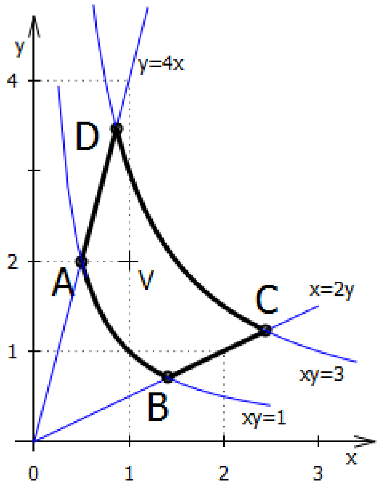
Určete hmotnost části roviny Ω , jestliže:



- souřadnice bodů tvořících Ω vyhovují nerovnicím $x \cdot y \geq 1$; $x \cdot y \leq 3$; $x \leq 2y$; $y \leq 4x$; $x \geq 0$
- měrná hustota (hmotnosti) materiálu je dána $\varrho = 2 \cdot \dfrac{y}{x}$.

Načrtneme si hranice oblasti Ω (tučné černé křivky) a pro některý bod (například V=[1;2]) ověříme, zda do dané oblasti patří. V našem případě vidíme že ano, takže daný bod je vnitřním bodem zadané oblasti (všechny vnitřní body oblasti Ω budeme označovat $\operatorname{int}\Omega$).

Víme, že hmotnost vypočítáme podle vzorce:

$$m = \iint\limits_{\Omega} \varrho(x; y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

a dále víme, že: $D(\varrho) = \{[x\,; y] : x \neq 0, y \in (-\infty\,; \infty)\}$.

Proto je funkce ϱ na uzávěru $\overline{\Omega}$ oblasti (oblast včetně hranic) Ω definovaná, spojitá i ohraničená. Tedy nikde na oblasti Ω ani nikde na její hranici „neutíká do nekonečna“. A protože lze uzavřenou oblast Ω rozdělit na trojici (viz dále) elementárních oblastí I. nebo II. druhu v rovině, je podle **Věty 1.4.** [1] integrovatelná.

Nyní zbývá převést tento dvojný integrál na dvojnásobný.

1. varianta – elementární oblasti v rovině

Rovnoběžky s osou y

V bodě **D** spustíme a v bodě **B** vztyčíme kolmici na osu ***x***. Tyto kolmice nám oblast ⍰ rozdělí na tři elementární oblasti prvního druhu. Pro každou z těchto oblastí určíme meze a dvojný integrál poté vypočteme jako součet tří dvojnásobných integrálů.

Rovnoběžky s osou x

V bodě **A** vztyčíme a v bodě **C** spustíme kolmici na osu ***y***. Tyto kolmice nám oblast ⍰ rozdělí na tři elementární oblasti druhého druhu. Pro každou z těchto oblastí určíme meze a dvojný integrál opět vypočteme jako součet tří dvojnásobných integrálů.

[1] Strana 10 ve skriptech: DANĚČEK, J., DLOUHÝ, O., PŘIBYL, O.: *MATEMATIKA II – Dvojný a trojný integrál*. Akademické nakladatelství CERM, s. r. o. Brno, květen 2006,
ISBN 80–7204–453–2.

2. varianta – transformace oblasti Ω

Přepíšeme si rovnice každé ze čtyř hranic do vhodnějšího tvaru, kde $u_d\,;u_H\,;v_d\,;v_H$ jsou patřičné konstanty zapsané obecně:

hyperbola **AB**: $x\cdot y=1 \;\Longrightarrow\; 1=x\cdot y \;\Longrightarrow\; u_d=x\cdot y$

hyperbola **CD**: $x\cdot y=3 \;\Longrightarrow\; 3=x\cdot y \;\Longrightarrow\; u_H=x\cdot y$

přímka **BC**: $x=2y \;\Longrightarrow\; \dfrac{1}{2}=\dfrac{y}{x} \;\Longrightarrow\; v_d=\dfrac{y}{x}$

přímka **AD**: $y=4x \;\Longrightarrow\; \dfrac{y}{x}=4 \;\Longrightarrow\; v_H=\dfrac{y}{x}$

