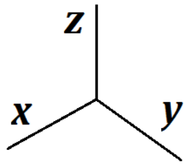
Následující obrázky jsou kresleny v kolmé axonometrii
a souřadné osy (pokud nejsou zakresleny) jsou voleny takto:




# 1. Vypočítejte trojný integrál

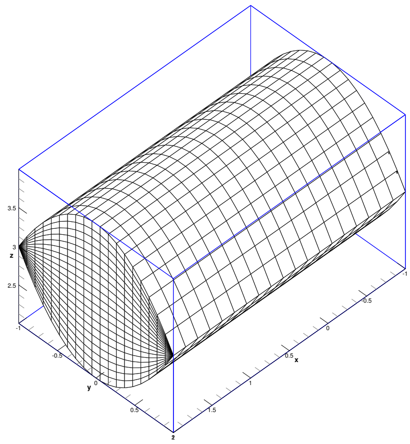
$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,, \qquad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:} \qquad \begin{array}{l} x \ge -1 \\ x \le 2 \\ z \ge 2 + y^2 \\ z \le 4 - y^2 \end{array}$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

## Určíme mezní plochy

| | |
|---|---|
| $x = -1$ | rovina |
| $x = 2$ | rovina |
| $z = 2 + y^2$ | parabolická válcová plocha |
| $z = 4 - y^2$ | parabolická válcová plocha |

tedy



## Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze proměnných $x$ a $z$ jsou zadány a proměnnou $y$ určíme z půdorysu tělesa. Z obrázku je zřejmé, že půdorysem bude obdélník, jehož strany rovnoběžné s osou $x$ tvoří průsečnice obou parabolických válcových ploch. Tedy $\quad y^2 + 2 = 4 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm 1$ .

A když to shrneme
$$\begin{array}{c} -1 \le x \le 2 \\ -1 \le y \le 1 \\ 2 + y^2 \le z \le 4 - y^2 \end{array}$$
na pořadí $x$ a $y$ při sestavování integrálu nezáleží.

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{2} \left[ \int_{-1}^{1} \left( \int_{2+y^2}^{4-y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{-1}^{1} \Big[ z \Big]_{2+y^2}^{4-y^2} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $z \in \langle 2 + y^2\,;\ 4 - y^2 \rangle$ , proto

$$= \int_{-1}^{2} \left\{ \int_{-1}^{1} \left[ (4 - y^2) - (2 + y^2) \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left[ \int_{-1}^{1} (2 - 2y^2)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} 2 \left[ y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^{1} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $y \in \langle -1\,;\ 1 \rangle$ , proto

$$= \int_{-1}^{2} 2 \left\{ \left[ 1 - \frac{1^3}{3} \right] - \left[ (-1) - \frac{(-1)^3}{3} \right] \right\} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left( \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) \mathrm{d}x = \frac{8}{3} \int_{-1}^{2} \mathrm{d}x = \frac{8}{3} \Big[ x \Big]_{-1}^{2} =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $x \in \langle -1\,;\ 2 \rangle$ , proto $\quad = \dfrac{8}{3} \cdot [2 - (-1)] = \underline{\underline{8}}$

# 2. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,$$

kde pro souřadnice bodů oblasti $\Omega$ platí:

$$x \geq 0$$
$$y \leq 1$$
$$z \geq 0$$
$$y \geq x^2 (\geq 0)$$
$$z \leq x^2 + y^2$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

**Mezní plochy** jsou tři roviny ($x = 0$ ; $y = 1$ ; $z = 0$), parabolická válcová plocha ($y = x^2$) a rotační parabolická plocha ($z = x^2 + y^2$)

## Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$0 \leq x \leq \sqrt{y}$$
$$0 \leq y \leq 1$$
$$0 \leq z \leq x^2 + y^2$$

Ale to by se potom v integrálu vyskytovala odmocnina a to je většinou nevhodné.

