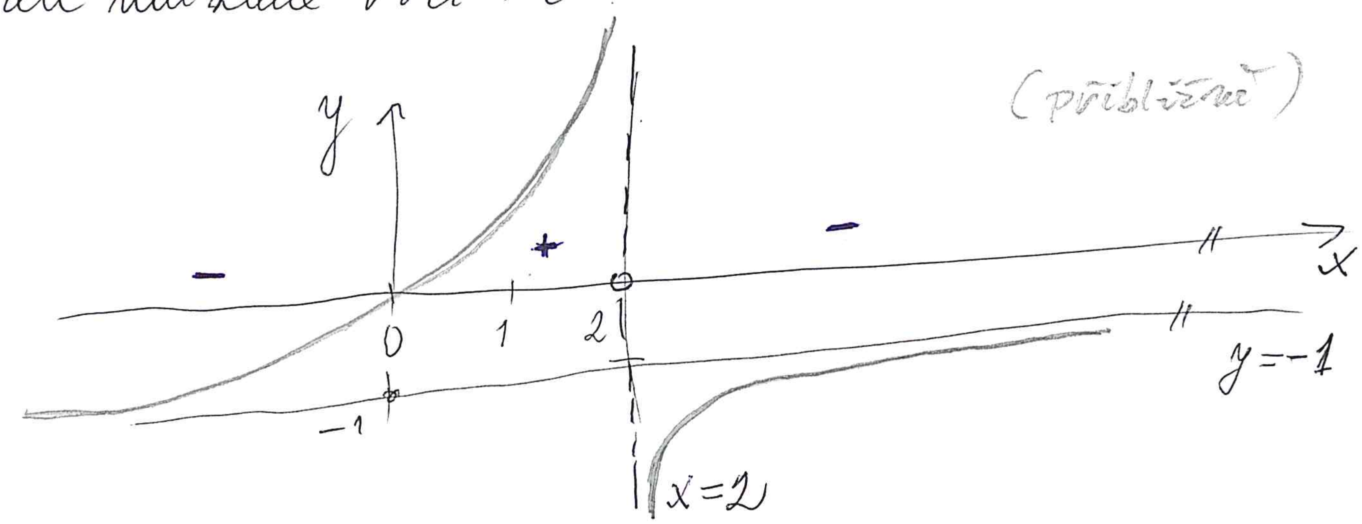
Př. Uvažme opět funkci $f(x)=\dfrac{x}{2-x}$.

Počítáme $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2-x}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\frac{x}{x}}_{=1}\cdot\frac{\overset{\to 1}{1}}{\left(\underbrace{\tfrac{2}{x}}_{\to 0}\underbrace{-1}_{\to -1}\right)}=\frac{1}{-1}=\boxed{-1}=b$

Dostali jsme výsledek: Přímka $y=-1$ je vodorovnou asymptotou funkce $\dfrac{x}{2-x}$.

Uvažme ještě určit $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{2-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{x}-1\right)}=\frac{1}{-1}=\boxed{-1}.$

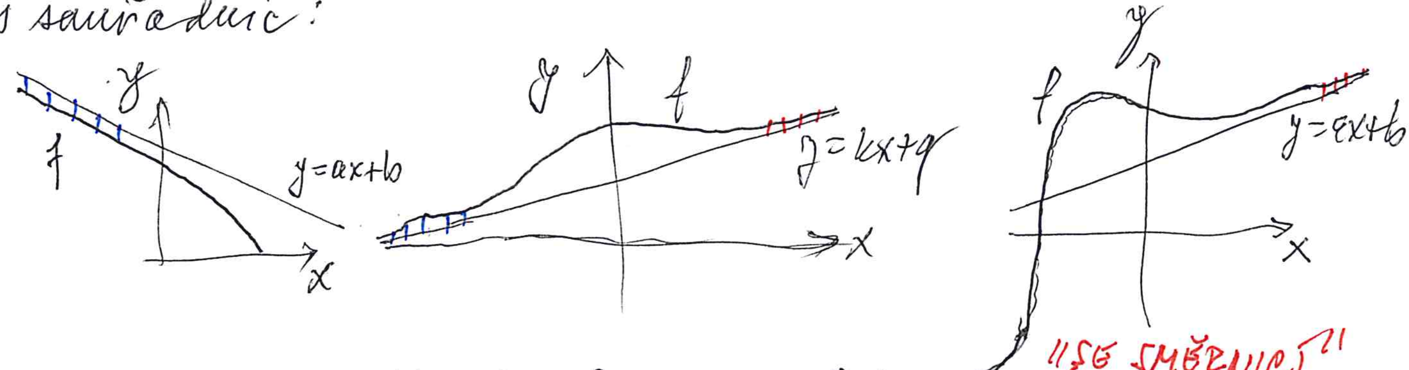
Výsledek je stejný, o průběhu funkce a jejím grafu ale víme více.