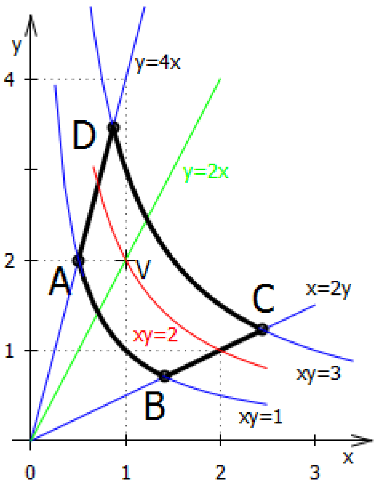
Vidíme, že

hyperbolu můžeme zapsat ve tvaru $u=x\cdot y$

a přímku ve tvaru $v=\dfrac{y}{x}$

Přitom pro parametr ***u*** každé takové hyperboly protínající zadanou oblast Ω (ve vedlejším obrázku je jedna z nich nakreslena červeně) platí: $u_d\le u\le u_H$

Podobně pro parametr ***v*** každé takové přímky protínající oblast Ω (ve vedlejším obrázku je jedna z nich nakreslena zeleně) platí: $v_d\le v\le v_H$



Tím jsme vlastně ***tranformovali*** staré proměnné $x\,;y$ na nové ***proměnné*** $u\,;v$ a zároveň jsme určili i ***nové meze*** pro tyto proměnné: $u\in\langle 1\,;\,3\rangle\,;v\in\langle \frac{1}{2}\,;\,4\rangle$

Tedy transformace ***T*** určená funkcemi $u(x\,;y)=x\cdot y$ a $v(x\,;y)=\frac{y}{x}$ převede každý bod o souřadnicích $[x\,;\,y]$ ze souřadné roviny "$x\,y$" na jeho obraz v souřadné rovině "$u\,v$" o souřadnicích $\left[x\cdot y\,;\,\dfrac{y}{x}\right]$. ***Obrazy*** bodů budeme označovat apostrofem. Potom (viz následující obrázek):

$V=[1\,;\,2]\xrightarrow{T}V'=[2\,;\,2]\;;\;A=[0{,}5\,;\,2]\xrightarrow{T}A'=[1\,;\,4]\;;\;[2\,;\,1]\xrightarrow{T}[2\,;\,0{,}5]$ atd.

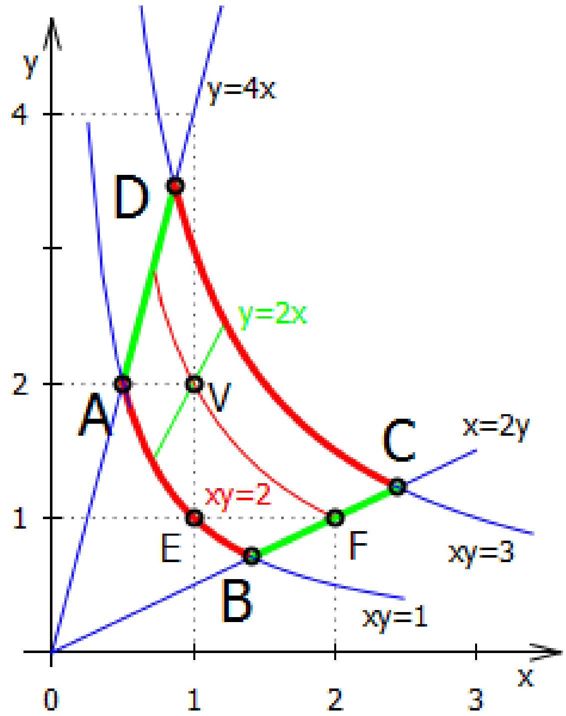
Nyní zbývá ještě ***transformovat diferenciály***, nebo-li určit *koeficient*, kolikrát se zvětší či zmenší obsah libovolně malého plošného elementu $\mathcal{A}_V$ (například malinkého čtverečku kolem bodu **V**) vzhledem k plošnému obsahu jejího obrazu $\mathcal{A}'_{V'}$.

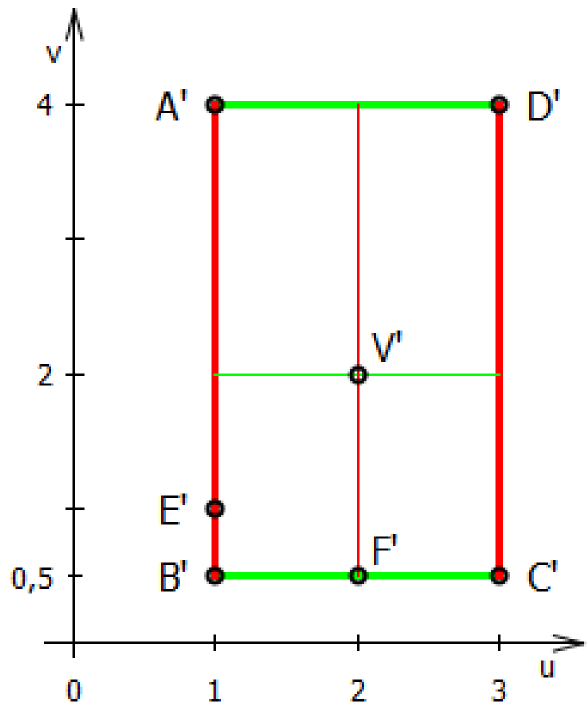
Věta 1.6. (ve zmíněných skriptech) uvádí, že tento koeficient je roven absolutní hodnotě ***jakobiánu*** a jakobián má tvar:

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

Musíme tedy původně uvažovanou soustavu dvou transformačních rovnic $\begin{aligned}u&=x\cdot y\\ v&=\dfrac{y}{x}\end{aligned}$

která je tvaru $\begin{aligned}u&=f(x\,;y)\\ v&=g(x\,;y)\end{aligned}$, převést na tvar $\begin{aligned}x&=\varphi(u\,;v)\\ y&=\psi(u\,;v)\end{aligned}$.





Proto z první i druhé rovnice vyjádříme y. Potom

$$\begin{aligned} \frac{u}{x} &= v \cdot x \\ u &= v \cdot x^2 \\ \frac{u}{v} &= x^2 \end{aligned}$$

a protože všechny body oblasti Ω mají $\boldsymbol{x}_{\text{ové}}$ souřadnice kladné (viz obrázek oblasti vlevo), dostáváme

$$\varphi(u\,;v) : x = \sqrt{\frac{u}{v}} = \sqrt{u \cdot v^{-1}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}}$$

a po dosazení do druhé rovnice

$$\psi(u\,;v) : y = v \cdot x = v \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} = u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}}$$

Nyní již může stanovit hodnotu *jakobiánu*

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2} \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{1}{2}} \cdot v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot v^{-1} - \left(-\frac{1}{4} \cdot v^{-1}\right) = \frac{1}{2v}$$

A pokud jsou splněny i další podmínky uvedené Věty 1.6.

- každý bod $[x\,;y]$ se pomocí uvažované transformace $\boldsymbol{T}$ zobrazí jednoznačně (existuje k němu jediný obraz) a ke každému obrazu $[u\,;v]$ existuje jediný vzor $\Longrightarrow$ ***zobrazení*** zprostředkované těmito transformačními rovnicemi ***je prosté***;

  /a to v našem případě platí/

- funkce $\varrho(x\,;y)$ je spojitá a ohraničená na oblasti Ω, která je sjednocením konečného počtu elementárních oblastí prvního nebo druhého druhu;

  /a to v našem případě platí – problém jsme diskutovali, když jsme zkoumali integrovatelnost zadání/

- funkce $\varphi(u\,;v)$, $\psi(u\,;v)$ a všechny jejich první parciální derivace jsou spojité na uzávěru $\overline{\Omega'}$ (což je obraz původně zadané oblasti Ω)

  /a to v našem případě platí – obě uvedené funkce a všechny jejich první parciální derivace jsou spojité mimo jiné pro $u \in (0\,;\infty)$ a $v \in (0\,;\infty)$, což naše Ω' splňuje/

- jakobián $J(u\,;v) \neq 0 \quad \forall [u\,;v] \in \Omega'$

  /a to v našem případě také platí/

potom podle uvedené věty platí:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x\,;y)\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega'=T(\Omega)} f(\varphi(u\,;v)\,;\psi(u\,;v)) \cdot |J(u\,;v)|\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

což v našem případě:

$$\iint\limits_{\Omega} 2\cdot\frac{y}{x}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{\Omega'} \left(2\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}\cdot v^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}\cdot v^{-\frac{1}{2}}}\right)\cdot\left|\frac{1}{2v}\right|\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int\limits_{1}^{3}\left\{\int\limits_{0,5}^{4} 2\,v\cdot\frac{1}{2v}\;\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u = \int\limits_{1}^{3}\Big[v\Big]_{0,5}^{4}\;\mathrm{d}u =$$

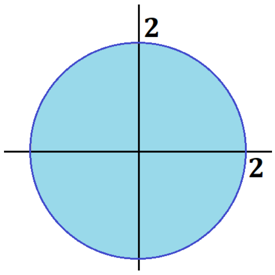
$$= \Big[(4-0{,}5)\cdot u\Big]_{1}^{3} = 3{,}5\cdot(3-1) = \underline{\underline{7}}$$

Hmotnost části roviny Ω je 7 váhových jednotek.