Proto budeme raději volit

$$0 \leq x \leq 1$$
$$x^2 \leq y \leq 1$$
$$0 \leq z \leq x^2 + y^2$$

$$\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^1 \left( \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 \left[z\right]_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0\,;\, x^2 + y^2 \rangle$, proto

$$= \int_0^1 \left\{ \int_{x^2}^1 \left[ (x^2 + y^2) - (0) \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left[ x^2 \int_{x^2}^1 \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x + \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^1 y^2\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 \left[y\right]_{x^2}^1 \mathrm{d}x + \int_0^1 \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^1 \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle x^2\,;\, 1 \rangle$, proto

$$= \int_0^1 \left\{ x^2 \left[ (1) - (x^2) \right] + \frac{1}{3} \left[ (1^3) - (x^2)^3 \right] \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\, \mathrm{d}x - \int_0^1 x^4\, \mathrm{d}x + \frac{1}{3} \int_0^1 \mathrm{d}x - \frac{1}{3} \int_0^1 x^6\, \mathrm{d}x =$$

$$= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 + \frac{1}{3} \left[x\right]_0^1 - \frac{1}{3} \left[ \frac{x^7}{7} \right]_0^1 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0\,;\, 1 \rangle$, proto

$$= \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) - \left( \frac{1}{5} - 0 \right) + \frac{1}{3} (1 - 0) - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{7} - 0 \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{35 - 21 + 35 - 5}{105} = \underline{\underline{\frac{44}{105}}}$$

# 3. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti $\Omega$ platí:

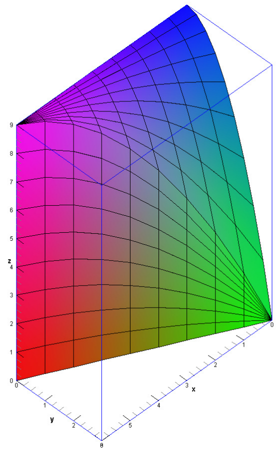
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$z \geq 0$$
$$x + 2y \leq 6$$
$$z \leq 9 - y^2$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

## Mezní plochy

| | |
|---|---|
| $x = 0$ | rovina |
| $y = 0$ | rovina |
| $z = 0$ | rovina |
| $x + 2y = 6$ | rovina |
| $z = 9 - y^2$ | parabolická válcová plocha |

tedy



## Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$0 \leq x \leq 6 - 2y$$
$$0 \leq y \leq 3$$
$$0 \leq z \leq 9 - y^2$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \left[ \int_0^{6-2y} \left( \int_0^{9-y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_0^3 \left\{ \int_0^{6-2y} \big[z\big]_0^{9-y^2} \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $z \in \langle 0\,;\,9 - y^2 \rangle$ , proto

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^{6-2y} \big[(9 - y^2) - (0)\big]\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \int_0^3 \left[ \int_0^{6-2y} (9 - y^2)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_0^3 \big[9x - xy^2\big]_0^{6-2y} \mathrm{d}y =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $x \in \langle 0\,;\,6 - 2y \rangle$ , proto

$$= \int_0^3 \Big\{\big[9(6 - 2y) - (6 - 2y)y^2\big] - [0]\Big\}\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \left(2y^3 - 6y^2 - 18y + 54\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \left[2 \cdot \frac{y^4}{4} - 6 \cdot \frac{y^3}{3} - 18 \cdot \frac{y^2}{2} + 54 \cdot y\right]_0^3 = \left[\frac{y^4}{2} - 2y^3 - 9y^2 + 54y\right]_0^3 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$ , tedy i pro $y \in \langle 0\,;\,3 \rangle$ , proto

$$= \left(\frac{3^4}{2} - 2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 54 \cdot 3\right) - (0) = \frac{81 - 108 - 162 + 324}{2} = \underline{\underline{\frac{135}{2}}}$$

# 4. Vypočítejte trojný integrál

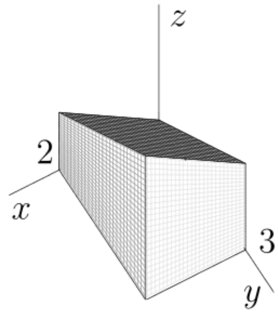
$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti $\Omega$ platí:

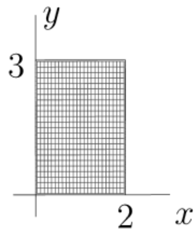
$x \geq 0$
$x \leq 2$
$y \geq 0$
$y \leq 3$
$z \geq 0$
$z \leq x + y$

/$x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}$/

**Mezní plochy** jsou roviny

tedy




## Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$0 \leq x \leq 2$
$0 \leq y \leq 3$
$0 \leq z \leq x + y$

$$\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \left[ \int_0^2 \left( \int_0^{x+y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int_0^3 \left\{ \int_0^2 (x^2 + y^2) \left[ z \right]_0^{x+y} \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0\,;\ x + y \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \left\{ \int_0^2 (x^2 + y^2)\,[(x + y) - (0)]\,\mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \int_0^3 \left[ \int_0^2 (x^3 + x^2 y + x y^2 + y^3)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^3 \left[ \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} y + \frac{x^2}{2} y^2 + x y^3 \right]_0^2 \mathrm{d}y =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0\,;\ 2 \rangle$, proto

$$= \int_0^3 \left[ \left( \frac{2^4}{4} + \frac{2^3}{3} y + \frac{2^2}{2} y^2 + 2 y^3 \right) - 0 \right] \mathrm{d}y = \int_0^3 \left( 4 + \frac{8}{3} y + 2 y^2 + 2 y^3 \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \left[ 4y + \frac{8}{3} \cdot \frac{y^2}{2} + 2 \frac{y^3}{3} + 2 \frac{y^4}{4} \right]_0^3 = \left[ 4y + \frac{4}{3} y^2 + \frac{2}{3} y^3 + \frac{1}{2} y^4 \right]_0^3 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0\,;\ 3 \rangle$, proto

$$= \left( 4 \cdot 3 + \frac{4}{3} \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot 3^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^4 \right) - (0) = \frac{24 + 24 + 36 + 81}{2} = \underline{\underline{\frac{165}{2}}}$$

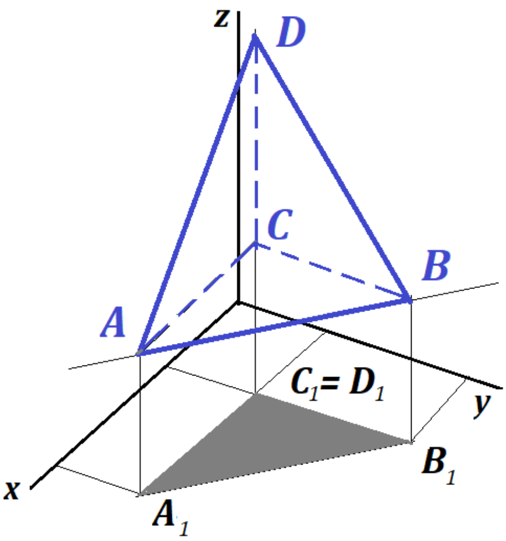
## 5. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \ , \qquad \text{kde pro souřadnice bodů oblasti } \Omega \text{ platí:} \qquad \begin{aligned} x &\geq 1 \\ y &\geq 2 \\ z &\geq 3 \\ 4x + 3y + 2z &\leq 28 \end{aligned}$$

/$x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$; $z \in \mathbb{R}$/

**Mezní plochy** jsou čtyři roviny,
které vymezují čtyřstěn (trojboký jehlan) $ABCD$ ,
přičemž souřadnice jednotlivých bodů získáme vždy jako průsečíky tří rovin.