ŠIKMÉ ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE

budeme opět zjišťovat pro body $\begin{smallmatrix}\infty\\ -\infty\end{smallmatrix}$:

graf funkce může mít i více druhů asymptot současně, někdy má asymptotu, která NENÍ ROVNOBĚŽNÁ s žádnou z os souřadnic:



Def. Řekneme, že přímka o rovnici $y = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$ "JE SMĚRNICÍ"
(nebo také i lineární funkce $g: y = ax + b$) předp. $\boxed{a \neq 0}$

je šikmou asymptotou grafu funkce f v b. $\begin{smallmatrix}\infty\\ -\infty\end{smallmatrix}$, jestliže pro $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ se "$f(x)$ blíží k $ax+b$", tedy

korektně: existuje $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to-\infty)}} (f(x) - (ax+b)) = 0$. "a je nulová"

Potřebujeme efektivní způsob, jak lineární funkci najít, tedy jak spočítat a, b, pokud existuje. Vyberme si např. případ $x \to \infty$. Má-li platit

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0,$$

přidáme si naoko správný vztah

$\lim\limits_{x\to\infty} (x^{-1}) = 0$ (TRIK) a zkoumáme limitu součinu funkcí $(f(x) - (ax+b))$ a x^{-1}. Podle pravidel-

– O limitě součinu funkcí – vychází!:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left(f(x)-(ax+b)\right)\cdot x^{-1}\right) \underset{\text{úprava}}{=} \lim_{x\to\infty}\left(x^{-1}\cdot f(x) - a - x^{-1}b\right) =$$

LIMITA SOUČTU, ROZDÍLU

$$= \lim_{x\to\infty}\left(x^{-1}\cdot f(x)\right) - a - \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(x^{-1}b\right)}_{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{b}{x}=0} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} - a - 0.$$

rovnost můžu zapsat, pokud tato limita EXISTUJE.

Odtud spočítáme:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

(pokud existuje tato limita)

Znovu se vraťme ke vztahu ⊙: můžeme ho psát jako

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right) - \underbrace{\lim_{x\to\infty} b}_{\text{to je ale } b} = 0,$$

převedeme b na pravou stranu a máme:

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - \boxed{a}\,x\right)$$

sem dosadíme za a, pokud se dá najít

Odpověď: (pokud potřebné limity existují):

$y = ax + b$ je hledaná šikmá asymptota grafu fce f.

(Vysvětlení opačné implikace je zmíněno ve skriptech.)

Př. Připomeňte si, jaké asymptoty pozorujeme u grafu funkce $y = \operatorname{tg} x$. Načrtněte si obrázek a popište. Aspoň jednu z nich zkusíme spočítat. Např. je

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = (-1)\cdot\left[\frac{1}{0+}\right] = (-1)\cdot\infty = -\infty$$

‖ Funkce $\sin x$ je spojitá, v bodě $x_0 = -\frac{\pi}{2}$, „limita je rovna funkční hodnotě": $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 = \lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \sin x$; podobně $\cos x$ je spojitá fce, $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} \cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ‖

na $P^+\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x > 0$.

Př. Připomeňte si, jaké asymptoty pozorujeme u grafu funkce $y = \operatorname{arctg} x$. Ověřte výpočtem.

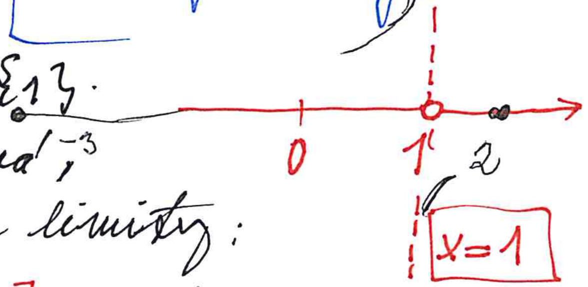
Př. Zjistěte, zda existují svislé asymptoty pro racionální funkci

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{D<0}}.$$

SAMI: určete znaménko funkce f.

Napřed určíme DEF. OBOR: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

V bodech, kde funkce není definovaná, by mohla být asymptota. Počítáme limity:



$$\lim_{x\to 1^-} \frac{(x+3)(x-2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \left[\frac{4\cdot(-1)}{0^-\cdot 3}\right] = \frac{-4}{3}\cdot(-\infty) = \infty,$$

0^-, v $P^-(1)$ je $x-1<0$

proto přímka o rovnici $x = 1$ je svislou asymptotou grafu funkce f

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{4\cdot(-1)}{3}\cdot\left[\frac{1}{0^+}\right] = -\frac{4}{3}\cdot\infty = -\infty$$

Př. Je dána funkce $f: y = \frac{e^x}{x}$. Určete všechny její asymptoty.

Určeme def. obor $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ověřme, jestli v bodě 0 ($x_0 = 0$) je svislá asymptota funkce f:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0-}\right] = -\infty, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \left[\frac{1}{0+}\right] = \infty; \text{ ano,}$$

přímka (svislá) o rovnici $x = 0$ je SVISLÁ ASYMPTOTA.
= „bez směrnice"

Zkusme zjistit, jestli existují „šikmé" asymptoty („se směrnicí"), v bodech $-\infty, \infty$.

Počítejme a, b pro $-\infty$, pokud se dají najít:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{LP}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{LP}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{0}{2} = \underline{0} = a,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \Big(\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{f(x)} - 0 \cdot x\Big) \overset{LP}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1} = 0 = b,$$ takže asymptotou „se směrnicí" je přímka $\boxed{y = 0}$.

vodorovná př.
– osa x

Počítejme a, b pro ∞, pokud se dají najít:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x} \overset{LP}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\infty}{2} = \infty,$$

tedy nemohu určit žádné $a \in \mathbb{R}$ jako směrnici hledané přímky, situace je JINÁ!

V ∞ nemá naše funkce $f = \frac{e^x}{x}$ šikmou asymptotu
= se směrnicí

D.cv. Úlohy ve skriptu.