Transformace do polárních souřadnic

Vypočtěte $\iint\limits_{\mathcal{A}} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{A}$ platí:

$x^2 + y^2 \leq 4$



$[4 - x^2 - y^2 \geq 0]$ Zavedeme polární souřadnice:

$$x = \varrho \cos\varphi$$
$$y = \varrho \sin\varphi$$
$$|\,J\,| = \varrho$$
$$\varrho \in \langle 0; 2\rangle$$
$$\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$$

kde pro každý bod modré oblasti **nová proměnná** ϱ vyjadřuje jeho vzdálenost od počátku a **nová proměnná** φ je úhel, který svírá průvodič (spojnice bodu s počátkem) daného bodu s kladným směrem vodorovné osy.

$$\int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{4 - \varrho^2 \cos^2\varphi - \varrho^2 \sin^2\varphi}\,.\, \underbrace{\varrho}_{|\,J\,|}\, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \varrho \,.\, \sqrt{4 - \varrho^2 (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1})}\, \mathrm{d}\varphi \right] \mathrm{d}\varrho =$$

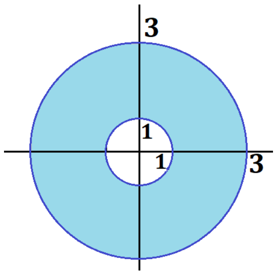
$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \varrho\sqrt{4 - \varrho^2}\, \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left(\varrho\sqrt{4 - \varrho^2}\,.\, \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \varrho\sqrt{4 - \varrho^2} \cdot [\varphi]_0^{2\pi}\, \mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \sqrt{4 - \varrho^2}\,.\, \underline{\varrho\, \mathrm{d}\varrho} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{4 - \varrho^2} = t \\ 4 - \varrho^2 = t^2 \\ -2\varrho\, \mathrm{d}\varrho = 2t\, \mathrm{d}t \\ \underline{\varrho\, \mathrm{d}\varrho} = -t\, \mathrm{d}t \\ \begin{array}{c|c} \varrho & t \\ \hline 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \end{array} \right| = 2\pi \int_2^0 t\,.\,(-t)\, \mathrm{d}t = -2\pi \left[\frac{t^3}{3} \right]_2^0 = -2\pi \left(0 - \frac{2^3}{3} \right) =$$

$$= \underline{\underline{\frac{16}{3}\pi}}$$

Vypočtěte $\iint\limits_{\mathcal{B}} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{B}$ platí:

$$1 \le x^2 + y^2 \le 9$$



$[[x; y] \in (-\infty; \infty) \times (-\infty; \infty)]$ Zavedeme polární souřadnice: $x = \varrho\cos\varphi$

$y = \varrho\sin\varphi$

$|J| = \varrho$

$\varrho \in \langle 1; 3\rangle$

$\varphi \in \langle 0; 2\pi\rangle$

$$\int_1^3 \left[\int_0^{2\pi} (\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi)\,.\,\underbrace{\varrho}_{|J|}\,\mathrm{d}\varphi \right] \mathrm{d}\varrho = \int_1^3 \left[\int_0^{2\pi} \varrho(\cos\varphi + \sin\varphi)\varrho\,\mathrm{d}\varphi \right] \mathrm{d}\varrho =$$

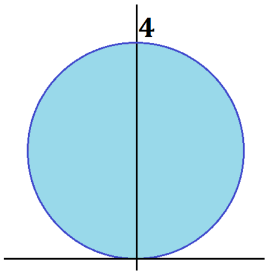
$$= \int_1^3 \left[\varrho^2 \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \right] \mathrm{d}\varrho = \int_1^3 \varrho^2\,[\sin\varphi - \cos\varphi]_0^{2\pi}\,\mathrm{d}\varrho = \int_1^3 \varrho^2\,[(0-0)-(1-1)]\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_1^3 0\,\mathrm{d}\varrho = \underline{\underline{0}}$$

Vypočtěte $\iint_{\mathcal{C}} (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{C}$ platí:

$$x^2 + y^2 \leq 4y$$

$$x^2 + y^2 - 4y \leq 0$$
$$x^2 + y^2 - 4y + 4 \leq 4$$
$$x^2 + (y-2)^2 \leq 2^2$$



$[[x; y] \in (-\infty; \infty) \times (-\infty; \infty)]$

Zavedeme polární souřadnice:

$x = \varrho \cos\varphi$
$y = \varrho \sin\varphi$
$|J| = \varrho$
$\varrho \in \langle 0; 4\sin\varphi \rangle$
$\varphi \in \langle 0; \pi \rangle$

$$(\varrho\cos\varphi)^2 + (\varrho\sin\varphi)^2 = 4\varrho\sin\varphi$$
$$\varrho^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = 4\varrho\sin\varphi$$
$$\varrho = 4\sin\varphi$$

$$\int_0^{\pi} \left[\int_0^{4\sin\varphi} (\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi) \,.\, \underbrace{\varrho}_{|J|} \,\mathrm{d}\varrho \right] \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^{4\sin\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} 64\sin^4\varphi\, \mathrm{d}\varphi = \dots$$