Například bod $A$ je průsečíkem rovin
$y = 2 \cap z = 3 \cap 4x + 3y + 2z = 28$




Souřadnice vrcholů: $A = [4\,;\,2\,;\,3]$
$B = [1\,;\,6\,;\,3]$
$C = [1\,;\,2\,;\,3]$
$D = [1\,;\,2\,;\,9]$

### Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Symbolicky: $x$–ová souřadnice $C_1 \leq x \leq x$–ová souřadnice $A_1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $1 \leq x \leq 4$

úsečka $A_1C_1 \leq y \leq$ úsečka $A_1B_1$ $(z = 3)$ $\qquad 2 \leq y \leq \frac{1}{3}(22 - 4x)$

$\Delta ABC \leq z \leq \Delta ABD$ $\qquad 3 \leq z \leq \frac{1}{2}(28 - 4x - 3y)$

$$\iiint\limits_{\Omega} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_1^4 \left\{ \int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} \left[ \int_3^{14-2x-\frac{3y}{2}} x \,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_1^4 \left\{ \int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} x \Big[z\Big]_3^{14-2x-\frac{3y}{2}} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 3\,;\, 14 - 2x - \frac{3y}{2} \rangle$, proto

$$= \int_1^4 \left\{ \int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} x \left[ \left(14 - 2x - \frac{3y}{2}\right) - (3) \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_1^4 \left[ \int_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} \left(11x - 2x^2 - \frac{3x}{2} y\right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^4 \left\{ 11x \Big[y\Big]_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} - 2x^2 \Big[y\Big]_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} - \frac{3x}{2} \left[\frac{y^2}{2}\right]_2^{\frac{1}{3}(22-4x)} \right\} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 2\,;\, \frac{1}{3}(22 - 4x) \rangle$, proto

$$= \int_1^4 \left\{ 11x \left[ \frac{1}{3}(22 - 4x) - 2 \right] - 2x^2 \left[ \frac{1}{3}(22 - 4x) - 2 \right] - \frac{3x}{4} \left[ \left( \frac{22 - 4x}{3} \right)^2 - 2^2 \right] \right\} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^4 \left[\frac{242x}{3} - \frac{44x^2}{3} - 22x - \frac{44x^2}{3} + \frac{8x^3}{3} + 4x^2 - \frac{x}{12}\cdot(484 - 176x + 16x^2) + 3x\right] \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{8-4}{3}\cdot x^3 + \frac{-44-44+12+44}{3}\cdot x^2 + \frac{242-66-121+9}{3}\cdot x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{4}{3}\cdot x^3 - \frac{32}{3}\cdot x^2 + \frac{64}{3}\cdot x\right) \mathrm{d}x = \frac{4}{3}\cdot\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^4 - \frac{32}{3}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 + \frac{64}{3}\cdot\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 1\,;\,4\rangle$, proto

$$= \frac{1}{3}\cdot(256-1) - \frac{32}{9}\cdot(64-1) + \frac{32}{3}\cdot(16-1) = \frac{255 - 32\cdot 21 + 32\cdot 15}{3} = \underline{\underline{21}}$$

# 6. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ ,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti $\Omega$ platí:

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$z \geq 0$$
$$x + 2y + 3z \leq 6$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

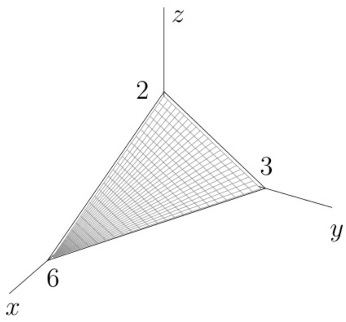
## Mezní plochy

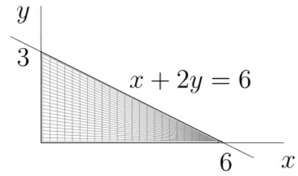
$x = 0$ rovina

$y = 0$ rovina

$z = 0$ rovina

$x + 2y + 3z = 6$ rovina tedy




## Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$0 \leq x \leq 6 - 2y$$
$$0 \leq y \leq 3$$
$$0 \leq z \leq 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int\limits_0^3 \left[ \int\limits_0^{6-2y} \left( \int\limits_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \left\{ \int\limits_0^{6-2y} \left[ z \right]_0^{2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y} \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0\,;\, 2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y \rangle$, proto