Zavedeme posunuté polární souřadnice:

$x = \varrho\cos\varphi$
$y = 2 + \varrho\sin\varphi$
$|J| = \varrho$
$\varrho \in \langle 0; 2 \rangle$
$\varphi \in \langle 0; 2\pi \rangle$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\varrho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\varrho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \varrho(-\sin\varphi) \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho$$

$$\int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} [(\varrho\cos\varphi)^2 + (2+\varrho\sin\varphi)^2] \,.\, \underbrace{\varrho}_{|J|} \,\mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_0^2 \left\{ \varrho \int_0^{2\pi} [\varrho^2\cos^2\varphi + 4 + 4\varrho\sin\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi]\, \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_0^2 \left\{ \varrho \int_0^{2\pi} [\varrho^2 + 4 + 4\varrho\sin\varphi]\, \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left\{ \varrho^3 [\varphi]_0^{2\pi} + 4\varrho [\varphi]_0^{2\pi} + 4\varrho^2 [-\cos\varphi]_0^{2\pi} \right\} \mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^2 + 8\pi \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^2 + 0 = \underline{\underline{24\pi}}$$

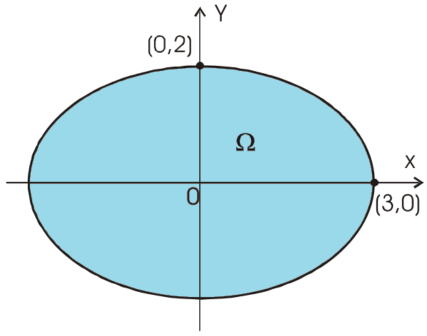
Transformace do zobecněných polárních souřadnic

Vypočtěte $\iint\limits_{\mathcal{D}} \sqrt{4-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ jestliže pro souřadnice bodů oblasti $\mathcal{D}$ platí:

$$4x^2+9y^2\le 36$$

$$\frac{4}{36}x^2+\frac{9}{36}y^2\le 1$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1$$



$\left[4-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}\ge 0\right]$ Zavedeme zobecněné polární souřadnice:

$$x=3\varrho\cos\varphi$$
$$y=2\varrho\sin\varphi$$
$$|\,J\,|=6\varrho$$
$$\varphi\in\langle 0;2\pi\rangle$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\varrho} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial\varrho} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\cos\varphi & 3\varrho(-\sin\varphi)\\ 2\sin\varphi & 2\varrho\cos\varphi\end{vmatrix}=6\varrho\cos^2\varphi+6\varrho\sin^2\varphi=6\varrho$$

Meze nové proměnné ϱ (která pro každý bod vyjadřuje jeho vzdálenost od počátku, proto musí být nezáporná) určíme tak, že zobecněné polární souřadnice dosadíme do vymezení oblasti $\mathcal{D}$.

$$4(3\varrho\cos\varphi)^2+9(2\varrho\sin\varphi)^2\le 36$$
$$36\varrho^2\cos^2\varphi+36\varrho^2\sin^2\varphi\le 36$$
$$36\varrho^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{1}\le 36 \qquad |:36$$
$$(0\le)\ \varrho\le 1$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\sqrt{4-\frac{(3\varrho\cos\varphi)^2}{9}-\frac{(2\varrho\sin\varphi)^2}{4}}\ .\ \underbrace{6\varrho}_{|\,J\,|}\ \mathrm{d}\varrho\right]\mathrm{d}\varphi=6\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\varrho\sqrt{4-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi=$$

$$\left|\begin{array}{c}\sqrt{4-\varrho^2}=t\\ 4-\varrho^2=t^2\\ -2\varrho\,\mathrm{d}\varrho=2t\,\mathrm{d}t\\ \varrho\,\mathrm{d}\varrho=-t\,\mathrm{d}t\\ \begin{array}{c|c}\varrho & t\\\hline 1 & \sqrt{3}\\ 0 & 2\end{array}\end{array}\right|=-6\int_0^{2\pi}\left(\int_2^{\sqrt{3}}t\cdot t\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\varphi=-6\int_0^{2\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_2^{\sqrt{3}}\mathrm{d}\varphi=-6(\sqrt{3}-\frac{8}{3})\cdot[\varphi]_0^{2\pi}=$$

$$=\underline{\underline{4\pi(8-3.\sqrt{3})}}$$