$$= \int\limits_0^3 \left\{ \int\limits_0^{6-2y} \left[ \left(2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right) - (0) \right] \mathrm{d}x \right\} \mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \left[ \int\limits_0^{6-2y} \frac{6 - x - 2y}{3}\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y = \int\limits_0^3 \left[ \frac{6x - \frac{1}{2}x^2 - 2xy}{3} \right]_0^{6-2y} \mathrm{d}y =$$

primitivní funkce je spojitá pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0\,;\, 6 - 2y \rangle$, proto

$$= \int\limits_0^3 \frac{\left[ 6 \cdot (6 - 2y) - \frac{1}{2} \cdot (6 - 2y)^2 - 2 \cdot (6 - 2y) \cdot y \right] - [0]}{3}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{3} \int\limits_0^3 \left( 2y^2 - 12y + 18 \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{3} \left[ 2 \cdot \frac{y^3}{3} - 12 \cdot \frac{y^2}{2} + 18 \cdot y \right]_0^3 =$$

primitivní funkce je spojitá pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0\,;\, 3 \rangle$, proto

$$= \frac{1}{3} \left[ \left( 2 \cdot \frac{3^3}{3} - 12 \cdot \frac{3^2}{2} + 18 \cdot 3 \right) - (0) \right] = \frac{18 - 54 + 54}{3} = \underline{\underline{6}}$$

# 7. Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \,,$$ kde pro souřadnice bodů oblasti $\Omega$ platí:

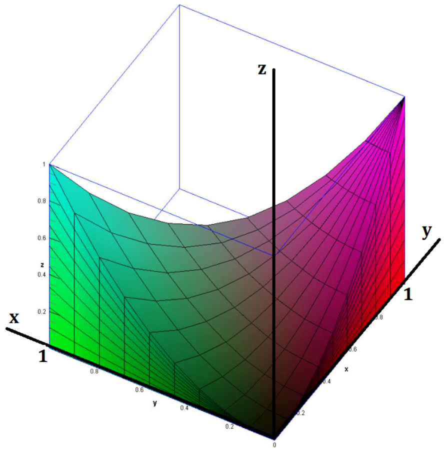
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$z \geq 0$$
$$x + y \leq 1$$
$$z \leq x^2 + y^2$$

$/x \in \mathbb{R};\ y \in \mathbb{R};\ z \in \mathbb{R}/$

## Mezní plochy

| | |
|---|---|
| $x = 0$ | rovina |
| $y = 0$ | rovina |
| $z = 0$ | rovina |
| $x + y = 1$ | rovina |
| $z = x^2 + y^2$ | rotační paraboloid |

tedy




## Stanovíme meze pro jednotlivé proměnné

Meze všech proměnných jsou vlastně zadány. A když to shrneme

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq 1 - x$$
$$0 \leq z \leq x^2 + y^2$$

$$\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} \left( \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \Big[ z \Big]_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce je spojitá pro $z \in \mathbb{R}$, tedy i pro $z \in \langle 0\,;\ x^2 + y^2 \rangle$, proto

$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[ (x^2 + y^2) - (0) \right] \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{ x^2 \Big[ y \Big]_0^{1-x} + \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} \right\} \mathrm{d}x =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $y \in \mathbb{R}$, tedy i pro $y \in \langle 0\,;\ 1 - x \rangle$, proto

$$= \int_0^1 \left\{ x^2 \left[ (1 - x) - (0) \right] + \frac{1}{3} \left[ (1 - x)^3 - (0) \right] \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left( x^2 - x^3 + \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3}{3} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left( -\frac{4}{3}x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3} \right) \mathrm{d}x = -\frac{4}{3}\left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^1 + 2\left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \frac{1}{3}\Big[ x \Big]_0^1 =$$

primitivní funkce jsou spojité pro $x \in \mathbb{R}$, tedy i pro $x \in \langle 0\,;\ 1 \rangle$, proto

$$= -\frac{4}{3}\left[ \left( \frac{1}{4} \right) - (0) \right] + 2\left[ \left( \frac{1}{3} \right) - (0) \right] - \left[ \left( \frac{1}{2} \right) - (0) \right] + \frac{1}{3}\left[ (1) - (0) \right] = \frac{-2 + 4 - 3 + 2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$